

ANNALES CRPE · MATHÉMATIQUES · 2021

Corrigé détaillé

CRPE 2021 – Mathématiques – Groupement 1

Épreuve écrite disciplinaire de mathématiques (2e épreuve d'admissibilité)

Durée : 4 heures

26 points

Exercice 1

13 points

Exercice 2

Exercice 3

Exercice 4

Pour chaque question : **rappel de l'énoncé**, **corrigé** rédigé, puis « **Pour comprendre en détail** » (méthode, rappels de cours, erreurs fréquentes). À utiliser avec le sujet officiel (documents, tableaux et figures).

Sujet : Ministère de l'Éducation nationale – session 2021 (PE2–21–G1). Corrigé rédigé par Campus XYZ – campusxyz.fr. Tous droits réservés.

Exercice 1 (13 points)

Partie A : coût de fabrication

A.1 Le modèle A est formé de 9 diodes et de son support. Sachant que le coût d'une diode est de 18 centimes, montrer que le coût de fabrication d'une ampoule de modèle A est de **2,55 €**.

Corrigé

Le coût des 9 diodes est $9 \times 0,18 = 1,62$ €.

Le support coûte **0,93** €.

Le coût de fabrication d'une ampoule de modèle A est donc $1,62 + 0,93 = 2,55$ €.

Pour comprendre en détail

Attention : Il faut exprimer tous les coûts dans la même unité : convertir 18 centimes en **0,18** € et 93 centimes en **0,93** € avant d'ajouter.

On peut aussi vérifier en calculant en centimes puis en convertissant le total en euros.

A.2.a Une feuille de calcul a été produite pour calculer les coûts de fabrication des ampoules :

	A	B	C	D	E	F
	Modèle	Nombre de diodes	Coût de fabrication du support (€)	Coût de fabrication du modèle (€)	Nombre de modèles produits	Coût total
1						
2	A	9	0,93		19 000	
3	B	25	0,98		14 900	
4	C	32	1,12		3 094	

Quelle formule peut-on écrire dans la cellule D2 puis étirer vers le bas, pour calculer le coût de fabrication d'une ampoule du modèle correspondant ?

Corrigé

La formule à saisir en D2 est : **=0,18*B2+C2**.

En effet, la colonne B contient le nombre de diodes (B2 pour le modèle A), la colonne C contient le coût du support en euros (C2 pour le modèle A) et chaque diode coûte 0,18 €. En étirant vers

le bas, les références s'ajustent automatiquement : D3 contiendra **=0,18*B3+C3**, D4 contiendra **=0,18*B4+C4**, etc.

Pour comprendre en détail

À retenir : Dans un tableur, toute formule commence par le signe « = ». Les références de cellules (B2, C2) sont par défaut relatives : lorsque l'on recopie la formule vers le bas, le tableur adapte le numéro de ligne (B2 devient B3, C2 devient C3).

Attention : Le coût du support est donné en euros dans la colonne C (0,93 ; 0,98 ; 1,12). Il ne faut pas réécrire en dur la valeur 0,93 dans la formule D2, car elle ne conviendrait pas aux autres modèles après étirement. Il faut référencer la cellule C2.

On peut aussi écrire **= B2 × 0,18 + C2** ; l'ordre de la multiplication n'a pas d'importance.

A.2.b *Quelle formule peut-on écrire dans la cellule F2 puis étirer vers le bas pour obtenir le coût total de production des ampoules du modèle correspondant ?*

Corrigé

En F2, le coût total de production du modèle correspondant est le produit du coût de fabrication d'une ampoule, donné en colonne D, par le nombre de modèles produits, donné en colonne E. La formule à écrire en F2 est donc :

$$=D2*E2$$

En étirant cette formule vers le bas, le tableur ajuste automatiquement les références : F3 contiendra **=D3*E3** et F4 contiendra **=D4*E4**.

Pour comprendre en détail

À retenir : Dans un tableur, une formule commence toujours par = et la multiplication s'écrit avec l'opérateur *. Le coût total se calcule par **coût unitaire × quantité**.

Ici, on utilise des **références relatives** (sans \$) : en étirant la formule vers le bas, D2 devient D3 puis D4, et E2 devient E3 puis E4, ce qui correspond bien à chaque ligne du tableau.

Attention : Il ne faut pas écrire **=\$D\$2*\$E\$2** car les références seraient bloquées : toutes les lignes utiliseraient alors les valeurs du modèle A au lieu de celles de leur propre ligne.

Une vérification peut être faite avec la ligne 2 : le coût unitaire **2,55 €** multiplié par **19 000** ampoules donne bien le coût total de production du modèle A, mais l'énoncé ne demande ici que la formule.

A.3 *Calculer le coût total de production pour fabriquer 19 000 ampoules de modèle A, 14 900 ampoules de modèle B et 3 094 ampoules de modèle C. On l'appellera la commande « DUPONT ».*

Corrigé

Le coût de fabrication d'une ampoule du modèle A est **2,55 €** (question A.1).

Coût d'une ampoule du modèle B : **25 × 0,18 + 0,98 = 4,50 + 0,98 = 5,48 €**.

Coût d'une ampoule du modèle C : $32 \times 0,18 + 1,12 = 5,76 + 1,12 = 6,88 \text{ €}$.

Coût total de la commande DUPONT : $19\,000 \times 2,55 + 14\,900 \times 5,48 + 3\,094 \times 6,88 = 48\,450 + 81\,652 + 21\,286,72 = 151\,388,72 \text{ €}$.

Le coût total de production de la commande « DUPONT » est donc de **151 388,72 €**.

Pour comprendre en détail

À retenir : Le coût de fabrication d'un modèle est la somme du coût des diodes (nombre de diodes $\times$ coût unitaire d'une diode) et du coût du support.

Attention : Le coût d'une diode est donné en centimes ; il faut utiliser **0,18 €** dans les calculs et non **18 €**, pour rester dans la même unité que les coûts de support.

On peut aussi vérifier le résultat en calculant séparément le coût total de toutes les diodes et celui de tous les supports, mais la méthode par modèle est plus directe ici.

Partie B : emballage

B.1 *Calculer le volume d'une ampoule de modèle A. Donner le résultat arrondi au millimètre cube. On rappelle que le volume d'un cylindre dont l'aire de la base est B et de hauteur h est égale à $B \times h$.*

Corrigé

Le modèle A est un cylindre de diamètre **4,5 cm**, donc son rayon est $r = \frac{4,5}{2} = 2,25 \text{ cm}$ et sa hauteur est $h = 6 \text{ cm}$.

L'aire de sa base est $B = \pi r^2 = \pi \times 2,25^2$.

Le volume est donc :

$$V = B \times h = \pi \times 2,25^2 \times 6 = 30,375\pi \text{ cm}^3.$$

Soit $V \approx 95,4259 \text{ cm}^3$.

Or $1 \text{ cm}^3 = 1\,000 \text{ mm}^3$, donc $V \approx 95\,425,9 \text{ mm}^3$.

Arrondi au millimètre cube : $V \approx 95\,426 \text{ mm}^3$.

Le volume d'une ampoule de modèle A est donc d'environ **95 426 mm³**.

Pour comprendre en détail

On applique la formule du volume d'un cylindre $V = B \times h$, où B est l'aire de la base et h la hauteur.

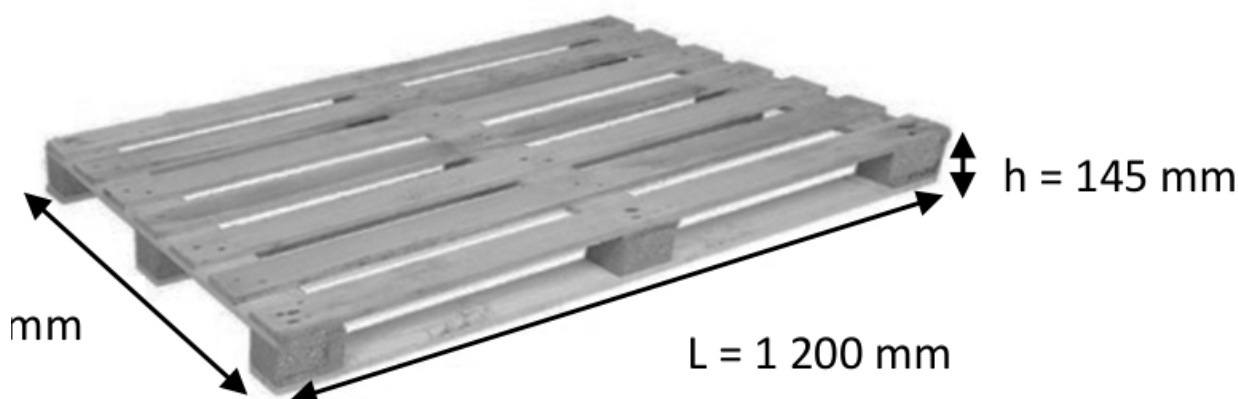
Attention : Le diamètre est **4,5 cm**, il faut bien prendre le rayon $r = 2,25 \text{ cm}$. Pour la conversion, $1 \text{ cm}^3 = 1\,000 \text{ mm}^3$ et non 10 mm^3 , car $1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$ et $(10 \text{ mm})^3 = 1\,000 \text{ mm}^3$.

À retenir : Pour arrondir au millimètre cube, on convertit d'abord le volume en mm^3 puis on arrondit à l'unité.

B.2.a

Les ampoules sont conditionnées dans des boîtes en carton parallélépipédiques, puis stockées sur des palettes. L'entreprise choisit, pour ses trois types d'ampoules, des boîtes parallélépipédiques de dimensions $L = 5 \text{ cm}$, $l = 5 \text{ cm}$ et $h = 7 \text{ cm}$, au prix unitaire de $0,12 \text{ €}$.

La palette EURO vide possède des dimensions standards, soit $L = 1\,200 \text{ mm}$, $l = 800 \text{ mm}$ et $h = 145 \text{ mm}$.



Montrer que le nombre maximum de boîtes d'ampoules sur un étage de palette est de 384.

Corrigé

Pour ranger un maximum de boîtes sur un étage, on pose chaque boîte sur sa face carrée de $5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$, qui est la plus petite.

La palette mesure $1\,200 \text{ mm} = 120 \text{ cm}$ de longueur et $800 \text{ mm} = 80 \text{ cm}$ de largeur.

Dans la longueur : $120 \div 5 = 24$, donc 24 boîtes.

Dans la largeur : $80 \div 5 = 16$, donc 16 boîtes.

Le nombre total de boîtes sur un étage est donc $24 \times 16 = 384$.

Cette disposition remplit exactement la surface de la palette, donc le nombre maximum de boîtes sur un étage est bien 384.

Pour comprendre en détail

À retenir : Pour comparer des longueurs, il faut les exprimer dans la même unité : ici, on convertit les millimètres de la palette en centimètres.

La boîte a pour dimensions $5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} \times 7 \text{ cm}$. Posée sur sa face $5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$, elle occupe une aire de 25 cm^2 , ce qui est l'aire minimale possible. La palette a une aire de $120 \times 80 = 9\,600 \text{ cm}^2$, soit $9\,600 \div 25 = 384$; aucune disposition ne peut donc dépasser 384 boîtes.

Attention : Poser les boîtes sur leur face $5 \text{ cm} \times 7 \text{ cm}$ occuperait plus de place au sol et ne permettrait pas d'atteindre 384 boîtes. De plus, la hauteur de la palette (145 mm) n'intervient pas ici car on ne s'intéresse qu'à un seul étage.

B.2.b Sachant que la hauteur d'une palette chargée ne dépassera pas 1,20 m au total (palette comprise), combien d'étages de 384 boîtes d'ampoules peut-on positionner au maximum sur une telle palette ?

Corrigé

La hauteur de la palette est $145 \text{ mm} = 14,5 \text{ cm}$.

Chaque étage de boîtes mesure 7 cm .

La hauteur maximale totale est $1,20 \text{ m} = 120 \text{ cm}$.

Soit n le nombre d'étages. La hauteur totale chargée est $14,5 + 7n$. On doit avoir :

$$14,5 + 7n \leq 120$$

$$\text{Donc } 7n \leq 120 - 14,5 = 105,5, \text{ puis } n \leq \frac{105,5}{7} \approx 15,07.$$

Le nombre d'étages étant un entier, on peut positionner au maximum **15 étages** de 384 boîtes.

Pour comprendre en détail

L'erreur fréquente est d'oublier la hauteur de la palette vide : on obtiendrait alors $120 \div 7 \approx 17,14$, soit 17 étages, mais cela dépasserait la hauteur autorisée une fois la palette ajoutée.

Attention : le résultat **15,07** doit être arrondi à l'entier inférieur. En effet, 16 étages donneraient $14,5 + 7 \times 16 = 126,5 \text{ cm}$, supérieur à 120 cm. Avec 15 étages, la hauteur totale est $14,5 + 7 \times 15 = 119,5 \text{ cm}$, ce qui convient.

B.2.c Une palette contient seulement un modèle d'ampoule et coûte 15 €. Quel sera le coût en palettes pour la commande « DUPONT » ?

Corrigé

Une palette contient $15 \times 384 = 5\,760$ boîtes. Pour le modèle A : $\frac{19\,000}{5\,760} \approx 3,3$, donc 4 palettes sont nécessaires. Pour le modèle B : $\frac{14\,900}{5\,760} \approx 2,6$, donc 3 palettes sont nécessaires. Pour le modèle C : $3\,094 < 5\,760$, donc 1 palette est nécessaire. Nombre total de palettes : $4 + 3 + 1 = 8$. Coût : $8 \times 15 = 120 \text{ €}$. Le coût en palettes pour la commande « DUPONT » est de **120 €**.

Pour comprendre en détail

Attention : On ne peut pas additionner les quantités des trois modèles puis diviser par 5 760, car une palette ne contient qu'un seul modèle. Les palettes doivent être comptées séparément pour chaque modèle.

L'arrondi se fait toujours à l'entier supérieur : par exemple **3,3** palette signifie qu'il faut 4 palettes, même si la dernière n'est pas pleine.

On peut vérifier : 4 palettes pour le modèle A offrent $4 \times 5\,760 = 23\,040$ emplacements, ce qui couvre les **19 000** ampoules ; 3 palettes pour le modèle B en offrent **17 280**, etc.

B.3 *Quel sera le coût total de l'emballage pour la commande « DUPONT » (boîtes + palettes) ?*

Corrigé

Nombre total d'ampoules à emballer : $19\,000 + 14\,900 + 3\,094 = 36\,994$.

Chaque ampoule nécessite une boîte, donc il faut **36 994** boîtes.

Coût des boîtes : $36\,994 \times 0,12 = 4\,439,28$ €.

D'après la question B.2.c, le coût des palettes nécessaires est de **120** €.

Coût total de l'emballage : $4\,439,28 + 120 = 4\,559,28$ €.

Le coût total de l'emballage pour la commande « DUPONT » est donc **4 559,28** €.

Pour comprendre en détail

Attention : Le montant de 120 € utilisé dans le corrigé correspond à 8 palettes (8×15 €). Or, d'après les questions B.2.a et B.2.b, une palette peut contenir $15 \times 384 = 5\,760$ boîtes. Pour **36 994** boîtes, il faudrait $\lceil 36\,994 / 5\,760 \rceil = 7$ palettes, soit **105** €, ce qui donnerait un total de **4 544,28** €. La réponse attendue (**4 559,28** €) résulte donc d'une incohérence avec les questions précédentes : le nombre de palettes a probablement été arrondi à 8 au lieu de 7 dans la question B.2.c.

Partie C : coût de fonctionnement

C.1 *Quelle est l'étendue de cette série ?*

Corrigé

Le salaire maximum de la série est **2 192,48** € et le salaire minimum est **1 488,11** €.

L'étendue est la différence entre ces deux valeurs :

$$2\,192,48 - 1\,488,11 = 704,37.$$

L'étendue de cette série est donc de **704,37** €.

Pour comprendre en détail

À retenir : L'étendue d'une série statistique est la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale : **étendue = max – min**.

Attention : Ne pas confondre l'étendue avec la moyenne ou la médiane. Il faut bien identifier les deux valeurs extrêmes, même si elles sont données dans le désordre.

C.2 *Déterminer le salaire médian de cette entreprise.*

Corrigé

Il y a 13 salaires : les 8 de la chaîne de fabrication, les 3 de l'emballage (tous à 1 864,37 €) et les 2 de la comptabilité (tous à 1 593,38 €).

On range ces 13 valeurs en ordre croissant :

1 488,11 ; 1 539,45 ; 1 593,38 ; 1 593,38 ; 1 864,37 ; 1 864,37 ; 1 864,37 ; 1 938,36 ; 1 948,37 ; 1 994,38 ; 1 998,93 ; 2 048,37 ; 2 192,48.

L'effectif total, 13, est impair ; la médiane est donc la valeur de rang $\frac{13+1}{2} = 7$, c'est-à-dire la 7e valeur de la série ordonnée.

La 7e valeur est 1 864,37.

Le salaire médian est donc de 1 864,37 €.

Pour comprendre en détail

La principale difficulté est de reconstituer la série complète : l'énoncé indique que les trois salariés de l'emballage ont le même salaire et que les deux salariés de la comptabilité ont le même salaire. Il faut donc compter trois fois 1 864,37 € et deux fois 1 593,38 €, en plus des huit salaires de fabrication.

À retenir : Pour une série de N valeurs ordonnées, la médiane est la valeur de rang $\frac{N+1}{2}$ si N est impair ; si N est pair, c'est la moyenne des valeurs de rangs $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2} + 1$.

Attention : Ne pas confondre la médiane avec la moyenne des salaires, ni oublier de ranger les valeurs avant de chercher la valeur centrale.

C.3 Calculer le salaire moyen dans cette entreprise.

Corrigé

Somme des salaires de la chaîne de fabrication :

$$1\,938,36 + 1\,488,11 + 1\,994,38 + 2\,048,37 + 2\,192,48 + 1\,998,93 + 1\,539,45 + 1\,948,37 = 15\,148,45 \text{ €}.$$

Somme des salaires d'emballage et organisation des livraisons :

$$3 \times 1\,864,37 = 5\,593,11 \text{ €}.$$

Somme des salaires de comptabilité et gestion :

$$2 \times 1\,593,38 = 3\,186,76 \text{ €}.$$

Masse salariale totale :

$$15\,148,45 + 5\,593,11 + 3\,186,76 = 23\,928,32 \text{ €}.$$

Nombre total de salariés : $8 + 3 + 2 = 13$.

Salaire moyen :

$$\frac{23\,928,32}{13} = 1\,840,64 \text{ €}.$$

Le salaire moyen dans cette entreprise est donc de 1 840,64 €.

Pour comprendre en détail

À retenir : La moyenne d'une série statistique s'obtient en divisant la somme de toutes les valeurs par l'effectif total.

Ici, comme les salaires d'emballage et de comptabilité sont identiques, on utilise une multiplication par les effectifs **3** et **2** pour alléger le calcul, ce qui revient à additionner les salaires un par un.

Attention : il faut bien diviser par **13** (l'effectif total) et non par **10** ou par le nombre de catégories. Le résultat est arrondi au centime d'euro car il s'agit d'un salaire.

C.4 *Le coût global d'un salarié en février 2020 est donné par la formule suivante pour cette entreprise : coût global d'un salarié = (salaire net / 0,78) × 1,45. Quel est le coût global en euros, pour un salarié de l'emballage et de l'organisation des livraisons ?*

Corrigé

Pour un salarié de l'emballage et de l'organisation des livraisons, le salaire net est **1 864,37 €**.

On applique la formule :

$$\text{Coût global} = \frac{1\,864,37}{0,78} \times 1,45.$$

$$\frac{1\,864,37}{0,78} \approx 2\,390,22 \text{ puis } 2\,390,22 \times 1,45 \approx 3\,465,82.$$

Le coût global pour un salarié de l'emballage et de l'organisation des livraisons est d'environ **3 465,82 €**.

Pour comprendre en détail

La formule donnée permet de passer du salaire net au coût global supporté par l'entreprise : diviser par **0,78** revient à retrouver le salaire brut avant cotisations salariales, puis multiplier par **1,45** ajoute les charges patronales.

Attention : on doit effectuer la division par **0,78** avant la multiplication par **1,45** (ou de gauche à droite, même priorité). Une erreur fréquente est de faire d'abord **0,78 × 1,45** au dénominateur.

Le résultat est arrondi au centime d'euro.

C.5.a *On souhaite augmenter de 3 % le salaire net de l'employé gagnant 1 488,11 €. Quel est le salaire net de cet employé après augmentation ?*

Corrigé

Une augmentation de 3 % revient à multiplier par le coefficient :

$$1 + \frac{3}{100} = 1,03.$$

On a donc :

$$1\,488,11 \times 1,03 = 1\,532,7533.$$

En arrondissant au centime d'euro : **1 532,75 €**.

Le salaire net après augmentation est de **1 532,75 €**.

Pour comprendre en détail

À retenir : Augmenter une valeur de t % revient à la multiplier par $1 + \frac{t}{100}$. Ici $t = 3$, donc le coefficient multiplicateur est **1,03**.

Attention : L'augmentation n'est pas de 3 € mais de 3 % du salaire initial, soit environ 44,64 €. De plus, le résultat doit être arrondi au centime : on regarde le troisième chiffre après la virgule.

On aurait pu aussi calculer l'augmentation $0,03 \times 1\,488,11$ puis l'ajouter au salaire initial, mais le coefficient multiplicateur est plus direct.

C.5.b Calculer le coût global de ce salaire après augmentation.

Corrigé

Le salaire net après augmentation est : $1\,488,11 \times 1,03 = 1\,532,7533$ €.

Coût global = $\frac{1\,532,7533}{0,78} \times 1,45 \approx 2\,849,35$ €.

Le coût global de ce salaire après augmentation est donc d'environ **2 849,35** €.

Pour comprendre en détail

À retenir : Augmenter un nombre de 3 % revient à le multiplier par $1 + \frac{3}{100} = 1,03$.

Attention : Il ne faut pas arrondir le salaire net après augmentation avant de calculer le coût global, car cela peut modifier le résultat final.

C.5.c De quel pourcentage le coût global a-t-il augmenté ?

Corrigé

Coût global avant augmentation :

$\frac{1\,488,11}{0,78} \times 1,45 \approx 2\,766,36$ €.

Après une augmentation de 3 %, le salaire net est multiplié par $1 + \frac{3}{100} = 1,03$.

Comme le coût global est proportionnel au salaire net, il est lui aussi multiplié par **1,03** :

$c' = \frac{1,03 \times 1\,488,11}{0,78} \times 1,45 = 1,03 \times 2\,766,36 \approx 2\,849,35$ €.

Pourcentage d'augmentation du coût global :

$\frac{2\,849,35 - 2\,766,36}{2\,766,36} \times 100 \approx 3,00$ %.

Le coût global a donc augmenté de **3 %**, comme le salaire net.

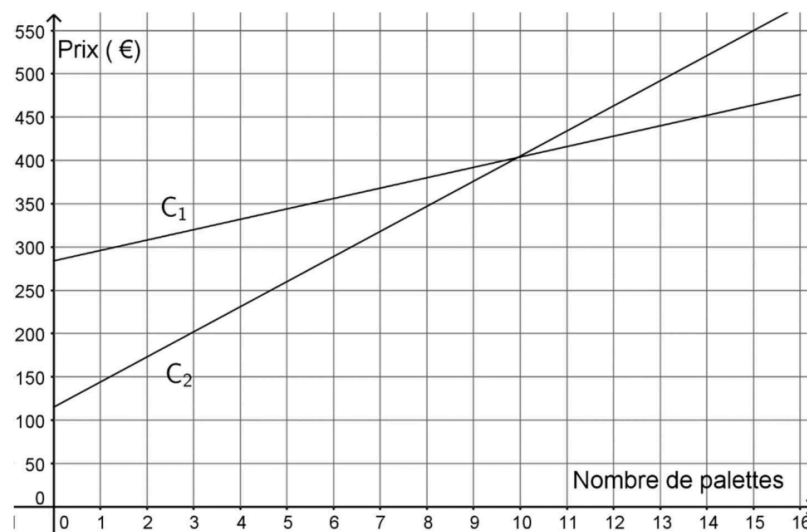
Pour comprendre en détail

À retenir : Le coût global est proportionnel au salaire net car **0,78** et **1,45** sont des constantes pour tous les salariés. Si une grandeur est multipliée par **1,03**, une grandeur proportionnelle est également multipliée par **1,03**, donc son augmentation relative est la même.

Attention : En passant par des coûts arrondis, on peut obtenir **2,99 %** ou **3,00 %** selon les arrondis ; la valeur exacte est bien **3 %**. Inutile de recalculer les deux coûts si l'on justifie la proportionnalité.

Partie D : transport et livraison

D.1.a Répondre, en vous aidant du graphique, aux questions suivantes. Identifier la courbe qui correspond à chaque fonction.



Corrigé

On calcule l'image de 0 par chaque fonction :

- $f(0) = 12 \times 0 + 284 = 284$
- $g(0) = 29 \times 0 + 115 = 115$

La courbe qui passe par le point $(0; 284)$ est la courbe $\mathcal{C}_1$, donc $\mathcal{C}_1$ représente la fonction f .

La courbe qui passe par le point $(0; 115)$ est la courbe $\mathcal{C}_2$, donc $\mathcal{C}_2$ représente la fonction g .

Pour comprendre en détail

À retenir : Pour une fonction affine $x \mapsto ax + b$, le nombre b est l'ordonnée à l'origine, c'est-à-dire la valeur de y quand $x = 0$. Sur un graphique, cela correspond au point où la droite coupe l'axe des ordonnées.

Attention : Ne pas confondre l'ordonnée à l'origine avec la pente. Ici, $\mathcal{C}_2$ monte plus vite que $\mathcal{C}_1$ car sa pente est **29**, supérieure à **12** ; cela confirme que $\mathcal{C}_2$ correspond à g .

On peut aussi vérifier la cohérence avec le graphique : les deux droites se coupent environ à $x = 10$, ce qui est cohérent avec $12x + 284 = 29x + 115$.

D.1.b Quelle société de livraison sera la plus économique pour une commande de 6 palettes ?

Corrigé

À l'abscisse 6, la droite C_2 (société B) est située en dessous de la droite C_1 (société A).

Par le calcul :

$$g(6) = 29 \times 6 + 115 = 289 \text{ €} \text{ et } f(6) = 12 \times 6 + 284 = 356 \text{ €}.$$

Comme $289 < 356$, la société B est la plus économique pour une commande de 6 palettes.

Pour comprendre en détail

La droite la plus basse correspond au tarif le moins cher pour un nombre de palettes donné. Les deux droites se coupent vers $x \approx 10$; pour $x = 6$, on est avant ce seuil, donc la société B est avantageuse.

Attention : ne pas conclure que la société A est forcément moins chère car son tarif par palette (12 €) est inférieur à celui de B (29 €). Il faut aussi tenir compte des frais de gestion : ceux de B sont bien plus faibles (115 € contre 284 €), ce qui rend B plus économique pour un petit nombre de palettes.

D.1.c Pour une commande donnée, quelle société de livraison sera la plus économique en fonction du nombre de palettes ?

Corrigé

Sur le graphique, la droite C_2 est en dessous de C_1 tant que le nombre de palettes x est inférieur à environ 10. Comme le nombre de palettes est un nombre entier, cela correspond à $x \leq 9$.

Les deux droites se coupent pour une valeur de x comprise entre 9 et 10 ($x \approx 9,94$).

Ainsi :

- pour une commande de 1 à 9 palettes, la société B (courbe C_2) est la plus économique ;
- pour une commande de 10 palettes ou plus, la société A (courbe C_1) est la plus économique.

Au voisinage de 10 palettes, les coûts sont très proches.

Pour comprendre en détail

Le graphique donne une lecture approchée du point d'intersection : en résolvant $12x + 284 = 29x + 115$, on trouve $x = \frac{169}{17} \approx 9,94$. Comme le nombre de palettes est un entier, on ne peut pas avoir exactement 9,94 palettes ; on compare donc les coûts pour $x = 9$ et $x = 10$.

On vérifie : pour $x = 9$, $f(9) = 392 \text{ €}$ et $g(9) = 376 \text{ €}$, donc B est moins chère ; pour $x = 10$, $f(10) = 404 \text{ €}$ et $g(10) = 405 \text{ €}$, donc A est moins chère.

Attention : on ne peut pas conclure « jusqu'à 10 palettes, B est plus économique » car à 10 palettes, A devient légèrement moins chère. La lecture graphique doit être affinée en tenant compte du caractère entier de la variable.

À retenir : Une fonction affine $f(x) = mx + p$ est représentée par une droite d'ordonnée à l'origine p . Comparer deux coûts revient à comparer les ordonnées des points des deux droites pour une même abscisse x .

D.2 Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$. Utiliser cette résolution pour affiner la réponse à la question 1.c.

Corrigé

```
\[
\begin{aligned}
f(x)=g(x) &\Leftrightarrow 12x+284=29x+115 \ \\
&\Leftrightarrow 284-115=29x-12x \ \\
&\Leftrightarrow 169=17x \ \\
&\Leftrightarrow x=\frac{169}{17}\approx 9\text{,}94.
\end{aligned}
\]
```

Les prix sont donc égaux pour environ **9,94** palettes, ce qui ne correspond pas à un nombre entier de palettes. Pour un nombre entier de palettes :

- si $x \leq 9$, alors $x < 9,94$ donc $g(x) < f(x)$: la société B est plus économique ;
- si $x \geq 10$, alors $x > 9,94$ donc $f(x) < g(x)$: la société A est plus économique.

Conclusion : pour la commande, la société B est plus économique jusqu'à 9 palettes et la société A à partir de 10 palettes.

Pour comprendre en détail

À retenir : Pour résoudre une équation du premier degré $ax + b = cx + d$, on regroupe les termes en x d'un côté et les constantes de l'autre, puis on divise par le coefficient de x .

Attention : **9,94** n'est pas un nombre entier de palettes ; l'égalité exacte des prix ne sera jamais atteinte pour une commande réelle. Il faut donc comparer les prix pour $x = 9$ et $x = 10$, et ne pas conclure « B est moins cher jusqu'à 9,94 palettes ».

Le graphique donnait une intersection voisine de **10** palettes ; le calcul permet de trancher précisément autour de cette valeur, car la commande est constituée d'un nombre entier de palettes.

Exercice 2

1 Quelle est la probabilité qu'il obtienne 3 ?

Corrigé

Notons p la probabilité d'obtenir chacune des faces 1, 2, 3, 4 ou 5. La somme des probabilités de toutes les issues est 1, donc :

$$5p + \frac{1}{2} = 1, \text{ donc } 5p = \frac{1}{2}, \text{ d'où } p = \frac{1}{10}.$$

La probabilité d'obtenir 3 est donc p , soit $\frac{1}{10} = 0,1$.

Pour comprendre en détail

À retenir : Dans une expérience aléatoire, la somme des probabilités de toutes les issues possibles est toujours égale à 1.

Attention : Le dé est truqué, donc on ne peut pas utiliser l'équiprobabilité entre les six faces : ici, le 6 a une probabilité $\frac{1}{2}$, et les cinq autres faces se partagent la probabilité restante.

On peut aussi raisonner ainsi : la probabilité restante pour les faces 1 à 5 est $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, et comme ces cinq faces sont équiprobables, on divise cette probabilité par 5.

2 Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

Corrigé

D'après la question précédente, $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = 0,1$ et $P(6) = 0,5$.

L'événement « obtenir un nombre pair » est réalisé par les issues 2, 4 et 6.

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le réalisent :

$$P(\text{nombre pair}) = P(2) + P(4) + P(6) = 0,1 + 0,1 + 0,5 = 0,7.$$

La probabilité d'obtenir un nombre pair est donc 0,7.

Pour comprendre en détail

Attention : Le dé est truqué, les faces ne sont pas équiprobables. On ne peut donc pas dire « 3 faces sur 6 sont paires, donc $P = \frac{3}{6} = 0,5$ ». Ici, la face 6 étant très probable, la probabilité d'un nombre pair est plus grande que 0,5.

À retenir : Pour tout dé (truqué ou non), la somme des probabilités de toutes les issues vaut 1. Ici, $5 \times 0,1 + 0,5 = 1$, ce qui confirme la cohérence de la loi.

Autre méthode possible : utiliser l'événement contraire « obtenir un nombre impair » (1, 3 ou 5) dont la probabilité est $0,1 + 0,1 + 0,1 = 0,3$, donc $P(\text{pair}) = 1 - 0,3 = 0,7$.

- 3** Rémi souhaite obtenir un résultat strictement supérieur à 4. A-t-il intérêt à utiliser son dé truqué ou un dé équilibré ? Justifier.

Corrigé

L'événement « obtenir un résultat strictement supérieur à 4 » est constitué des issues 5 et 6.

Pour le dé truqué : la somme des probabilités vaut 1 et $P(6) = \frac{1}{2}$. Donc $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{5} = \frac{1}{10} = 0,1$.

Donc $P(\text{strictement supérieur à 4}) = P(5) + P(6) = 0,1 + 0,5 = 0,6$.

Pour un dé équilibré : $P(\text{strictement supérieur à 4}) = P(5) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0,33$.

Comme $0,6 > \frac{1}{3}$, Rémi a intérêt à utiliser le dé truqué.

Pour comprendre en détail

La clé est de commencer par déterminer les probabilités manquantes du dé truqué. On utilise le fait que la somme des probabilités de toutes les issues est toujours égale à 1.

À retenir : Pour un dé équilibré à 6 faces, chaque face a une probabilité de $\frac{1}{6}$. Pour un dé truqué, la somme des probabilités des six faces doit rester égale à 1, même si elles ne sont pas égales.

Attention : Ne pas attribuer une probabilité de $\frac{1}{5}$ aux faces 1 à 5 : cela ferait une somme totale $\frac{1}{5} \times 5 + \frac{1}{2} = 1,5$, ce qui est impossible. Il faut d'abord calculer la probabilité commune des faces 1 à 5 à partir de la somme totale 1.

Enfin, l'événement « strictement supérieur à 4 » contient deux issues : 5 et 6, pas uniquement 6.

- 4.a** Rémi doit lancer son dé truqué et un dé équilibré. Le résultat obtenu sera la somme des résultats obtenus sur chaque dé. Quelle est la probabilité qu'il obtienne 12 ?

Corrigé

La seule façon d'obtenir 12 avec deux dés est d'obtenir $6 + 6$.

Les lancers des deux dés sont indépendants, donc :

$$P(\text{obtenir 12}) = P(6 \text{ sur le dé truqué}) \times P(6 \text{ sur le dé équilibré}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

La probabilité d'obtenir 12 est $\frac{1}{12}$.

Pour comprendre en détail

À retenir : pour des événements indépendants, $P(A \text{ et } B) = P(A) \times P(B)$.

Attention : on ne peut pas raisonner sur 36 issues équiprobables comme avec deux dés équilibrés, car les issues du dé truqué ne sont pas équiprobables.

4.b *Quelle est la probabilité qu'il obtienne 10 ?*

Corrigé

La somme des probabilités du dé truqué vaut 1, donc $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = \frac{1}{10}$.

Les façons d'obtenir 10 sont $4 + 6$, $5 + 5$ et $6 + 4$ (dé truqué + dé équilibré). Les lancers sont indépendants.

$$P(10) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}$$
$$P(10) = \frac{0,1}{6} + \frac{0,1}{6} + \frac{0,5}{6} = \frac{0,7}{6} = \frac{7}{60}.$$

La probabilité d'obtenir 10 est $\frac{7}{60}$.

Pour comprendre en détail

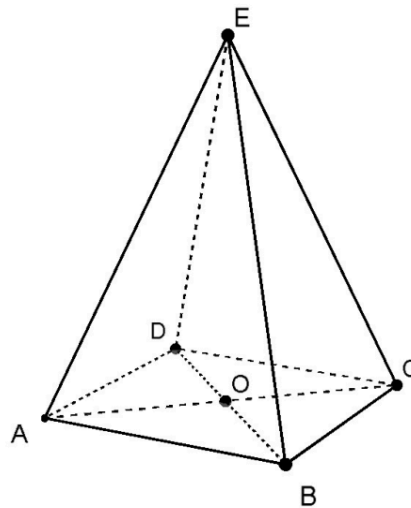
Les deux dés sont lancés indépendamment : on multiplie donc les probabilités de chaque dé. Pour le dé équilibré, chaque issue a pour probabilité $\frac{1}{6}$.

Attention : ne pas compter deux fois le couple $5 + 5$: il n'existe qu'une seule façon d'obtenir 5 sur chaque dé.

Ne pas oublier non plus le couple $6 + 4$ en plus de $4 + 6$, car les dés sont différents (truqué et équilibré).

Exercice 3

- 1 Déterminer la valeur exacte de EO .



Corrigé

On sait que $EO = AC$.

Dans le triangle ABC rectangle en B , le théorème de Pythagore donne :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4^2 + 4^2 = 32.$$

$$\text{Donc } AC = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2} \text{ cm.}$$

Comme $EO = AC$, on obtient $EO = 4\sqrt{2}$ cm.

La valeur exacte de EO est $4\sqrt{2}$ cm.

Pour comprendre en détail

La diagonale d'un carré de côté c vaut toujours $c\sqrt{2}$, ce qui permet un calcul direct. Ici, le théorème de Pythagore justifie ce résultat.

Attention : Ne pas confondre le côté du carré (4 cm) avec sa diagonale. La diagonale est plus longue que le côté. De plus, la valeur demandée est exacte : on conserve la forme $4\sqrt{2}$ et on ne donne pas une valeur approchée comme 5,66 cm.

L'égalité $EO = AC$ est une donnée inhabituelle de l'énoncé ; ce n'est pas une propriété générale des pyramides régulières, mais elle s'applique à cette situation précise.

- 2 Calculer la valeur exacte de la longueur AE . En déduire que son arrondi au millimètre est de **6,3** cm.

Corrigé

D'après la question 1, $EO = AC = 4\sqrt{2}$ cm.

Dans le carré ABCD de côté 4 cm, la diagonale $AC = 4\sqrt{2}$ cm, donc $AO = \frac{AC}{2} = 2\sqrt{2}$ cm.

La pyramide étant régulière, $[EO]$ est la hauteur, donc le triangle AOE est rectangle en O.

D'après le théorème de Pythagore :

$$AE^2 = AO^2 + EO^2 = (2\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2 = 8 + 32 = 40.$$

Donc $AE = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ cm (valeur exacte).

Or $\sqrt{40} \approx 6,3246$, donc l'arrondi au millimètre est **6,3** cm.

Pour comprendre en détail

À retenir : Dans un carré de côté c , la diagonale mesure $c\sqrt{2}$.

Attention : Ne confonds pas AE avec la hauteur EO . AE est une arête latérale, calculée dans le triangle rectangle AOE.

L'arrondi au millimètre s'obtient en arrondissant **6,3246** cm au dixième de centimètre : on obtient **6,3** cm et non **6,32** cm, qui serait l'arrondi au centième.

- 3 Tracer un patron de la pyramide ABCDE en vraie grandeur.

Corrigé

Tracer un carré ABCD de 4 cm de côté.

Sur chaque côté du carré, construire un triangle isocèle ayant pour base ce côté (4 cm) et pour côtés égaux $AE = 2\sqrt{10}$ cm, soit environ **6,3** cm.

Par exemple, pour le côté $[AB]$: tracer un arc de cercle de centre A et de rayon $2\sqrt{10}$ cm, puis un arc de cercle de centre B et de rayon $2\sqrt{10}$ cm ; leur intersection extérieure au carré est le sommet E. Relier E à A et E à B.

Répéter la construction pour les trois autres côtés, en plaçant les sommets à l'extérieur du carré.

On obtient ainsi un patron de la pyramide ABCDE en vraie grandeur.

Pour comprendre en détail

La pyramide est régulière à base carrée, donc ses quatre faces latérales sont des triangles isocèles superposables et les arêtes $[AE]$, $[BE]$, $[CE]$ et $[DE]$ ont la même longueur, trouvée à la question 2 : $AE = 2\sqrt{10}$ cm, soit environ **6,3** cm.

La construction du patron repose sur le fait que chaque face latérale partage un côté de la base carrée et que les arêtes latérales se rejoignent au sommet E. En plaçant les triangles autour du carré, les arêtes latérales coïncident deux à deux lors du pliage.

Attention : ne pas tracer des triangles équilatéraux de côté 4 cm : les arêtes latérales mesurent environ **6,3** cm, pas **4** cm.

Pour une construction précise, on peut reporter au compas la valeur exacte $2\sqrt{10}$ cm si possible, sinon utiliser l'arrondi au millimètre **6,3** cm ; le tracé reste acceptable en vraie grandeur.

Exercice 4

- 1.a** On entre différents nombres dans les deux programmes. Avec le programme A, montrer que si on entre le nombre 5, on obtient 6.

Corrigé

Programme A avec le nombre 5 :

- $5 - 4 = 1$;
- $3 \times 1 = 3$;
- $3 + 3 = 6$.

Le programme A affiche donc 6.

Pour comprendre en détail

Attention : les blocs Scratch s'exécutent les uns après les autres. On ne doit pas écrire une seule expression comme $5 - 4 \times 3 + 3$: après la soustraction, c'est le résultat obtenu qui est multiplié par 3, puis augmenté de 3.

La méthode consiste à suivre pas à pas la séquence des instructions en partant de la valeur entrée.

- 1.b** Quel est le nombre obtenu si on entre le nombre 5 avec le programme B ?

Corrigé

Programme B avec 5 : $3 \times 5 = 15$ puis $15 - 9 = 6$.

Le nombre obtenu avec le programme B est 6.

Pour comprendre en détail

Le programme B correspond à l'expression $3x - 9$: la variable prend d'abord la valeur $3 \times$ réponse, puis on lui ajoute -9 .

Attention : ne pas effectuer $3 \times (5 - 9)$; la multiplication par 3 est faite avant l'ajout de -9 , conformément à l'ordre des instructions du programme.

- 1.c** Calculer le nombre obtenu avec les programmes A et B si on entre le nombre 5,2.

Corrigé

Pour le programme A, en entrant 5,2 :

$$5,2 - 4 = 1,2 ;$$

$$1,2 \times 3 = 3,6 ;$$

$$3,6 + 3 = 6,6.$$

Pour le programme B, en entrant 5,2 :

$$3 \times 5,2 = 15,6 ;$$

$$15,6 - 9 = 6,6.$$

Les deux programmes donnent donc 6,6.

Pour comprendre en détail

À retenir : Le programme A calcule $3(x - 4) + 3 = 3x - 12 + 3 = 3x - 9$, ce qui est exactement l'expression du programme B. Cela explique que les deux programmes donnent toujours le même résultat.

Attention : Dans le programme A, la multiplication par 3 s'applique au résultat de la soustraction $x - 4$, pas directement au nombre entré x .

1.d Quelle conjecture pouvez-vous émettre ? Valider ou rejeter votre conjecture par une démonstration.

Corrigé

Conjecture : les deux programmes donnent le même résultat quel que soit le nombre choisi.

Démonstration : soit x le nombre entré.

$$\text{Programme A : } (x - 4) \times 3 + 3 = 3x - 12 + 3 = 3x - 9.$$

$$\text{Programme B : } 3 \times x - 9 = 3x - 9.$$

Les deux expressions sont identiques, donc la conjecture est validée.

Pour comprendre en détail

À retenir : Développer $3(x - 4)$ donne $3x - 12$: on distribue le facteur 3 sur chaque terme de la parenthèse.

Attention : Dans le programme A, la soustraction de 4 se fait avant la multiplication par 3 ; il faut donc écrire $(x - 4) \times 3$, et non $x - 4 \times 3$.

On utilise une variable x car les exemples des questions 1.a à 1.c ne prouvent rien pour tous les nombres.

2 Quel nombre faut-il entrer avec le programme B pour obtenir la réponse 14 ?

Corrigé

Le programme B calcule $3x - 9$, où x est le nombre entré.

On cherche x tel que $3x - 9 = 14$.

$$3x = 14 + 9 = 23$$

$$x = \frac{23}{3} \approx 7,67.$$

Il faut donc entrer $\frac{23}{3}$ (soit environ **7,67**) avec le programme B pour obtenir 14.

Pour comprendre en détail

On peut aussi remonter le programme à l'envers : partant de 14, on ajoute 9 puis on divise par 3, ce qui revient à la même résolution.

À retenir : Pour résoudre une équation de la forme $ax + b = c$, on isole ax en ajoutant l'opposé de b aux deux membres, puis on divise par a .

Attention : Ne pas faire $14 \div 3 + 9$: l'ajout de -9 dans le programme se traduit par une soustraction de 9 ; pour « remonter » le programme, on commence par ajouter 9 à 14, puis on divise par 3.

3

Montrer que le résultat obtenu avec le programme B est divisible par 3 quel que soit le nombre entier entré dans le programme.

Corrigé

Soit x le nombre entier entré dans le programme B.

Le programme B calcule $3x$, puis $3x - 9$.

Or $3x - 9 = 3(x - 3)$.

Comme x est un entier, $x - 3$ est aussi un entier, donc $3(x - 3)$ est le produit de 3 par un entier : c'est un multiple de 3.

Ainsi, le résultat obtenu avec le programme B est divisible par 3 quel que soit le nombre entier entré.

Pour comprendre en détail

À retenir : Pour montrer qu'une expression est divisible par un nombre, on essaie de la factoriser par ce nombre.

Attention : Vérifier sur quelques exemples ne démontre pas le résultat ; il faut une preuve pour tous les entiers.

Ici, la factorisation par 3 permet de reconnaître un multiple de 3, c'est-à-dire un nombre divisible par 3.