

ANNALES CRPE · MATHÉMATIQUES · 2021

Corrigé détaillé

CRPE 2021 – Mathématiques – Groupement 2

Épreuve écrite disciplinaire de mathématiques (2e épreuve d'admissibilité)

Durée : 4 heures

26 points

Exercice 1	13 points
Exercice 2	
Exercice 3	
Exercice 4	
Exercice 5	

Pour chaque question : **rappel de l'énoncé**, **corrigé** rédigé, puis « **Pour comprendre en détail** » (méthode, rappels de cours, erreurs fréquentes). À utiliser avec le sujet officiel (documents, tableaux et figures).

Sujet : Ministère de l'Éducation nationale – session 2021 (PE2–21–G2). Corrigé rédigé par Campus XYZ – campusxyz.fr. Tous droits réservés.

Exercice 1 (13 points)

Partie A

A.1 Calculer l'aire de la zone de jeu.

Corrigé

L'aire d'un rectangle est donnée par la formule : $A = L \times \ell$, où L est la longueur et ℓ la largeur.

Ici, $L = 100 \text{ m}$ et $\ell = 68 \text{ m}$.

Donc $A = 100 \times 68 = 6\,800$.

L'aire de la zone de jeu est donc $6\,800 \text{ m}^2$.

Pour comprendre en détail

À retenir : L'aire d'un rectangle est **Aire = longueur × largeur**. On exprime le résultat dans l'unité d'aire correspondante, ici le mètre carré (m^2), car les longueurs sont en mètres.

Attention : Ne pas confondre avec le périmètre : pour un rectangle, le périmètre est $2 \times (L + \ell)$, ce qui additionne les longueurs ; ici on multiplie pour obtenir une surface.

A.2 Calculer la longueur de la diagonale de la zone de jeu. Donner la valeur exacte et vérifier qu'elle mesure environ 121 m.

Corrigé

La diagonale du rectangle est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 100 m et 68 m. D'après le théorème de Pythagore : $d^2 = 100^2 + 68^2 = 10\,000 + 4\,624 = 14\,624$.

Donc $d = \sqrt{14\,624} = 4\sqrt{914} \text{ m}$ (car $14\,624 = 16 \times 914$).

À la calculatrice, $\sqrt{14\,624} \approx 120,93$, donc la diagonale mesure environ 121 m.

Pour comprendre en détail

À retenir : Dans un rectangle de longueur L et de largeur ℓ , la diagonale d vérifie $d^2 = L^2 + \ell^2$ d'après le théorème de Pythagore.

Attention : La valeur exacte demandée est la racine carrée simplifiée ($4\sqrt{914}$), pas $d^2 = 14\,624$. Ne pas oublier de prendre la racine carrée après avoir additionné les carrés.

Pour simplifier la racine carrée, on cherche un facteur carré parfait dans le nombre sous le radical (ici 16). L'approximation au mètre près s'obtient en arrondissant la valeur approchée à l'unité.

A.3 Aya parcourt la diagonale de la zone de jeu en 18 secondes. Calculer sa vitesse moyenne en m/s, donner l'arrondi au centième.

Corrigé

La distance parcourue est la diagonale de la zone de jeu, soit environ 121 m.

$$v = \frac{d}{t} = \frac{121}{18} \approx 6,722 \dots$$

L'arrondi au centième est donc $v \approx 6,72$ m/s.

Pour comprendre en détail

À retenir : La vitesse moyenne est le quotient de la distance parcourue par le temps mis : $v = \frac{d}{t}$.

La distance utilisée est la diagonale de la question A.2. Sa valeur exacte est $\sqrt{14624} \approx 120,93$ m, mais l'énoncé demande de vérifier qu'elle mesure environ 121 m ; utiliser cette valeur arrondie au mètre est donc accepté et donne le même arrondi au centième pour la vitesse ($120,93/18 \approx 6,7183$).

Attention : Ici le temps est déjà en secondes, il n'y a donc pas de conversion à faire. Une erreur fréquente est de confondre la vitesse moyenne avec l'allure (temps divisé par la distance) ou d'arrondir au dixième au lieu du centième.

A.4 Court-elle à une vitesse moyenne supérieure à 30 km/h ? Justifier.

Corrigé

On convertit la vitesse trouvée à la question A.3 en km/h :

$$6,72 \times 3,6 = 24,192$$

soit environ 24,2 km/h.

Comme $24,2 < 30$, Aya ne court pas à une vitesse moyenne supérieure à 30 km/h.

Pour comprendre en détail

La conversion $\times 3,6$ vient de $1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/h}$, car $1 \text{ h} = 3\,600 \text{ s}$ et $1 \text{ km} = 1\,000 \text{ m}$.

Attention : comparer 6,72 et 30 directement serait faux car les unités ne sont pas les mêmes.

Autre vérification possible : $30 \text{ km/h} = 30 \div 3,6 \approx 8,33 \text{ m/s}$, ce qui reste supérieur à 6,72 m/s.

A.5 La championne Elaine Thompson parcourt 100 m en 10,93 s. En courant avec la même vitesse moyenne, combien de temps, en seconde, aurait mis Elaine Thompson pour parcourir la même diagonale ? Arrondir au dixième.

Corrigé

La distance parcourue et le temps de course sont proportionnels. Pour parcourir 100 m, Elaine Thompson met 10,93 s, donc pour parcourir 121 m, elle mettrait :

$$121 \times \frac{10,93}{100} = 13,2253 \text{ s.}$$

En arrondissant au dixième, elle aurait mis environ 13,2 s pour parcourir la diagonale.

Pour comprendre en détail

La valeur 121 m utilisée est la valeur approchée de la diagonale obtenue à la question A.2 ; le résultat est donc lui aussi une valeur approchée.

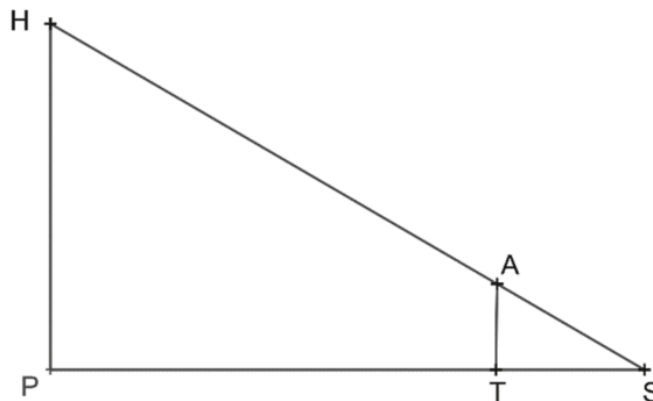
Attention : l'énoncé demande un arrondi au dixième, pas au centième : 13,2253 se rapproche de 13,2 et non de 13,3.

À retenir : dans une situation de proportionnalité, on peut utiliser le produit en croix : si d_1 est parcourue en t_1 , alors pour une distance d_2 , la durée est $t_2 = d_2 \times \frac{t_1}{d_1}$.

On peut aussi vérifier en calculant la vitesse moyenne $v = \frac{100}{10,93}$ puis $t = \frac{121}{v}$, ce qui redonne le même calcul.

Partie B

B Déterminer la hauteur HP du poteau. Arrondir le résultat au dixième de mètre.



Corrigé

Les points S, T, P sont alignés sur le sol et les points S, A, H sont alignés sur la droite (SH) .
Les droites (PH) et (TA) sont toutes deux perpendiculaires au sol, donc elles sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès dans le triangle SPH , avec $A \in [SH]$ et $T \in [SP]$:

$$\frac{AT}{HP} = \frac{TS}{PS}.$$

Or $PS = PT + TS = 9,51 + 2,78 = 12,29$ m.

$$\text{Donc } HP = \frac{AT \times PS}{TS} = \frac{1,74 \times 12,29}{2,78} \approx 7,69 \text{ m.}$$

Arrondie au dixième de mètre, la hauteur du poteau est $HP \approx 7,7$ m.

Pour comprendre en détail

À retenir : Le théorème de Thalès s'applique lorsque deux droites parallèles $((AT)$ et $(PH))$ coupent deux droites sécantes $((SH)$ et $(SP))$. Les longueurs des côtés des triangles sont alors proportionnelles.

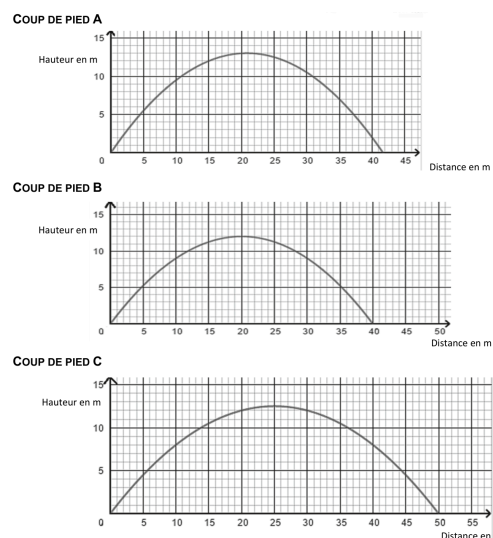
Cette configuration d'ombres est classique : les rayons du soleil étant parallèles, les triangles formés par chaque objet vertical et son ombre sont semblables. On peut aussi raisonner par homothétie de centre S qui transforme A en H et T en P , avec un rapport d'agrandissement $\frac{PS}{TS}$.

Attention : Ne pas confondre PS et TS . L'ombre du poteau s'étend de P à S , donc $PS = PT + TS$. Utiliser seulement $TS = 2,78$ m donnerait une hauteur erronée. Penser aussi à arrondir au dixième : $7,69$ m se note $7,7$ m.

Le résultat $7,7$ m est cohérent avec la hauteur réelle d'un poteau de but de rugby.

Partie C

C.1 Quel(s) coup(s) de pied permet(tent) à Romain de faire passer le ballon au-dessus de la barre transversale ? Justifier.



Corrigé

La barre transversale est située à 40 m du point O et à 3 m de hauteur. Le ballon passe au-dessus de la barre uniquement si sa hauteur à 40 m est supérieure à 3 m.

Sur le graphique, pour une distance de 40 m :

- la trajectoire A a une hauteur d'environ 2 m, donc $2 < 3$;
- la trajectoire B retombe au sol, sa hauteur est 0 m ;
- la trajectoire C a une hauteur d'environ 8 m, donc supérieure à 3 m.

Seul le coup de pied C permet au ballon de passer au-dessus de la barre transversale.

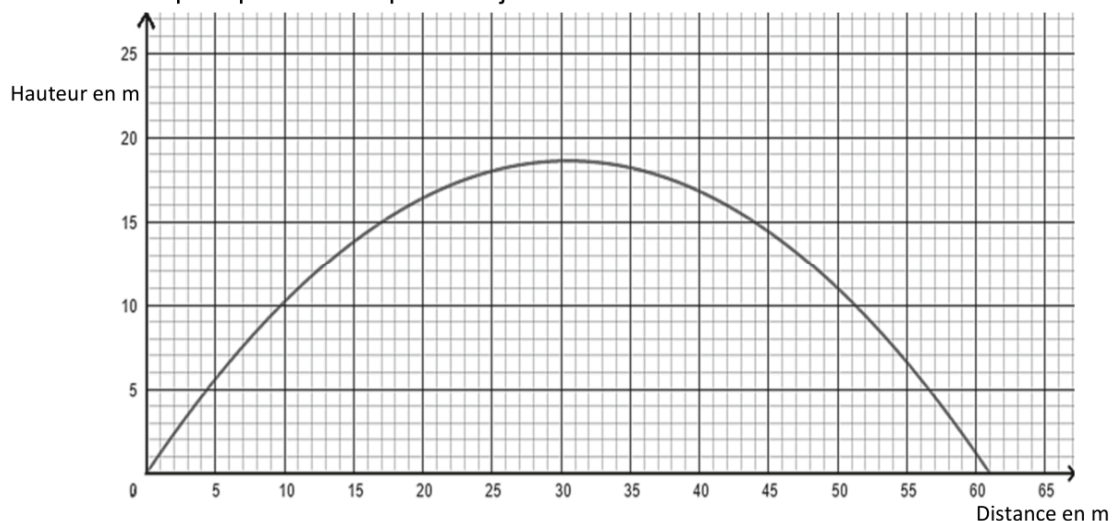
Pour comprendre en détail

À retenir : Sur un graphique donnant la hauteur d'un objet en fonction de la distance horizontale, on lit la hauteur au niveau de l'abscisse demandée (ici 40 m).

Attention : Ne pas confondre la hauteur maximale de la trajectoire avec la hauteur au niveau de la barre : une trajectoire peut monter très haut mais retomber trop tôt ou trop tard.

La trajectoire B atteint le sol exactement à 40 m : le ballon est donc au sol au niveau de la ligne de but, ce qui ne permet pas de franchir la barre située à 3 m de hauteur.

C.2.a Romain se trouve maintenant à une distance de 55 m face au but. Il tente un coup de pied illustré par la trajectoire de ballon donnée ci-dessous.



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique. Romain a-t-il réussi à faire passer le ballon au-dessus de la barre transversale ? Justifier.

Corrigé

D'après le graphique, pour une distance de 55 m, le ballon se trouve à une hauteur d'environ 6 m.

La barre transversale est à 3 m du sol. Or $6 > 3$, donc le ballon passe au-dessus de la barre transversale : Romain réussit son coup de pied.

Pour comprendre en détail

Attention : il faut bien lire la hauteur à l'abscisse **55 m**, qui représente la distance depuis le point de frappe, et non une distance restant à parcourir.

On peut aussi vérifier que le ballon n'est pas encore retombé : le graphique indique qu'il touche le sol vers **61 m**, donc à **55 m** il est encore en l'air.

C.2.b À quelle hauteur maximale le ballon s'est-il élevé ?

Corrigé

Le point le plus haut de la trajectoire a pour ordonnée environ **18,5**. Il est atteint pour une distance d'environ **30 m**.

La hauteur maximale atteinte par le ballon est donc d'environ **18,5 m**.

Pour comprendre en détail

À retenir : Sur un graphique représentant une hauteur en fonction d'une distance, le maximum de la hauteur correspond à l'ordonnée du point le plus haut de la courbe.

Attention : Il ne faut pas confondre la hauteur maximale avec la hauteur au niveau des poteaux (environ **6 m** à **55 m**) ni avec la distance à laquelle ce maximum est atteint (**30 m**).

C.2.c À quelle distance, derrière la ligne de but, le ballon est-il retombé à terre ? Justifier.

Corrigé

Le ballon retombe lorsque sa hauteur est nulle. Par lecture graphique, la courbe coupe l'axe des abscisses pour une distance d'environ **61 m**.

La ligne de but est située à **55 m** du point de frappe, donc le ballon retombe à $61 - 55 = 6$ m derrière la ligne de but.

Pour comprendre en détail

Attention : ne pas confondre l'abscisse du point de retombée avec la distance demandée. La distance derrière la ligne de but est une différence entre la distance de retombée et la distance de la ligne de but.

La lecture graphique fournit une valeur approchée : selon la précision de lecture, on peut trouver une valeur proche de **61 m**. L'essentiel est de bien soustraire **55 m** pour obtenir la distance derrière la ligne.

C.3.a Pour la suite du problème, on admet que le ballon suit la trajectoire donnée par la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = -0,02x^2 + 1,22x$ où $f(x)$ représente la hauteur du ballon en mètre pour une longueur au sol x en mètre. Romain étudie cette fonction grâce à une feuille de calcul d'un tableur ; voici un extrait du travail obtenu :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x	1	4	12	20	25	38	40	45	55
2	$f(x)$	1,2	4,56	11,76	16,4		17,48	16,8	14,4	6,6

Quelle formule a-t-il entrée dans la cellule B2 puis étirée pour compléter ce tableau ?

Corrigé

En B2, on saisit la formule **$=-0,02*B1^2+1,22*B1$** . En l'étirant vers la droite, la référence B1 devient C1, D1, etc. Vérification pour B1 = 1 : $-0,02 \times 1^2 + 1,22 \times 1 = 1,2$, ce qui correspond bien à la valeur affichée en B2.

Pour comprendre en détail

À retenir : Dans un tableur, toute formule commence par **=**. La multiplication s'écrit *****, la puissance s'écrit **Missing superscript or subscript argument**, et on référence une cellule par sa lettre de colonne et son numéro de ligne.

Attention : Ne pas écrire **x** dans la formule ; le tableur ne reconnaît que les références de cellules. De plus, sans le signe **=** initial, l'expression serait interprétée comme du texte et aucun calcul ne serait effectué.

C.3.b Quelle valeur devrait-il obtenir dans la cellule F2 ? Justifier.

Corrigé

Pour la cellule F2, on a **$x = 25$** . On calcule :

$$f(25) = -0,02 \times 25^2 + 1,22 \times 25 = -0,02 \times 625 + 30,5 = -12,5 + 30,5 = 18.$$

Donc F2 devrait afficher **18**.

Pour comprendre en détail

À retenir : Pour calculer l'image d'un nombre par une fonction, on remplace **x** par ce nombre dans l'expression de **$f(x)$** .

Attention : Le carré porte uniquement sur **25**, pas sur le produit **$-0,02 \times 25$** . Il faut aussi conserver le signe négatif de **$-0,02$** lors de la multiplication.

C.3.c Quelle cellule permet de confirmer que le ballon est bien passé au-dessus de la barre transversale ? Justifier.

Corrigé

Romain se trouve à **55 m** du but, donc la barre transversale se situe à **$x = 55$ m**, ce qui correspond à la colonne J du tableur.

Pour **$x = 55$** , on a **$f(55) = -0,02 \times 55^2 + 1,22 \times 55 = 6,6$ m**, valeur affichée en J2.

Comme $6,6 > 3$, le ballon est à une hauteur supérieure à celle de la barre transversale au niveau de la ligne de but. C'est donc la cellule **J2** qui permet de confirmer que le ballon est passé au-dessus de la barre.

Pour comprendre en détail

Attention : Le corrigé officiel indique parfois la cellule H2, mais cela correspond à $x = 40$ m, distance utilisée lorsque Romain était à 40 m du but dans la partie C.1. Ici, Romain est à 55 m du but, donc la colonne pertinente est J ($x = 55$ m), pas H.

Il faut bien identifier la distance au moment du coup de pied pour choisir la bonne colonne : la barre transversale est à la position x égale à cette distance.

C.4 Utiliser l'expression algébrique de la fonction f pour déterminer à quelle distance derrière la ligne de but le ballon est retombé à terre.

Corrigé

Le ballon est au sol lorsque $f(x) = 0$, donc on résout :

$$-0,02x^2 + 1,22x = 0$$

On factorise par x :

$$x(-0,02x + 1,22) = 0$$

C'est une équation produit nul, donc :

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad -0,02x + 1,22 = 0$$

On résout la seconde équation :

$$-0,02x + 1,22 = 0 \Leftrightarrow 0,02x = 1,22 \Leftrightarrow x = \frac{1,22}{0,02} = 61$$

La solution $x = 0$ correspond au point de départ du ballon. Le ballon retombe donc à **61** m du point O.

Or la ligne de but est à **55** m du point O, donc le ballon retombe à :

$$61 - 55 = 6$$

soit **6** m derrière la ligne de but.

Pour comprendre en détail

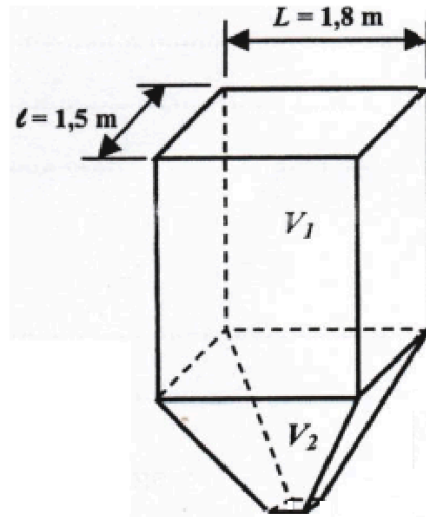
À retenir : Pour trouver le point de chute d'un objet sur le sol, on résout $f(x) = 0$. Avec une expression $ax^2 + bx$ sans terme constant, la factorisation par x est directe et conduit à une équation produit nul.

Attention : La valeur **61** m est la distance depuis le point de frappe O, pas depuis la ligne de but. Penser à retrancher les **55** m qui séparent O de la ligne de but pour répondre précisément à la question.

On peut vérifier que l'image de la racine non nulle trouvée est bien **0**, et remarquer que cette distance est supérieure à **55 m**, donc le point de chute est bien derrière la ligne de but.

Exercice 2

- 1 Sachant que le volume total V_T du silo est de $12,26 \text{ m}^3$, calculer la hauteur du parallélépipède rectangle.



Corrigé

$$V_1 = V_T - V_2 = 12,26 - 2 = 10,26 \text{ m}^3.$$

Le volume d'un parallélépipède rectangle est $V_1 = L \times \ell \times h$.

$$\text{Donc } h = \frac{V_1}{L \times \ell} = \frac{10,26}{1,8 \times 1,5} = \frac{10,26}{2,7} = 3,8.$$

La hauteur du parallélépipède rectangle est **3,8 m**.

Pour comprendre en détail

À retenir : Le volume d'un pavé droit est $V = L \times \ell \times h$; pour isoler une dimension, on divise le volume par le produit des deux autres dimensions.

Attention : Il faut d'abord soustraire le volume de la pyramide tronquée V_2 . Utiliser directement $12,26 \text{ m}^3$ comme volume du pavé droit conduirait à une hauteur fautive.

La hauteur de 1,2 m de la partie inférieure n'est pas utile pour cette question.

- 2 En déduire la hauteur totale du silo.

Corrigé

La hauteur du parallélépipède rectangle a été trouvée à la question précédente : **$h = 3,8 \text{ m}$** .

La partie inférieure est une pyramide tronquée de hauteur **1,2 m**.

La hauteur totale H du silo est donc :

\[

$$H = 3\text{ m} + 2\text{ m} = 5$$

\]

La hauteur totale du silo est de **5 m**.

Pour comprendre en détail

À retenir : Quand un solide est composé de deux parties empilées verticalement, sa hauteur totale est la somme des hauteurs de chacune des parties.

Attention : On additionne ici des hauteurs (en m), pas des volumes. Le volume total V_T ne doit pas être utilisé dans cette addition.

- 3** Pour un même volume et une même hauteur, quel serait le diamètre d'un silo cylindrique ? Arrondir au dixième de m. On rappelle que le volume d'un cylindre dont l'aire de la base est B et de hauteur h est égal à $B \times h$.

Corrigé

D'après les questions précédentes, la hauteur totale du silo est $h = 5$ m et son volume total est $V_T = 12,26$ m³.

Pour un cylindre de rayon r et de hauteur h , on a $V = \pi r^2 h$, donc :

$$\pi r^2 \times 5 = 12,26$$

$$r^2 = \frac{12,26}{5\pi} \approx 0,7805$$

$$r \approx \sqrt{0,7805} \approx 0,8835 \text{ m}$$

Le diamètre est le double du rayon : $d = 2r \approx 2 \times 0,8835 \approx 1,767$ m.

Arrondi au dixième de mètre, le diamètre du silo cylindrique serait **1,8 m**.

Pour comprendre en détail

À retenir : L'aire de la base d'un cylindre est celle d'un disque : $B = \pi r^2$, donc $V = \pi r^2 h$.

Attention : la formule utilise le rayon, pas le diamètre. Il faut donc isoler r^2 , prendre la racine carrée, puis multiplier par 2.

Conserver la valeur exacte de r^2 et n'arrondir qu'à la fin évite les erreurs d'arrondi intermédiaires. Une vérification rapide : le diamètre obtenu étant **1,767 m**, il s'arrondit bien à **1,8 m** au dixième car le chiffre des centièmes est 6.

Exercice 3

- 1 *La cheffe d'entreprise affirme que plus de 40 % des personnes travaillant à Toulouse gagnent plus de 2 000 €. Est-ce vrai ? Justifier la réponse.*

Corrigé

Les salaires supérieurs à 2 000 € correspondent aux trois dernières barres du diagramme : la barre de 2 100 € (4 employés), l'avant-dernière barre masquée (3 employés) et la dernière barre masquée (1 employé), car ces deux barres masquées sont situées après 2 100 € dans l'ordre croissant.

Ainsi : $4 + 3 + 1 = 8$ employés gagnent plus de 2 000 € sur 19 employés au total.

$\frac{8}{19} \approx 0,421$, soit environ **42,1 %**.

Or **42,1 % > 40 %** : l'affirmation de la cheffe d'entreprise est donc vraie.

Pour comprendre en détail

Attention : il ne faut pas oublier les deux barres masquées. Comme les salaires sont rangés dans l'ordre croissant, elles sont forcément supérieures à 2 100 €, donc elles comptent aussi parmi les salaires supérieurs à 2 000 €. Il faut également bien inclure la barre de 2 100 €, car 2 100 € est strictement supérieur à 2 000 €.

On peut aussi comparer en effectifs : **40 %** de 19 vaut $0,4 \times 19 = 7,6$, donc il faut au moins 8 employés concernés pour dépasser 40 %.

- 2.a *Sur le site de Toulouse, l'étendue des salaires est égale à 1 890 € et le salaire moyen est de 1 935 €. Déterminer la valeur du plus haut salaire de Toulouse.*

Corrigé

L'étendue est égale à la différence entre le salaire maximum et le salaire minimum :

$$1\,890 = \text{salaire maximum} - 1\,410$$

$$\text{d'où } \text{salaire maximum} = 1\,890 + 1\,410 = 3\,300.$$

Le plus haut salaire de Toulouse est donc de **3 300 €**.

Pour comprendre en détail

À retenir : L'étendue d'une série statistique est la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale : **étendue = max – min**.

Attention : Pour retrouver le maximum à partir de l'étendue, on ajoute le minimum à l'étendue : **max = étendue + min**, on ne soustrait pas.

La donnée « salaire moyen de **1 935 €** » n'est pas utile pour cette question. Vérification : $3\,300 - 1\,410 = 1\,890$, ce qui correspond bien à l'étendue indiquée. Le corrigé officiel mentionne une fois « **3 000 €** » par erreur, mais la valeur correcte est bien **3 300 €**.

2.b Déterminer la valeur des salaires correspondant à l'avant-dernière barre du graphique présentant la répartition des salaires à Toulouse en 2020.

Corrigé

D'après la question 2.a, le plus haut salaire de Toulouse est **3 300 €** ; la dernière barre représente donc 1 salarié à **3 300 €**.

Notons x le salaire correspondant à l'avant-dernière barre, qui concerne 3 salariés. La moyenne pondérée d'une série est le quotient de la somme des produits « valeur $\times$ effectif » par l'effectif total. On a donc :

$$\frac{2 \times 1\,410 + 4 \times 1\,590 + 3 \times 1\,760 + 2 \times 1\,920 + 4 \times 2\,100 + 3x + 1 \times 3\,300}{19} = 1\,935$$

Calcul de la somme des termes connus :

$$2\,820 + 6\,360 + 5\,280 + 3\,840 + 8\,400 + 3\,300 = 30\,000$$

On obtient donc :

$$3x + 30\,000 = 1\,935 \times 19 = 36\,765$$

$$3x = 36\,765 - 30\,000 = 6\,765$$

$$x = \frac{6\,765}{3} = 2\,255$$

L'avant-dernière barre correspond à un salaire de **2 255 €**.

Pour comprendre en détail

La clé est de traduire la moyenne par une égalité : chaque barre apporte **salaire $\times$ effectif**, car la moyenne n'est pas la moyenne des salaires affichés mais la moyenne pondérée par le nombre d'employés.

À retenir : La moyenne pondérée est le quotient de la somme des produits « valeur $\times$ effectif » par l'effectif total.

Attention : Ne pas oublier la dernière barre (1 salarié à **3 300 €**) dans la somme, ni additionner les salaires sans les multiplier par leur effectif.

Une vérification rapide consiste à s'assurer que le total des salaires obtenu avec la valeur trouvée redonne bien **1 935 $\times$ 19**.

3 Déterminer le salaire médian des employés de Toulouse.

Corrigé

L'effectif total est de **19** salariés. La médiane est la 10^e valeur car **19** est impair et $\frac{19 + 1}{2} = 10$.

En cumulant les effectifs des barres dans l'ordre croissant des salaires : **2**, puis **6**, puis **9**, puis **11**. La 10^e valeur (ainsi que la 11^e) se trouve donc dans la barre correspondant à **1 920 €**.

Le salaire médian des employés de Toulouse est donc **1 920 €**.

Pour comprendre en détail

La médiane est la valeur qui partage la série ordonnée en deux groupes de même effectif : au moins la moitié des valeurs sont inférieures ou égales à la médiane, et au moins la moitié lui sont supérieures ou égales. Pour un effectif impair, elle correspond à une valeur observée, de rang $\frac{N + 1}{2}$.

Ici, les barres masquées ne gênent pas le calcul : la 10^e valeur est atteinte avant les barres inconnues, dès que l'effectif cumulé dépasse 10.

Attention : ne pas confondre moyenne et médiane : la médiane ne dépend pas des valeurs extrêmes, mais uniquement de l'ordre et des effectifs.

4 Calculer le salaire moyen en 2020 de l'ensemble du personnel de cette entreprise. Arrondir à l'unité.

Corrigé

Le salaire moyen de l'ensemble du personnel est une moyenne pondérée par les effectifs des deux sites.

$$\frac{19 \times 1\,935 + 12 \times 1\,520}{19 + 12} = \frac{36\,765 + 18\,240}{31} = \frac{55\,005}{31} \approx 1\,774,35$$

Arrondi à l'unité, le salaire moyen en 2020 de l'ensemble du personnel est de **1 774 €**.

Pour comprendre en détail

À retenir : Pour calculer la moyenne globale à partir des moyennes de deux groupes, on utilise la formule $\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$.

Attention : On ne peut pas faire simplement la moyenne des deux salaires moyens (**1 935 + 1 520**) $\div 2$, car les deux sites n'ont pas le même nombre d'employés.

Une autre façon de voir est de reconstituer la masse salariale totale de chaque site en multipliant son salaire moyen par son effectif, puis de diviser la somme par l'effectif total.

- 5.a** En 2021, la cheffe d'entreprise souhaiterait octroyer une augmentation de 10 % à tous les employés travaillant à Montauban. Quel sera alors le montant du salaire minimum à Montauban en 2021 ?

Corrigé

Le salaire minimum à Montauban en 2020 est 1 410 €. Une augmentation de 10 % revient à multiplier par $1 + \frac{10}{100} = 1,10$.

Le nouveau salaire minimum est donc $1\,410 \times 1,10 = 1\,551$ €.

En 2021, le salaire minimum à Montauban sera de 1 551 €.

Pour comprendre en détail

À retenir : Augmenter une valeur de t % revient à la multiplier par $1 + \frac{t}{100}$.

On peut aussi calculer le montant de l'augmentation puis l'ajouter au salaire initial. Une erreur fréquente est d'ajouter 10 € au lieu de 10 % du salaire.

- 5.b** De quel pourcentage aurait-il fallu augmenter les salaires de Montauban pour que le salaire moyen soit le même sur les deux sites ? Justifier. On donnera le résultat arrondi au dixième d'unité de pourcentage.

Corrigé

Une augmentation uniforme de t % revient à multiplier tous les salaires par $1 + \frac{t}{100}$; le salaire moyen est donc aussi multiplié par ce coefficient.

On doit avoir : $1\,520 \times \left(1 + \frac{t}{100}\right) = 1\,935$.

D'où $1 + \frac{t}{100} = \frac{1\,935}{1\,520} \approx 1,2730$.

Donc $\frac{t}{100} \approx 0,2730$, soit $t \approx 27,30$.

Il aurait fallu augmenter les salaires de Montauban d'environ **27,3 %** (arrondi au dixième).

Pour comprendre en détail

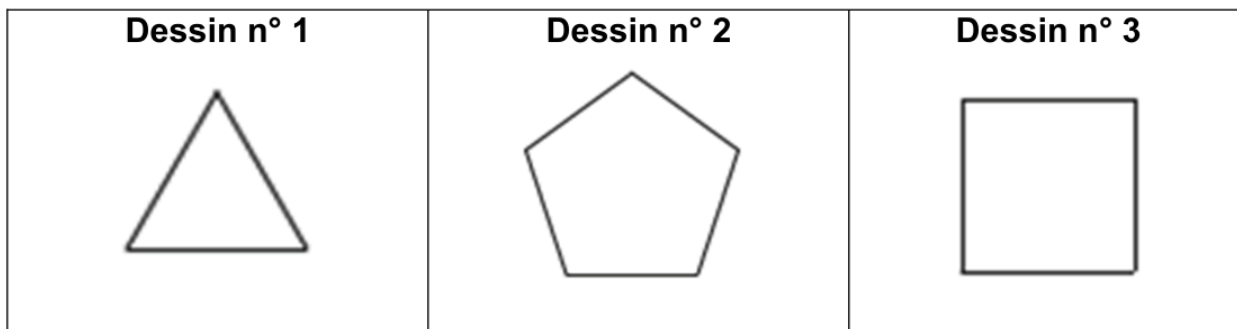
À retenir : Si tous les salaires sont multipliés par un même coefficient, la moyenne est multipliée par ce même coefficient.

Attention : Ne pas utiliser un coefficient arrondi trop tôt : avec **1,27**, on obtiendrait **27 %** au lieu de l'arrondi attendu **27,3 %**.

On peut aussi calculer le taux directement par $\frac{1\,935 - 1\,520}{1\,520} \times 100$, puisque seul le salaire moyen de Montauban doit évoluer pour atteindre celui de Toulouse.

Exercice 4

1 Ces blocs ont permis de construire les trois figures ci-dessous.



Pour chacun des blocs A, B et C, donner le numéro de la figure correspondant.

Corrigé

Le nombre de répétitions correspond au nombre de côtés du polygone régulier. L'angle de rotation est l'angle extérieur, égal à $\frac{360^\circ}{n}$ où n est le nombre de côtés.

Bloc	Répétitions	Angle de rotation	Figure correspondante
Bloc A	5	72°	Pentagone régulier : dessin n°2
Bloc B	3	120°	Triangle équilatéral : dessin n°1
Bloc C	4	90°	Carré : dessin n°3

Conclusion : Bloc A → dessin n°2 ; Bloc B → dessin n°1 ; Bloc C → dessin n°3.

Pour comprendre en détail

À retenir : Pour qu'un polygone régulier se referme, le robot doit tourner au total de 360° . Chaque répétition le fait tourner d'un angle extérieur égal à $\frac{360^\circ}{n}$, où n est le nombre de côtés.

Attention : Ne pas confondre l'angle intérieur du polygone avec l'angle de rotation. Par exemple, le triangle équilatéral a un angle intérieur de 60° , mais l'angle de rotation est $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Vérification : le nombre de côtés de chaque figure (3, 5, 4) apparaît directement dans le nombre de répétitions des blocs, ce qui permet de lever toute ambiguïté.

2 Recopier et modifier le bloc A pour obtenir un hexagone régulier dont les côtés mesurent 50 pixels.

Corrigé

Un hexagone régulier possède 6 côtés. L'angle de rotation après chaque côté est donc $\frac{360}{6} = 60^\circ$.

Le bloc A modifié est : répéter 6 fois { avancer de 50 ; tourner $\curvearrowright$ de 60 degrés }.

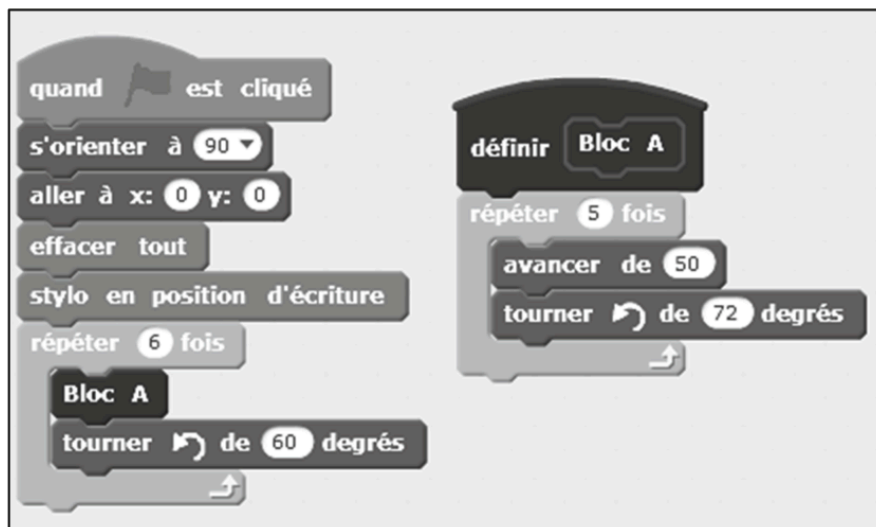
Pour comprendre en détail

Dans ces programmes, l'angle indiqué est l'**angle extérieur** du polygone, c'est-à-dire l'angle dont le lutin doit tourner à chaque sommet. La somme des angles extérieurs d'un polygone régulier vaut toujours 360° , donc l'angle de rotation est $\frac{360}{n}$ où n est le nombre de côtés.

Attention : L'angle intérieur d'un hexagone régulier vaut 120° , mais il ne faut pas utiliser cette valeur dans le bloc. C'est l'angle de rotation 60° qui trace la figure.

On conserve « avancer de 50 » car les côtés doivent mesurer 50 pixels.

3.a Pour réaliser une figure plus complexe, on utilise le programme ci-dessous où le « Bloc A » représente un motif.



Quelle transformation géométrique permet de passer d'un motif au suivant ? Préciser les éléments caractéristiques.

Corrigé

Le Bloc A trace un motif, puis le lutin revient à son point de départ, le point de coordonnées (0 ; 0), avec la même orientation. L'instruction « tourner $\curvearrowright$ de 60 degrés » fait pivoter le lutin de 60° autour de ce point avant de tracer le motif suivant. On passe donc d'un motif au suivant par la **rotation de centre le point (0 ; 0), d'angle 60° , dans le sens inverse des aiguilles d'une montre**.

Pour comprendre en détail

Le Bloc A trace un pentagone régulier : il avance de 50 puis tourne de 72° cinq fois, soit un total de $5 \times 72^\circ = 360^\circ$. Le lutin revient donc exactement à son point de départ avec son orientation initiale.

Comme le programme principal place le lutin en $(0;0)$ avant d'écrire, c'est ce point qui est le centre de la rotation.

Le sens « $\curvearrowright$ » correspond au sens inverse des aiguilles d'une montre, c'est-à-dire le sens trigonométrique.

Une erreur fréquente est d'oublier de préciser le sens de la rotation ou de confondre cette transformation avec une symétrie axiale.

Enfin, comme $6 \times 60^\circ = 360^\circ$, les six motifs se répartissent régulièrement autour du point $(0;0)$.

3.b Combien de motifs « Bloc A » composent cette figure ?

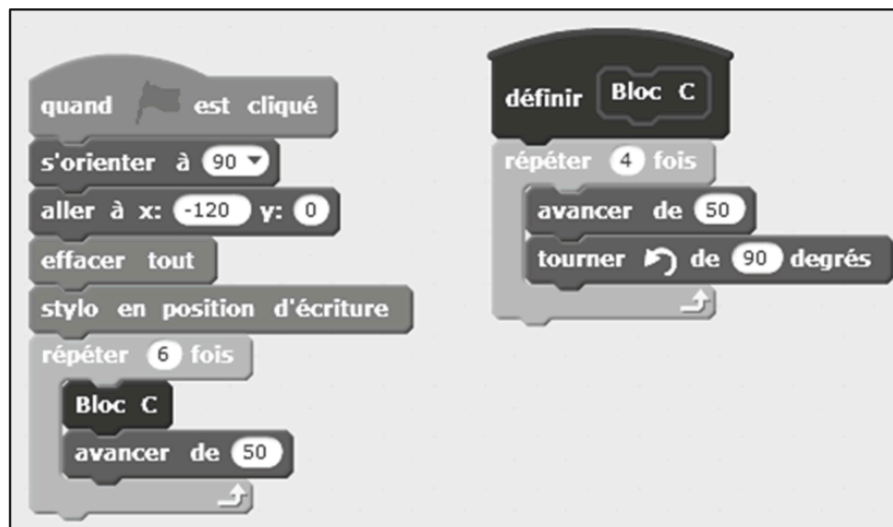
Corrigé

Le programme principal est : « répéter 6 fois : Bloc A, tourner $\curvearrowright$ de 60 degrés ». À chaque passage dans cette boucle, un motif « Bloc A » est tracé. La boucle se répétant 6 fois, la figure est composée de **6 motifs**. On peut vérifier que $6 \times 60^\circ = 360^\circ$: la figure se referme sur elle-même.

Pour comprendre en détail

Attention : Ne pas confondre le nombre de motifs avec le nombre de côtés du pentagone. La boucle interne du « Bloc A » (« répéter 5 fois ») trace les 5 côtés d'un motif ; c'est la boucle principale « répéter 6 fois » qui donne le nombre de motifs. Une erreur fréquente est de répondre 5 ou $5 \times 6 = 30$.

4 On entre le script donné ci-dessous.



Dessiner la figure obtenue en choisissant comme échelle 1 cm pour 20 pixels.

Corrigé

Le Bloc C trace un carré de côté 50 pixels, soit **2,5 cm** à l'échelle **1 cm pour 20 pixels**. Parti du point de coordonnées **(-120 ; 0)** et orienté vers la droite, le lutin trace un carré puis revient à son point de départ avec la même orientation. L'instruction « avancer de 50 » le déplace ensuite de **2,5 cm** vers la droite, au point de départ du carré suivant. Cette répétition étant effectuée 6 fois, on obtient 6 carrés de **2,5 cm** de côté, alignés et adjacents, situés au-dessus de la droite de départ. Les extrémités de la figure sont $x = -120$ px (**-6 cm**) et $x = 180$ px (**9 cm**). La figure finale est donc un rectangle de $6 \times 2,5 \text{ cm} = 15 \text{ cm}$ de long sur **2,5 cm** de large, partagé en 6 carrés.

Pour comprendre en détail

Le Bloc C est un motif fermé : les quatre rotations de **90°** totalisent **360°**, donc le lutin retrouve son orientation initiale après chaque carré. L'instruction « avancer de 50 » qui suit trace le côté bas du carré suivant ; ce segment est ensuite retracé par le premier côté du Bloc C suivant. Les carrés sont donc collés, sans espace entre eux.

Attention : le segment « avancer de 50 » ne crée pas d'espace entre les carrés ; il place le lutin au départ du carré suivant et retrace un segment qui se confond avec le côté bas de ce carré.

Pour vérifier, on peut suivre les abscisses des points de départ des carrés : **-120, -70, -20, 30, 80, 130** pixels ; le tracé s'arrête à $x = 180$ pixels.

Exercice 5

- 1 On lance trois fois une pièce non truquée. On obtient trois fois pile. Affirmation 1 : « La probabilité d'obtenir face au quatrième lancer est 0,5. »

Corrigé

Les lancers successifs d'une pièce non truquée sont indépendants : le résultat du quatrième lancer ne dépend pas des trois premiers résultats.

La pièce étant non truquée, la probabilité d'obtenir face au quatrième lancer est $P(\text{face}) = \frac{1}{2} = 0,5$.

Donc l'affirmation 1 est vraie.

Pour comprendre en détail

Attention : Il ne faut pas croire qu'après trois « pile » la probabilité d'obtenir « face » augmente (erreur dite du parieur) : la pièce n'a pas de mémoire et chaque lancer est indépendant. On ne doit pas non plus confondre cette probabilité avec celle d'obtenir quatre « pile » consécutifs, qui est $\frac{1}{16}$, car les trois premiers résultats sont déjà réalisés et ne conditionnent pas le quatrième lancer.

- 2 On dispose de deux urnes. Dans chacune d'entre elles, il y a trois boules rouges et une boule verte ; ces boules sont indiscernables au toucher. On tire une boule dans une urne et une boule dans une autre. Affirmation 2 : « La probabilité d'obtenir deux boules vertes est $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ soit $\frac{1}{2}$. »

Corrigé

Dans chaque urne, la probabilité de tirer une boule verte est $\frac{1}{4}$.

Les deux tirages sont indépendants car ils sont effectués dans deux urnes différentes.

La probabilité d'obtenir deux boules vertes est donc :

$$P(V \text{ et } V) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

Sur un arbre pondéré, une seule branche correspond à « verte dans la première urne et verte dans la seconde ». L'affirmation qui additionne les probabilités est fausse.

Pour comprendre en détail

À retenir : Si deux événements A et B sont indépendants, alors $P(A \text{ et } B) = P(A) \times P(B)$.

Attention : L'addition des probabilités est utilisée pour des événements incompatibles dont on cherche la probabilité de l'un *ou* de l'autre, pas pour des événements qui doivent se produire *en même temps*.

On peut aussi raisonner en dénombrant les issues : il y a **4** choix possibles dans chaque urne, donc $4 \times 4 = 16$ issues équiprobables au total ; une seule issue donne deux boules vertes.

3 On lance deux dés équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6 et on fait la somme des nombres obtenus sur les faces supérieures. Affirmation 3 : « La probabilité d'obtenir 3 est égale à celle d'obtenir 2. »

Corrigé

Il y a $6 \times 6 = 36$ couples de résultats possibles, tous équiprobables.

- Pour obtenir une somme de 2, une seule issue : $(1 ; 1)$, donc $P(\text{somme } 2) = \frac{1}{36}$.
- Pour obtenir une somme de 3, deux issues : $(1 ; 2)$ et $(2 ; 1)$, donc $P(\text{somme } 3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Or $\frac{1}{36} \neq \frac{1}{18}$, donc l'affirmation 3 est **fausse**.

Pour comprendre en détail

À retenir : Avec deux dés équilibrés, les **36** couples $(a ; b)$ sont équiprobables, même si les sommes ne le sont pas.

Attention : Ne pas compter $(1 ; 2)$ et $(2 ; 1)$ comme une seule issue : les dés sont distincts, donc l'ordre compte.

Autre méthode : un tableau à double entrée 6×6 permet de visualiser les **36** cases et de compter directement les cases favorables.