

ANNALES CRPE · MATHÉMATIQUES · 2021

Corrigé détaillé

CRPE 2021 – Mathématiques – Groupement 3

Épreuve écrite disciplinaire de mathématiques (2e épreuve d'admissibilité)

Durée : 4 heures

26 points

Exercice 1

13 points

Exercice 2

Exercice 3

Exercice 4

Pour chaque question : **rappel de l'énoncé**, **corrigé** rédigé, puis « **Pour comprendre en détail** » (méthode, rappels de cours, erreurs fréquentes). À utiliser avec le sujet officiel (documents, tableaux et figures).

Sujet : Ministère de l'Éducation nationale – session 2021 (PE2–21–G3). Corrigé rédigé par Campus XYZ – campusxyz.fr. Tous droits réservés.

Exercice 1 (13 points)

Partie A : choix du château d'eau

A.1 Afin de faire un choix esthétique parmi trois modèles proposés, le maire décide de consulter ses concitoyens. Chaque foyer peut voter une fois, tous les foyers ont voté. Voici les résultats de la consultation :

Types de château d'eau	Modèle A	Modèle B	Modèle C
Nombre de foyers	12	60	18

Calculer la proportion, en pourcentage, de voix recueillies parmi les foyers de ce hameau pour chacun des trois modèles proposés. Les pourcentages seront arrondis à l'unité de pourcentage.

Corrigé

Le nombre total de foyers ayant voté est $12 + 60 + 18 = 90$.

- Modèle A : $\frac{12}{90} \times 100 \approx 13,3$, soit environ **13 %**.
- Modèle B : $\frac{60}{90} \times 100 \approx 66,7$, soit environ **67 %**.
- Modèle C : $\frac{18}{90} \times 100 = 20$, soit **20 %**.

Les proportions de voix sont donc : modèle A **13 %**, modèle B **67 %** et modèle C **20 %**.

Pour comprendre en détail

À retenir : Une proportion en pourcentage se calcule avec $\frac{\text{effectif partiel}}{\text{effectif total}} \times 100$.

Attention : L'arrondi à l'unité exige d'observer le chiffre des dixièmes : **13,3** donne 13, **66,7** donne 67.

A.2.a Pour sélectionner le réservoir au volume le plus adapté, le maire décide d'étudier la consommation annuelle d'eau des foyers du hameau et observe qu'en 2019 elle était égale à **10 500 m³**. Montrer que la consommation moyenne annuelle d'eau par foyer est d'environ **116,67 m³**.

Corrigé

D'après la question A.1, le nombre total de foyers est $12 + 60 + 18 = 90$.

La consommation moyenne annuelle par foyer est le quotient de la consommation totale par le nombre total de foyers :

$$\frac{10\,500}{90} = 116,666 \dots \approx 116,67.$$

La consommation moyenne annuelle d'eau par foyer est d'environ **116,67 m³**.

Pour comprendre en détail

Cette question s'appuie sur la question A.1 : le nombre total de foyers est $12 + 60 + 18 = 90$.

À retenir : La moyenne d'une série statistique se calcule en divisant la somme des valeurs par l'effectif total.

Attention : Le nombre total de foyers n'est pas **60** (effectif du modèle B) mais la somme des trois effectifs : $12 + 60 + 18 = 90$.

La valeur exacte $\frac{10\,500}{90} = \frac{350}{3}$ a une écriture décimale illimitée, donc l'énoncé demande une valeur approchée. Pour arrondir **116,666...** au centième, on regarde le chiffre des millièmes (6) et on arrondit au centième supérieur, d'où **116,67**.

Une vérification rapide : $116,67 \times 90 = 10\,500,3$, cohérent avec l'arrondi demandé.

A.2.b *Sachant qu'un lotissement de 17 logements va être bientôt terminé, le maire décide d'intégrer ces logements à son étude en attribuant à chacun d'entre eux la consommation annuelle d'eau moyenne par foyer du hameau. Calculer la consommation annuelle estimée du hameau intégrant les nouveaux logements. On donnera le résultat en mètre cube, arrondi à l'unité.*

Corrigé

Le hameau compte $12 + 60 + 18 = 90$ foyers. D'après la question A.2.a, la consommation moyenne annuelle par foyer est d'environ **116,67 m³**.

Pour les 17 nouveaux logements, la consommation estimée est : $17 \times 116,67 = 1\,983,39 \text{ m}^3$.

La consommation annuelle totale estimée est donc : $10\,500 + 1\,983,39 = 12\,483,39 \text{ m}^3$, soit, arrondie à l'unité, **12 483 m³**.

La consommation annuelle estimée du hameau intégrant les nouveaux logements est d'environ **12 483 m³**.

Pour comprendre en détail

Attention : Arrondir un résultat intermédiaire peut modifier l'arrondi final. Si l'on calcule directement avec **107** foyers ($90 + 17$) et la moyenne arrondie **116,67**, on obtient $107 \times 116,67 = 12\,483,69$, ce qui arrondi à l'unité donne **12 484 m³**. L'énoncé retient **12 483 m³** car il additionne **10 500** et l'arrondi au dixième **1 983,3** avant d'arrondir **12 483,3** à l'unité ; c'est une petite ambiguïté due à l'utilisation de la valeur moyenne arrondie. En pratique, on privilégie de ne pas arrondir les calculs intermédiaires.

A.3.a *Suite à son enquête et aux conseils d'un bureau d'étude, le maire souhaite choisir un réservoir pouvant contenir au minimum la consommation moyenne de 5 jours du hameau intégrant les nouveaux logements. Déterminer la consommation moyenne en 5 jours de l'ensemble des foyers du hameau intégrant les nouveaux logements.*

Corrigé

D'après la question précédente, la consommation annuelle estimée du hameau intégrant les nouveaux logements est **12 483,4 m³**.

En supposant une consommation quotidienne constante sur l'année de 365 jours, la consommation moyenne sur 5 jours est :

$$12\,483\,4 \times \frac{5}{365} \approx 171\,0$$

La consommation moyenne en 5 jours est donc d'environ **171 m³**.

Pour comprendre en détail

À retenir : Pour passer d'une grandeur annuelle à une grandeur sur n jours, on multiplie par $\frac{n}{365}$ lorsque la consommation est supposée uniforme sur l'année.

Attention : Il est préférable de conserver une valeur non arrondie de la consommation annuelle avant de faire le calcul afin de limiter les erreurs d'arrondi. Ici, **12 483,4 m³** est la valeur non arrondie à l'unité issue de la question A.2.b.

On peut aussi raisonner en calculant d'abord la consommation d'un jour puis en multipliant par 5.

A.3.b Une entreprise propose de construire un réservoir ayant la forme d'une sphère de 7 mètres de diamètre. Déterminer le volume de ce réservoir. On donnera l'arrondi du volume au mètre cube. On rappelle que le volume V d'une boule de rayon r est donné par $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Corrigé

Le diamètre de la sphère est **7 m**, donc le rayon est $r = \frac{7}{2} = 3,5$ m.

Le volume du réservoir est donné par :

$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 3,5^3.$$

Or $3,5^3 = 42,875$, donc :

$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times 42,875 \approx 179,59 \text{ m}^3.$$

Arrondi au mètre cube, le volume du réservoir est de **180 m³**.

Pour comprendre en détail

À retenir : Une sphère de diamètre d a pour rayon $r = \frac{d}{2}$.

Attention : Ne pas utiliser le diamètre comme rayon dans la formule ; remplacer r par **7** au lieu de **3,5** est une erreur fréquente.

On utilise ici la formule du volume d'une boule, pas celle de l'aire d'une sphère. Pour arrondir à l'unité, on regarde la première décimale : **179,59** est plus proche de **180** que de **179**.

A.3.c Ce réservoir répond-il aux souhaits du maire ?

Corrigé

La consommation moyenne en 5 jours est 171 m^3 (question A.3.a).

Le volume du réservoir sphérique est 180 m^3 (question A.3.b).

Comparons ces deux volumes : $180 > 171$.

Le réservoir peut donc contenir davantage que la consommation moyenne de 5 jours : **oui, ce réservoir répond aux souhaits du maire.**

Pour comprendre en détail

À retenir : Pour comparer une contenance et un besoin, les deux grandeurs doivent être exprimées dans la même unité (ici le m^3).

Attention : Le volume du réservoir est un arrondi au m^3 . Ici, l'écart avec 171 m^3 est suffisamment grand pour que la conclusion reste valable même avec la valeur exacte (environ $179,6 \text{ m}^3$).

La condition posée par le maire était « au minimum », donc un volume supérieur ou égal convenait ; ici il est strictement supérieur.

A.4 On considère que le réservoir choisi contient 180 m^3 d'eau. Le débit de la pompe qui permet de le remplir est de $40 \text{ m}^3/\text{h}$. Déterminer le temps nécessaire pour remplir ce réservoir aux trois quarts. Donner la réponse en heure, minute et seconde.

Corrigé

Le volume à remplir est : $V = \frac{3}{4} \times 180 = 135 \text{ m}^3$.

Le débit est $Q = 40 \text{ m}^3/\text{h}$, donc le temps nécessaire est :

$$t = \frac{V}{Q} = \frac{135}{40} = 3,375 \text{ h.}$$

On convertit la partie décimale : $0,375 \text{ h} = 0,375 \times 60 \text{ min} = 22,5 \text{ min}$.

Ensuite, $0,5 \text{ min} = 30 \text{ s}$, donc $22,5 \text{ min} = 22 \text{ min } 30 \text{ s}$.

Le temps nécessaire pour remplir le réservoir aux trois quarts est donc **3 h 22 min 30 s**.

Pour comprendre en détail

Le débit Q est le volume versé par unité de temps, donc $Q = \frac{V}{t}$, ce qui donne $t = \frac{V}{Q}$ lorsque le débit est constant.

On peut vérifier le résultat en multipliant le débit par le temps trouvé : on doit retrouver le volume à remplir.

Attention : une durée écrite sous forme décimale en heures ne se convertit pas en minutes en remplaçant la virgule par des minutes. Il faut multiplier la partie décimale par 60 pour obtenir des minutes, puis la partie décimale des minutes par 60 pour obtenir des secondes.

Partie B : nuisances et impact paysager

B.1.a Pour éviter toute polémique quant au lieu d'implantation du projet, le maire décide d'installer le château à égale distance des trois habitations les plus proches. Pour expliciter ce choix aux habitants, il souhaite représenter la situation par un tracé géométrique. Il désigne par les points H_1 , H_2 et H_3 les trois habitations. On sait que les distances entre les habitations sont $H_1H_2 = 1 \text{ km}$, $H_2H_3 = 820 \text{ m}$ et $H_1H_3 = 730 \text{ m}$. Représenter la situation à l'échelle $1/10\,000$.

Corrigé

À l'échelle $\frac{1}{10\,000}$, 1 cm sur le plan représente $10\,000 \text{ cm} = 100 \text{ m}$.

On convertit donc les distances réelles :

- $H_1H_2 = 1\,000 \text{ m} \rightarrow 10 \text{ cm}$
- $H_2H_3 = 820 \text{ m} \rightarrow 8,2 \text{ cm}$
- $H_1H_3 = 730 \text{ m} \rightarrow 7,3 \text{ cm}$

Construction : on trace un segment $[H_1H_2]$ de 10 cm . Puis on trace un arc de cercle de centre H_1 de rayon $7,3 \text{ cm}$ et un arc de cercle de centre H_2 de rayon $8,2 \text{ cm}$. Le point H_3 est à l'intersection de ces deux arcs. On obtient ainsi le triangle $H_1H_2H_3$ représentant les trois habitations à l'échelle demandée.

Pour comprendre en détail

L'échelle $\frac{1}{10\,000}$ signifie que les longueurs sur le plan sont $10\,000$ fois plus petites que dans la réalité. Comme $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$, une distance réelle de 100 m correspond à 1 cm sur le plan ; il est donc commode de diviser les distances réelles en mètres par 100 pour obtenir les longueurs en cm sur le dessin.

Attention : une erreur fréquente est de croire que 1 km correspond à 1 cm sur le plan. Or $1 \text{ km} = 100\,000 \text{ cm}$, donc à l'échelle $\frac{1}{10\,000}$, cela donne bien 10 cm , et non 1 cm .

La construction au compas est possible car l'inégalité triangulaire est vérifiée : $7,3 + 8,2 > 10$. Le point H_3 peut être placé d'un côté ou de l'autre du segment $[H_1H_2]$; l'énoncé ne précisant pas de position, ce choix est libre.

B.1.b Placer le point C , tel qu'il soit à égale distance des trois points représentant les habitations. On veillera à laisser les traits de construction et on justifiera le tracé sur la copie.

Corrigé

Le point équidistant des trois sommets du triangle $H_1H_2H_3$ est le centre de son cercle circonscrit, c'est-à-dire l'intersection des médiatrices de ses côtés.

Construction :

- Tracer la médiatrice du segment $[H_1H_2]$: tracer deux arcs de cercle de même rayon, l'un centré en H_1 , l'autre en H_2 , de part et d'autre du segment ; relier leurs intersections.

- Tracer de même la médiatrice du segment $[H_2H_3]$ (ou $[H_1H_3]$).
- Les deux médiatrices se coupent en un point que l'on note C .

Justification : la médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants de ses extrémités. Comme C est sur la médiatrice de $[H_1H_2]$, on a $CH_1 = CH_2$. Comme C est sur la médiatrice de $[H_2H_3]$, on a $CH_2 = CH_3$. Donc $CH_1 = CH_2 = CH_3$, donc C est bien équidistant des trois habitations.

Pour comprendre en détail

À retenir : Les trois médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes en un point appelé centre du cercle circonscrit au triangle. Ce point est équidistant des trois sommets.

Attention : Ne pas confondre avec les bissectrices (centre du cercle inscrit), les médianes (centre de gravité) ou les hauteurs (orthocentre). Ici, il faut tracer les médiatrices et laisser les traits de construction apparents.

Pour vérifier, on peut tracer le cercle de centre C passant par H_1 : il doit également passer par H_2 et H_3 .

B.1.c En utilisant la figure construite, estimer la distance entre le château d'eau et chacune des 3 habitations.

Corrigé

Sur la figure, on mesure $CH'_1 = CH'_2 = CH'_3 \approx 5,1 \text{ cm}$ (on peut lire **5,08 cm**).

L'échelle $1/10\,000$ signifie que **1 cm** sur le plan représente **10 000 cm** dans la réalité, soit **100 m**.

La distance réelle cherchée est donc :

$$5,08 \times 100 = 508 \text{ m, soit environ } 510 \text{ m.}$$

Le château d'eau est donc situé à environ **510 m** de chacune des trois habitations.

Pour comprendre en détail

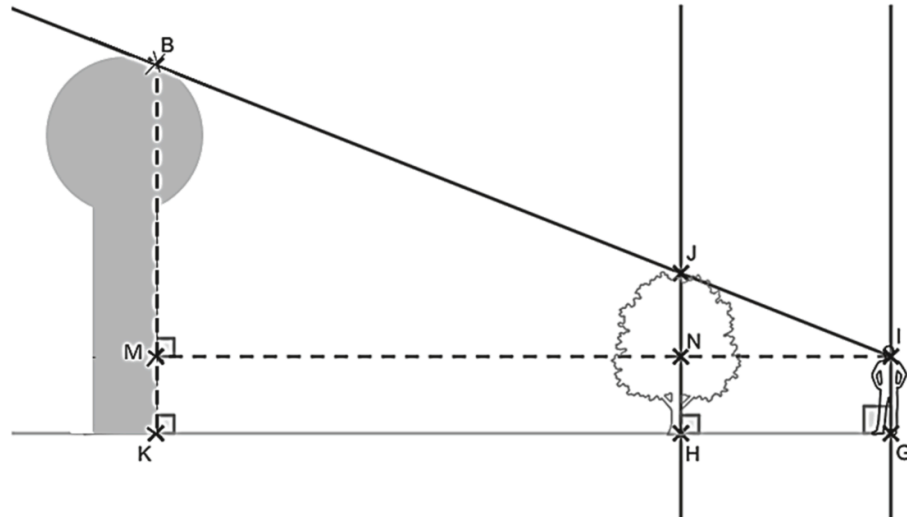
À retenir : Sur un plan à l'échelle $1/10\,000$, une longueur mesurée sur le plan en cm doit être multipliée par **10 000** pour obtenir la longueur réelle en cm, puis convertie en m en divisant par 100 ; cela revient à multiplier la mesure en cm par 100 pour obtenir des mètres.

Attention : Ne pas confondre l'échelle : **1 cm** représente **10 000 cm**, c'est-à-dire **100 m**, et non **10 000 m**.

La valeur **5,08 cm** dépend de la précision du tracé ; toute mesure proche de **5,1 cm** est acceptable, d'où un arrondi à **510 m**. Le point C étant le centre du cercle circonscrit au triangle formé par les trois habitations, les trois distances sont égales : c'est ce que vérifie la mesure graphique.

B.2 Afin de masquer la vue du château d'eau, un des habitants décide de planter une haie. Afin de choisir l'essence d'arbres à planter, il souhaite connaître la hauteur que devront atteindre ces arbres pour masquer la vue du château d'eau depuis sa terrasse. La figure ci-après, qui n'est pas à l'échelle, représente

la situation. Cet habitant est au point G sur sa terrasse, le château d'eau est implanté au point K et on a noté H le point où il souhaite planter une haie pour masquer le château d'eau. On connaît les dimensions suivantes : $KG = 510$ m, $GI = 1,80$ m et $HG = 20$ m. La hauteur KB est de 45 mètres. Le point I correspond à l'œil de l'homme et le point J correspond à la hauteur que doivent atteindre les arbres pour masquer la vue du château d'eau. Les points M et N sont situés à 1,80 m du sol. On a ainsi $MI = KG = 510$ m et $NI = HG = 20$ m.



Calculer la hauteur minimale HJ des arbres pour que cet habitant ne voie plus le château d'eau lorsqu'il se tient debout sur sa terrasse. On arrondira le résultat au centimètre.

Corrigé

Les points I, J, B sont alignés, les points I, N, M sont alignés et les droites (JN) et (BM) sont verticales, donc parallèles.

D'après le théorème de Thalès dans le triangle IBM :

$$\frac{JN}{BM} = \frac{IN}{IM}$$

Or :

$$BM = KB - KM = 45 - 1,80 = 43,2 \text{ m},$$

$$IN = HG = 20 \text{ m}, \quad \text{IM} = KG = 510 \text{ m}.$$

Donc :

$$JN = \frac{43,2 \times 20}{510} \approx 1,694 \text{ m}.$$

La hauteur de la haie est :

\[

$$HJ = HN + NJ = 1\text{ m} + 1\text{ m} \approx 3\text{ m}.$$

\]

La hauteur minimale des arbres est donc d'environ **3,49 m**, soit **349 cm**.

Pour comprendre en détail

À retenir : Dans une configuration de Thalès, on compare des longueurs sur les droites sécantes, après avoir identifié les côtés parallèles.

Attention : Ne pas utiliser **45 m** directement, car la ligne de visée part de l'œil situé à **1,80 m** du sol. On soustrait d'abord cette hauteur, puis on l'ajoute au résultat obtenu pour **JN**.

Le corrigé officiel comporte une coquille : il écrit parfois « 3,49 cm » ; il faut lire **3,49 m**, résultat arrondi au centimètre.

Partie C : entretien du château d'eau

C.1 *Le réservoir d'eau choisi a une contenance de 180 m^3 . L'ingénieur informe le maire que l'eau du château d'eau, bien que puisée dans une source, doit être chlorée. Il faut prévoir $0,1 \text{ mg}$ de chlore par litre d'eau. Déterminer la quantité de chlore, en gramme, à prévoir au minimum pour 180 m^3 d'eau.*

Corrigé

Le volume du réservoir est 180 m^3 . Or $1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ L}$, donc $180 \text{ m}^3 = 180\,000 \text{ L}$.

La quantité de chlore nécessaire est : $180\,000 \times 0,1 = 18\,000 \text{ mg}$.

Comme $1 \text{ g} = 1\,000 \text{ mg}$, on a $18\,000 \text{ mg} = 18 \text{ g}$.

Il faut donc prévoir au minimum **18 g** de chlore.

Pour comprendre en détail

Il s'agit d'une situation de proportionnalité : la masse de chlore est proportionnelle au volume d'eau. Le point de vigilance est la double conversion d'unités : convertir le volume en litres avant d'utiliser la donnée en mg/L , puis convertir la masse obtenue en grammes.

Attention : ne pas confondre $1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ L}$ avec $1 \text{ m}^3 = 100 \text{ L}$, et ne pas oublier que $1 \text{ g} = 1\,000 \text{ mg}$.

Autre méthode : convertir directement la concentration $0,1 \text{ mg/L}$ en $0,1 \text{ g/m}^3$, puis multiplier par le volume en m^3 .

C.2.a *Pour assurer l'entretien annuel de ce château d'eau, la commune sollicite deux entreprises. La société Qualiteau propose un forfait annuel de 700 € pour les déplacements puis toute intervention est facturée 350 €. La société Calmwater propose également un forfait annuel pour les déplacements au tarif de 500 € puis toute intervention est facturée 450 €. On note x le nombre d'interventions annuelles. Montrer que*

le montant annuel $Q(x)$ à payer à la société Qualiteau, en fonction de x , est donné par l'expression $Q(x) = 350x + 700$.

Corrigé

Le forfait annuel est de 700 €. Chaque intervention coûte 350 €, donc x interventions coûtent $350x$ €.

Le montant annuel à payer est donc : $Q(x) = 350x + 700$.

Pour comprendre en détail

$Q(x)$ est une fonction affine de la forme $Q(x) = ax + b$, où $b = 700$ est le coût fixe et $a = 350$ le coût variable par intervention.

On peut vérifier avec $x = 0$: sans intervention, on paie bien 700 € ; avec $x = 1$, on paie $350 \times 1 + 700 = 1050$ €.

Attention : il ne faut pas écrire $Q(x) = 700 + 350$ en oubliant que 350 doit être multiplié par x .

C.2.b Exprimer, en fonction de x , le montant annuel $C(x)$ à payer à la société Calmwater.

Corrigé

Le montant annuel à payer à la société Calmwater est composé d'un forfait de 500 € et de x interventions facturées 450 € chacune. On a donc $C(x) = 450 \times x + 500$, soit $C(x) = 450x + 500$.

Pour comprendre en détail

On retrouve une expression affine $C(x) = ax + b$, où b est le forfait fixe et a le tarif par intervention.

Attention : ne pas intervertir le forfait et le tarif par intervention. Ici $b = 500$ et $a = 450$.

On peut vérifier : pour 1 intervention, Calmwater coûte $500 + 450 = 950$ €.

C.2.c Dans un repère orthogonal, représenter graphiquement les fonctions Q et C . On prendra en abscisse 2 cm pour une intervention et en ordonnée 1 cm pour 200 €.

Corrigé

Les fonctions $Q(x) = 350x + 700$ et $C(x) = 450x + 500$ sont affines, donc leurs représentations graphiques sont des droites.

Pour Q : $Q(0) = 350 \times 0 + 700 = 700$; $Q(5) = 350 \times 5 + 700 = 2\,450$. Les points $(0 ; 700)$ et $(5 ; 2\,450)$ appartiennent à la droite de Q .

Pour C : $C(0) = 450 \times 0 + 500 = 500$; $C(5) = 450 \times 5 + 500 = 2\,750$. Les points $(0 ; 500)$ et $(5 ; 2\,750)$ appartiennent à la droite de C .

Sur le repère, en abscisse 2 cm représentent 1 intervention (donc $x = 5$ est à 10 cm de l'origine) ; en ordonnée 1 cm représente 200 € : 700 € correspond à 3,5 cm, 2 450 € à 12,25 cm, 500 € à 2,5 cm.

2,5 cm et 2 750 € à 13,75 cm. On place ces quatre points, on trace la droite passant par les deux points de Q , puis celle passant par les deux points de C .

Pour comprendre en détail

À retenir : La représentation graphique d'une fonction affine $f(x) = ax + b$ est une droite ; deux points suffisent pour la tracer.

Attention : Les deux axes n'ont pas la même unité : en abscisse, 1 intervention correspond à 2 cm, mais en ordonnée, 200 € correspondent à 1 cm. Une lecture directe des valeurs en euros comme des centimètres fausserait le tracé.

Les points choisis à $x = 0$ et $x = 5$ permettent de limiter les calculs et d'obtenir des points faciles à placer. On peut vérifier que les deux droites se coupent pour $x = 2$, ce qui correspond à l'égalité des coûts $350x + 700 = 450x + 500$, mais ce n'était pas demandé.

C.2.d À partir du graphique construit à la question 2.c., lire le nombre d'interventions annuelles pour lequel le montant de la facture sera le même pour les deux sociétés. Vérifier le résultat trouvé par un calcul.

Corrigé

Graphiquement, les droites se coupent au point d'abscisse 2 (ordonnée 1 400 €).

Vérification :

$C(x) = Q(x)$ équivaut à $450x + 500 = 350x + 700$, soit $100x = 200$, donc $x = 2$.

Pour 2 interventions annuelles, les deux sociétés facturent le même montant, à savoir 1 400 €.

Pour comprendre en détail

Le point d'intersection de deux droites représentant des fonctions affines correspond à la valeur de x pour laquelle les deux fonctions prennent la même valeur. Ici, l'abscisse est un nombre d'interventions et l'ordonnée un montant en euros.

Attention : sur un graphique, on lit parfois l'ordonnée au lieu de l'abscisse ; vérifier l'unité demandée (nombre d'interventions).

Le calcul exact permet de confirmer la lecture graphique et de lever toute ambiguïté.

C.2.e Quelle société devient alors la plus avantageuse pour la commune pour un nombre supérieur d'interventions ?

Corrigé

Le point d'intersection des deux droites a pour abscisse 2. Pour $x > 2$, la droite représentant $Q(x) = 350x + 700$ est en dessous de celle représentant $C(x) = 450x + 500$, car sa pente 350 est inférieure à la pente 450. On a donc $Q(x) < C(x)$. Par conséquent, pour un nombre d'interventions supérieur à 2, la société Qualiteau est la plus avantageuse.

Pour comprendre en détail

À retenir : Pour deux fonctions affines $f(x) = ax + b$ et $g(x) = a'x + b'$, si $a < a'$

Attention : Le forfait initial de Qualiteau (700 €) est plus élevé que celui de Calmwater (500 €), mais cela ne rend pas Qualiteau plus chère pour un grand nombre d'interventions : c'est le coût par intervention qui détermine la tendance à long terme.

Une vérification rapide pour $x = 3$ interventions : $Q(3) = 1750$ € et $C(3) = 1850$ €, donc Qualiteau est bien moins chère.

C.3.a Une troisième entreprise, la société Bellacqua, vient de s'implanter dans la région. Elle ne facture aucun déplacement mais propose un tarif par intervention de 550 €. Exprimer, en fonction de x , le montant annuel $B(x)$ à payer à la société Bellacqua.

Corrigé

La société Bellacqua ne facture aucun déplacement, donc il n'y a pas de coût fixe.

Chaque intervention coûte 550 €.

Pour x interventions, le montant annuel est :

$$B(x) = 550 \times x$$

soit $B(x) = 550x$.

Ainsi, le montant annuel à payer à la société Bellacqua est $B(x) = 550x$.

Pour comprendre en détail

La fonction B est une **fonction linéaire** de coefficient 550 ; sa représentation graphique passe par l'origine, contrairement aux fonctions Q et C qui comportent un coût fixe.

Attention : Ne pas ajouter de forfait de déplacement : l'énoncé précise que la société Bellacqua n'en facture aucun.

C.3.b Dans le repère orthogonal construit à la question 2.c., représenter graphiquement le tarif de la société Bellacqua en fonction du nombre x d'interventions.

Corrigé

$B(x) = 550x$ est une fonction linéaire ; sa représentation graphique est une droite passant par l'origine.

On place donc le point $(0; 0)$.

On choisit par exemple $x = 5$ interventions :

$$B(5) = 550 \times 5 = 2\,750 \text{ €}.$$

Avec l'échelle : 5 interventions correspondent à 10 cm en abscisse, et 2 750 € correspondent à 13,75 cm en ordonnée (car 1 cm représente 200 €).

On place le point $(5; 2\,750)$ puis on trace la droite reliant ce point à l'origine.

Pour comprendre en détail

À retenir : Une fonction linéaire $x \mapsto ax$ est représentée par une droite passant par l'origine du repère.

Le point $(5 ; 2\,750)$ est souvent plus pratique que $(1 ; 550)$ car les distances à reporter sur le graphique sont plus grandes, donc plus précises : son abscisse vaut 10 cm et son ordonnée **13,75** cm.

Attention : Ne pas relier les points de la droite uniquement entre 0 et 5 interventions : la droite doit être prolongée sur l'ensemble du repère pour représenter la fonction pour toutes les valeurs positives de x .

C.3.c La commune souhaiterait faire travailler la société Bellacqua. Lire sur le graphique le nombre maximum d'interventions pour lequel le prix à payer sera plus intéressant que celui des deux autres sociétés. Justifier la démarche.

Corrigé

Sur le graphique, la droite représentant $B(x) = 550x$ coupe celle de $Q(x) = 350x + 700$ au point d'abscisse $x = 3,5$, puis celle de $C(x) = 450x + 500$ au point d'abscisse $x = 5$.

Bellacqua est plus intéressante lorsque sa droite est *en dessous* des deux autres, c'est-à-dire lorsque son tarif est inférieur à celui de Qualiteau et à celui de Calmwater.

- Avec Qualiteau : $550x < 350x + 700$, donc $200x < 700$, soit $x < 3,5$.
- Avec Calmwater : $550x < 450x + 500$, donc $100x < 500$, soit $x < 5$.

Il faut donc avoir à la fois $x < 3,5$ et $x < 5$, c'est-à-dire $x < 3,5$. Le nombre d'interventions étant un nombre entier, la commune peut prévoir au maximum **3 interventions par an** pour que Bellacqua soit la plus intéressante.

Pour comprendre en détail

Comparer deux tarifs revient à comparer les ordonnées des droites pour une même abscisse x . La droite B a une pente de 550, plus forte que celles de Q (350) et C (450) : elle démarre plus bas mais rattrape ensuite les autres. La contrainte la plus sévère est donc l'intersection avec la droite Q , qui impose $x < 3,5$.

Attention : On lit parfois $x = 5$ avec Calmwater, mais cela ne suffit pas car Bellacqua est déjà plus chère que Qualiteau entre 3,5 et 5 interventions. Il faut bien retenir la plus petite des deux bornes.

On peut vérifier en calculant les tarifs pour $x = 3$ et $x = 4$: pour 3 interventions, $B(3) = 1\,650$ €, $Q(3) = 1\,750$ € et $C(3) = 1\,850$ € ; pour 4 interventions, $B(4) = 2\,200$ € alors que $Q(4) = 2\,100$ €, donc Bellacqua n'est plus la moins chère.

Exercice 2

1 Vérifier qu'en prenant 5 comme nombre de départ, on obtient 20.

Corrigé

Le nombre entier qui suit 5 est 6, donc $C_1 = 6^2 = 36$.

Le nombre entier qui précède 5 est 4, donc $C_2 = 4^2 = 16$.

La différence vaut $C_1 - C_2 = 36 - 16 = 20$.

En prenant 5 comme nombre de départ, on obtient bien 20.

Pour comprendre en détail

À retenir : Pour un nombre entier n , le programme calcule $(n+1)^2 - (n-1)^2$. En utilisant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, cette expression se simplifie en $4n$. Cela explique pourquoi le résultat est toujours un multiple de 4.

Une erreur fréquente est de soustraire les carrés dans le mauvais ordre ou de calculer le carré de la différence ; ici, il faut d'abord calculer chaque carré puis soustraire.

2 On appelle x le nombre de départ, montrer que le résultat obtenu est égal à $4x$.

Corrigé

Soit x le nombre de départ. Le nombre entier qui suit x est $x+1$, celui qui le précède est $x-1$.

Le résultat obtenu est donc :

$$(x+1)^2 - (x-1)^2 = (x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 2x + 1) = x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 = 4x.$$

Le résultat obtenu est donc bien égal à $4x$.

Pour comprendre en détail

À retenir : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ et $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

La méthode par développement est naturelle. La méthode par différence de deux carrés est plus rapide : en posant $a = x+1$ et $b = x-1$, on a $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = 2 \times 2x = 4x$.

Attention : ne pas écrire $(x-1)^2 = x^2 - 1$: le double produit est $-2x$. De plus, lors de la soustraction, on doit soustraire toute l'expression $(x^2 - 2x + 1)$, donc changer les signes.

Le résultat est vrai pour tout nombre x , pas seulement pour un entier positif. La question 1 permet de le vérifier avec $x = 5 : 4 \times 5 = 20$.

3 Est-il possible d'obtenir 842 ? Si oui, donner le nombre de départ. Sinon, expliquer pourquoi.

Corrigé

D'après la question 2, le résultat obtenu pour un nombre de départ x est $4x$.

Pour obtenir 842, il faudrait donc que $4x = 842$, soit $x = \frac{842}{4} = 210,5$.

Or le nombre de départ doit être un nombre entier positif ; 210,5 n'est pas un entier. De plus, $842 = 4 \times 210 + 2$, donc 842 n'est pas un multiple de 4.

Conclusion : il n'est pas possible d'obtenir 842.

Pour comprendre en détail

À retenir : Un nombre entier est divisible par 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4. Ici, 42 n'est pas divisible par 4, donc 842 non plus.

La question précédente montre que tout résultat est de la forme $4x$: c'est donc toujours un multiple de 4. Vérifier qu'un nombre est atteignable revient à vérifier qu'il est un multiple de 4 et que le quotient est un entier positif.

Attention : Résoudre $4x = 842$ donne $x = 210,5$, mais le nombre de départ doit être un nombre entier positif. Une solution décimale ne convient donc pas.

4 Déterminer le nombre de départ pour que le programme ait comme résultat 2^{98} . On justifiera la réponse.

Corrigé

D'après la question 2, pour un nombre de départ x , le programme donne $4x$.

On veut donc $4x = 2^{98}$.

Or $4 = 2^2$, donc $2^2 \times x = 2^{98}$.

D'où $x = \frac{2^{98}}{2^2} = 2^{98-2} = 2^{96}$.

2^{96} est bien un nombre entier positif.

Le nombre de départ cherché est donc 2^{96} .

Pour comprendre en détail

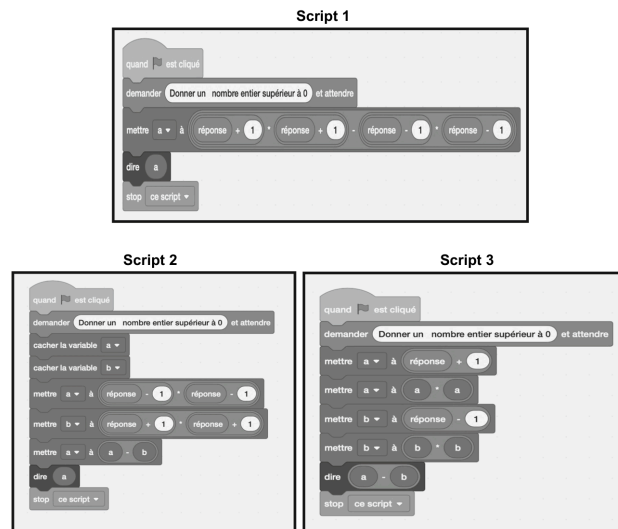
La question s'appuie sur le résultat général établi à la question 2 : le programme renvoie toujours $4x$. Chercher x tel que le résultat soit 2^{98} revient donc à résoudre une équation simple, en utilisant les règles de calcul sur les puissances.

À retenir : Pour diviser deux puissances d'un même nombre, on soustrait les exposants : $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (avec $a \neq 0$). En particulier, $4 = 2^2$.

Attention : Le corrigé officiel de cette annale comporte une coquille : il écrit « 296 » au lieu de 2^{96} . La réponse exacte est bien 2^{96} , c'est-à-dire 2 multiplié par lui-même 96 fois, et non le nombre 296.

Pour vérifier, on peut remplacer x par 2^{96} : $4 \times 2^{96} = 2^2 \times 2^{96} = 2^{98}$, donc 2^{96} convient bien.

- 5 Parmi les trois captures d'écran issues du logiciel SCRATCH, donner, sans justifier, le(s) script(s) qui correspond(ent) au programme de calcul proposé.



Corrigé

Les scripts qui correspondent au programme de calcul sont les scripts 1 et 3.

Pour comprendre en détail

Attention : Le script 2 effectue la soustraction dans l'ordre inverse : il calcule $(x - 1)^2 - (x + 1)^2$, ce qui donne l'opposé du résultat attendu, soit $-4x$.

Le script 1 place directement la différence $(x + 1)^2 - (x - 1)^2$ dans la variable a . Le script 3 construit d'abord les deux carrés puis affiche leur différence $a - b$, ce qui correspond bien au programme.

Exercice 3

1.a Déterminer le nombre total de garçons dans cette classe.

Corrigé

$$40\% = \frac{40}{100} = 0,40.$$

Le nombre de garçons est donc $0,40 \times 30 = 12$.

Il y a 12 garçons dans cette classe.

Pour comprendre en détail

À retenir : Pour prendre $t\%$ d'une quantité N , on multiplie N par $\frac{t}{100}$.

On peut aussi remarquer que $40\% = \frac{2}{5}$ et donc prendre deux cinquièmes de l'effectif total.

Attention : Ne pas oublier de convertir le pourcentage en fraction ou en nombre décimal avant de multiplier, et ne pas soustraire 40 à l'effectif total.

On peut vérifier que le nombre trouvé, divisé par 30, redonne bien 0,40.

1.b Déterminer le nombre de garçons qui ne sont pas des enfants uniques.

Corrigé

La classe compte 30 élèves. 40 % des élèves sont des garçons, donc le nombre de garçons est $30 \times \frac{40}{100} = 12$.

Un tiers des garçons sont des enfants uniques, soit $12 \times \frac{1}{3} = 4$ garçons enfants uniques.

Les garçons qui ne sont pas des enfants uniques sont donc $12 - 4 = 8$.

Il y a **8 garçons** qui ne sont pas des enfants uniques.

Pour comprendre en détail

À retenir : Prendre une fraction $\frac{a}{b}$ d'une quantité revient à multiplier cette quantité par $\frac{a}{b}$.

Attention : Les pourcentages et fractions de l'énoncé se rapportent à des ensembles différents (garçons, enfants uniques). Ici, seule la fraction des garçons enfants uniques est utile ; le « 25 % des enfants uniques sont des garçons » n'intervient pas dans cette question.

Autre méthode : comme un tiers des garçons sont enfants uniques, les deux tiers restants ne le sont pas, donc on peut calculer directement $12 \times \frac{2}{3} = 8$.

1.c Reproduire, sur la copie, le tableau des effectifs de la classe ci-dessous puis le compléter.

	Fille	Garçon	Total
Enfant unique			
Enfant non unique			
Total			30

Corrigé

Les questions 1.a et 1.b donnent : 12 garçons au total, dont 8 sont non uniques, donc $12 - 8 = 4$ garçons sont enfants uniques.

Soit x le nombre total d'enfants uniques. Comme les garçons uniques représentent 25 % des enfants uniques, on a : $0,25 \times x = 4$, donc $x = 4 \div 0,25 = 16$. Il y a donc $16 - 4 = 12$ filles uniques.

Nombre total de filles : $30 - 12 = 18$. Filles non uniques : $18 - 12 = 6$.

Nombre total d'enfants non uniques : $30 - 16 = 14$ (soit $6 + 8 = 14$).

	Fille	Garçon	Total
Enfant unique	12	4	16
Enfant non unique	6	8	14
Total	18	12	30

Le tableau complété est celui présenté ci-dessus.

Pour comprendre en détail

À retenir : Dans un tableau d'effectifs à double entrée, on complète progressivement en utilisant les totaux par ligne et par colonne. Un pourcentage se traduit par une multiplication : $p\%$ d'une quantité N vaut $\frac{p}{100} \times N$.

Attention : Le pourcentage « 25 % des enfants uniques sont des garçons » porte sur l'ensemble des enfants uniques, pas sur les garçons ni sur toute la classe. Une confusion entre ces références peut fausser plusieurs cases du tableau.

Vérification utile : la somme des effectifs des deux lignes et la somme des filles et des garçons doivent toutes deux redonner 30.

- 2.a** On choisit au hasard un élève de cette classe. Calculer la probabilité que cet élève soit un enfant unique. On arrondira le résultat au centième.

Corrigé

Le choix se fait au hasard parmi les 30 élèves de la classe, donc on est en situation d'équiprobabilité sur les 30 élèves.

D'après le tableau complété, le nombre d'élèves enfants uniques est 16.

Ainsi :

$$P(\text{enfant unique}) = \frac{\text{nombre d'enfants uniques}}{\text{nombre total d'élèves}} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15} \approx 0,53.$$

La probabilité qu'un élève choisi au hasard soit un enfant unique est donc environ **0,53**, soit 53 %.

Pour comprendre en détail

À retenir : Lorsqu'un choix est fait au hasard parmi n issues équiprobables, la probabilité d'un événement est le quotient du nombre d'issues favorables par le nombre total d'issues.

Le nombre 16 utilisé ici provient du tableau complété : 8 filles uniques + 8 garçons uniques.

Attention : Il ne faut pas calculer la probabilité en combinant directement les pourcentages de l'énoncé (25 %, un tiers...) sans être certain de la population de référence. Le passage par le tableau des effectifs évite les confusions.

Pour l'arrondi au centième, on lit la troisième décimale : si elle est strictement inférieure à 5, on conserve la deuxième décimale (ici, c'est le cas).

- 2.b** Calculer la probabilité que cet élève soit un garçon n'ayant ni frère ni sœur. On arrondira le résultat au centième.

Corrigé

Le nombre total de garçons est $\frac{40}{100} \times 30 = 12$.

Un tiers des garçons sont des enfants uniques, donc le nombre de garçons enfants uniques est $\frac{1}{3} \times 12 = 4$.

La probabilité de choisir un garçon enfant unique est donc :

$$P = \frac{4}{30} = \frac{2}{15} \approx 0,13.$$

La probabilité demandée est $\frac{2}{15}$, soit environ **0,13**.

Pour comprendre en détail

À retenir : Lorsqu'on choisit un élève au hasard, la probabilité d'un événement est le quotient du nombre de cas favorables par le nombre total de cas possibles (équiprobabilité).

Attention : $\frac{2}{15} \approx 0,1333 \dots$; l'arrondi au centième est **0,13** (et non **0,14**), car le chiffre des millièmes est **3**, inférieur à 5.

On peut aussi lire directement dans le tableau complété : l'effectif de la case « Garçon » et « Enfant unique » est **4**, sur un total de **30**.

2.c On sait que l'élève choisi est une fille. Calculer la probabilité qu'elle soit une fille unique. On arrondira le résultat au centième.

Corrigé

D'après le tableau, la classe compte 18 filles et, parmi elles, 12 sont enfants uniques.

Les 18 filles étant équiprobables, la probabilité demandée est :

$$\frac{12}{18} = \frac{2}{3} \approx 0,67$$

La probabilité qu'une fille choisie soit enfant unique est donc environ **0,67**.

Pour comprendre en détail

L'information « l'élève choisi est une fille » restreint l'univers aux filles : il s'agit d'une probabilité conditionnelle.

Attention : diviser par l'effectif total de la classe (30) donnerait la probabilité d'obtenir une fille unique parmi tous les élèves, ce qui n'est pas demandé ici.

Pour l'arrondi, $\frac{2}{3} = 0,666 \dots$ s'arrondit en **0,67** au centième.

Exercice 4

- 1 *Définition : un nombre parfait est égal à la moitié de la somme de ses diviseurs. Par exemple, 6 est parfait car ses diviseurs sont 1, 2, 3 et 6 et on a : $1 + 2 + 3 + 6 = 12$ qui correspond au double de 6. Affirmation 1 : « 28 est un nombre parfait. »*

Corrigé

Décomposons $28 : 28 = 2^2 \times 7$. Ses diviseurs sont donc 1, 2, 4, 7, 14 et 28.

La somme des diviseurs est : $1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56$.

Or $2 \times 28 = 56$, donc 28 est bien égal à la moitié de la somme de ses diviseurs.

L'affirmation « 28 est un nombre parfait » est **vraie**.

Pour comprendre en détail

Pour lister sans en oublier, on peut chercher les paires de diviseurs dont le produit vaut 28 : 1×28 , 2×14 , 4×7 .

Attention : 1 et le nombre lui-même comptent parmi les diviseurs ; les oublier fausse la somme.

La définition équivaut à : la somme de tous les diviseurs est égale au double du nombre.

- 2 *Affirmation 2 : « Si un nombre est divisible par 6 et par 9 alors il est divisible par 54. »*

Corrigé

L'affirmation est fausse.

Contre-exemple : 18 est divisible par 6 car $18 = 6 \times 3$ et par 9 car $18 = 9 \times 2$. Or $18 < 54$, donc 18 n'est pas divisible par 54.

Remarque : $54 = 6 \times 9$, mais 6 et 9 ne sont pas premiers entre eux ; le plus petit multiple commun de 6 et 9 est 18, pas 54.

Donc l'affirmation « Si un nombre est divisible par 6 et par 9 alors il est divisible par 54 » est fausse.

Pour comprendre en détail

L'erreur fréquente est de multiplier les deux diviseurs : $54 = 6 \times 9$. Cette règle ne vaut que si les deux nombres sont premiers entre eux, or 6 et 9 ont 3 comme diviseur commun. Leur plus petit multiple commun est donc strictement inférieur à 54.

À retenir : Pour qu'un nombre soit divisible par un produit $a \times b$, il faut que a et b soient premiers entre eux ; sinon, on utilise le plus petit multiple commun.

Attention : « divisible par 6 et par 9 » ne signifie pas « divisible par 6×9 » lorsque les diviseurs ont un facteur commun.

- 3** On augmente la longueur d'un rectangle de 10 % et on diminue sa largeur de 10 %. Affirmation 3 : « L'aire du rectangle est inchangée. »

Corrigé

L'affirmation est fausse.

Notons L la longueur et l la largeur du rectangle. L'aire initiale est $L \times l$.

Augmenter la longueur de 10 % revient à la multiplier par 1,1.

Diminuer la largeur de 10 % revient à la multiplier par 0,9.

La nouvelle aire est donc :

\[

$$1\text{L} \times 0\text{l} = 0\text{99} \times L \times l$$

\]

L'aire a été multipliée par 0,99, ce qui correspond à une baisse de 1 % car $1 - 0,99 = 0,01 = 1\%$.

Par exemple, un rectangle de 30 cm par 20 cm a une aire de 600 cm² ; après les variations, il mesure 33 cm par 18 cm, soit 594 cm².

Donc l'aire du rectangle n'est pas inchangée.

Pour comprendre en détail

À retenir : Une hausse de $t\%$ correspond à multiplier par $1 + \frac{t}{100}$; une baisse de $t\%$ correspond à multiplier par $1 - \frac{t}{100}$. Pour des évolutions successives, on multiplie les coefficients multiplicateurs.

Attention : On ne peut pas additionner les pourcentages (+10% et -10%) car ils ne s'appliquent pas à la même grandeur : la hausse porte sur la longueur et la baisse sur la largeur. Le coefficient multiplicateur de l'aire est le produit $1,1 \times 0,9$, qui vaut 0,99, et non 1.

- 4** Un rectangle a une longueur de 5 cm et une largeur de 4 cm. On augmente la longueur de 10 % et on diminue la largeur de 10 %. Affirmation 4 : « Le périmètre du rectangle diminue. »

Corrigé

Augmenter de 10 % revient à multiplier par 1,1, diminuer de 10 % revient à multiplier par 0,9.

Périmètre initial : $2 \times (5 + 4) = 2 \times 9 = 18$ cm.

Nouvelle longueur : $5 \times 1,1 = 5,5$ cm.

Nouvelle largeur : $4 \times 0,9 = 3,6$ cm.

Nouveau périmètre : $2 \times (5,5 + 3,6) = 2 \times 9,1 = 18,2$ cm.

Comme $18,2 > 18$, le périmètre a augmenté.

L'affirmation 4 est fausse : le périmètre ne diminue pas, il augmente de 0,2 cm.

Pour comprendre en détail

À retenir : Augmenter une grandeur de $t\%$ revient à la multiplier par $1 + \frac{t}{100}$. La diminuer de $t\%$ revient à la multiplier par $1 - \frac{t}{100}$.

Attention : Les variations en pourcentage ne se compensent pas automatiquement sur le périmètre car elles portent sur des longueurs différentes : ici, 10% de 5 cm ($+0,5$ cm) et 10% de 4 cm ($-0,4$ cm) ne s'annulent pas.

Autre méthode : calculer directement les variations absolues. La longueur augmente de $5 \times 0,10 = 0,5$ cm, la largeur diminue de $4 \times 0,10 = 0,4$ cm. Le demi-périmètre varie donc de $+0,5 - 0,4 = +0,1$ cm, soit $+0,2$ cm pour le périmètre complet.