

ANNALES CRPE · MATHÉMATIQUES · 2021

Corrigé détaillé

CRPE 2021 – Mathématiques – Groupement 4

Épreuve écrite disciplinaire de mathématiques (2e épreuve d'admissibilité)

Durée : 4 heures

26 points

Exercice 1

13 points

Exercice 2

Exercice 3

Exercice 4

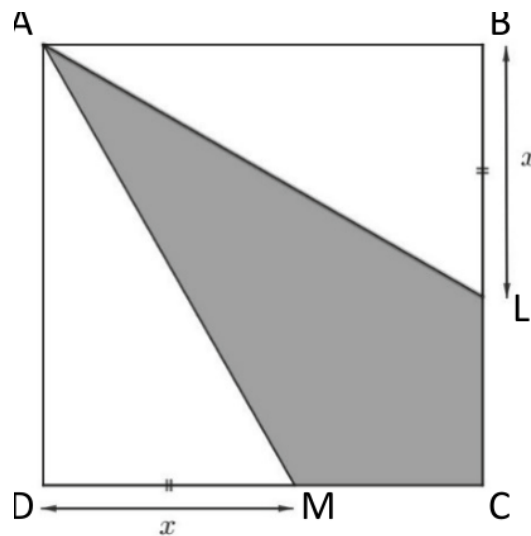
Pour chaque question : **rappel de l'énoncé**, **corrigé** rédigé, puis « **Pour comprendre en détail** » (méthode, rappels de cours, erreurs fréquentes). À utiliser avec le sujet officiel (documents, tableaux et figures).

Sujet : Ministère de l'Éducation nationale – session 2021 (PE2–21–G4). Corrigé rédigé par Campus XYZ – campusxyz.fr. Tous droits réservés.

Exercice 1 (13 points)

Partie A

A.1 Expliquer pourquoi $0 \leq x \leq 10$.



Corrigé

On a $x = BL$. Le point L appartient au segment $[BC]$, qui mesure 10 cm. Lorsque L est en B, $BL = 0$; lorsque L est en C, $BL = 10$. Pour toute autre position de L sur $[BC]$, la distance BL est comprise entre 0 et 10. Donc $0 \leq x \leq 10$.

Pour comprendre en détail

À retenir : Un point appartenant à un segment se trouve entre les deux extrémités, extrémités incluses. Sa distance à l'une des extrémités est donc comprise entre 0 et la longueur du segment.

Attention : Les inégalités sont larges ($\leq$) car L peut être exactement en B ou en C. On écrit bien $0 \leq x \leq 10$ et non $0 < x < 10$.

La condition $DM = x$ avec M sur $[DC]$, qui mesure aussi 10 cm, confirme que x ne peut pas dépasser 10.

A.2 Vérifier que si $x = 2$, alors l'aire du quadrilatère grisé AMCL est égale à 80 cm^2 .

Corrigé

Le carré ABCD a pour côté 10 cm, donc :

$$\text{Aire}(ABCD) = 10 \times 10 = 100 \text{ cm}^2.$$

Pour $x = 2$, on a $DM = BL = 2 \text{ cm}$.

Le triangle ADM est rectangle en D, donc :

$$\text{Aire}(ADM) = \frac{1}{2} \times AD \times DM = \frac{1}{2} \times 10 \times 2 = 10 \text{ cm}^2.$$

Le triangle ABL est rectangle en B, donc :

$$\text{Aire}(ABL) = \frac{1}{2} \times AB \times BL = \frac{1}{2} \times 10 \times 2 = 10 \text{ cm}^2.$$

L'aire du quadrilatère grisé AMCL est l'aire du carré diminuée des aires des deux triangles blancs :

$$\text{Aire}(AMCL) = 100 - 10 - 10 = 80 \text{ cm}^2.$$

Donc pour $x = 2$, l'aire du quadrilatère grisé AMCL est bien égale à **80 cm²**.

Pour comprendre en détail

La méthode de soustraction est ici plus simple qu'un découpage direct du quadrilatère AMCL, dont l'aire n'est pas immédiate à calculer.

À retenir : L'aire d'un triangle rectangle est la moitié du produit des longueurs des deux côtés adjacents à l'angle droit.

Attention : Ne pas oublier le facteur $\frac{1}{2}$ dans le calcul de l'aire des triangles, et bien soustraire les triangles blancs (ne pas les additionner à l'aire du carré).

On peut vérifier la cohérence : pour $x = 2$, les triangles blancs représentent **20 cm²**, donc le grisé **80 cm²**, ce qui est plausible.

A.3 Calculer l'aire du quadrilatère grisé AMCL si $x = \frac{3}{5}$.

Corrigé

L'aire du carré ABCD est $10 \times 10 = 100 \text{ cm}^2$.

Les triangles ADM et ABL sont rectangles ; leur aire est $\frac{1}{2} \times 10 \times x$.

Pour $x = \frac{3}{5}$, chaque triangle a pour aire $\frac{1}{2} \times 10 \times \frac{3}{5} = 3 \text{ cm}^2$.

L'aire du quadrilatère AMCL est donc : $100 - 3 - 3 = 94 \text{ cm}^2$.

L'aire du quadrilatère grisé AMCL est **94 cm²**.

Pour comprendre en détail

À retenir : L'aire d'un triangle rectangle est $\frac{\text{côté de l'angle droit} \times \text{autre côté de l'angle droit}}{2}$.

La méthode par complément est adaptée car le quadrilatère AMCL n'a pas de formule d'aire simple. On peut aussi établir que l'aire du quadrilatère vaut $100 - 10x$; pour $x = \frac{3}{5}$, cela redonne bien le résultat. L'erreur classique est d'oublier de diviser par 2 l'aire des triangles ou d'utiliser l'hypoténuse comme hauteur.

Attention : $x = \frac{3}{5} = 0,6 \text{ cm}$, et non $3,5 \text{ cm}$.

A.4 Montrer que l'aire du quadrilatère grisé AMCL, exprimée en centimètre carré, en fonction de x , est égale à $100 - 10x$.

Corrigé

Le carré ABCD a pour côté 10 cm, donc son aire est $10 \times 10 = 100 \text{ cm}^2$.

Le triangle ADM est rectangle en D : ses côtés perpendiculaires sont AD = 10 cm et DM = x cm.

Son aire est donc $\frac{10 \times x}{2} = 5x \text{ cm}^2$.

De même, le triangle ABL est rectangle en B : ses côtés perpendiculaires sont AB = 10 cm et BL = x cm. Son aire est donc $\frac{10 \times x}{2} = 5x \text{ cm}^2$.

Le quadrilatère grisé AMCL occupe le carré privé de ces deux triangles, donc son aire est : $100 - 5x - 5x = 100 - 10x$.

Ainsi, l'aire du quadrilatère grisé AMCL est bien $100 - 10x \text{ cm}^2$.

Pour comprendre en détail

On utilise ici l'aire par complément : l'aire de la partie grisée est plus simple à obtenir comme différence entre l'aire totale et les aires des deux triangles blancs plutôt qu'en découpant le quadrilatère AMCL.

À retenir : l'aire d'un triangle rectangle est égale au produit des deux côtés perpendiculaires divisé par 2.

Attention : dans le triangle ADM, les côtés perpendiculaires sont AD et DM, donc 10 et x ; ne pas prendre AM ni confondre avec la diagonale.

On peut vérifier la cohérence avec la question A.2 : la valeur particulière $x = 2$ doit redonner l'aire calculée précédemment.

A.5 Déterminer x pour que les trois parties aient la même aire.

Corrigé

Les triangles ADM et ABL sont rectangles et ont pour côtés de l'angle droit 10 cm et x cm, donc :

\[

$$\mathcal{A}_{ADM} = \mathcal{A}_{ABL} = \frac{10 \times x}{2} = 5x.$$

\]

D'après la question A.4, l'aire du quadrilatère AMCL est $100 - 10x$.

Pour que les trois parties aient la même aire, il faut qu'un triangle blanc et le quadrilatère aient la même aire :

\[

$$5x = 100 - 10x$$

\]

\[

$$15x = 100$$

\]

\[

$$x = \frac{100}{15} = \frac{20}{3} \approx 6{,}67.$$

\]

Cette valeur est bien comprise entre 0 et 10.

L'aire de chaque partie est alors :

\[

$$5 \times \frac{20}{3} = \frac{100}{3} \approx 33{,}3 \text{ cm}^2.$$

\]

Pour $x = \frac{20}{3}$ cm, les trois parties ont la même aire, égale à $\frac{100}{3}$ cm².

Pour comprendre en détail

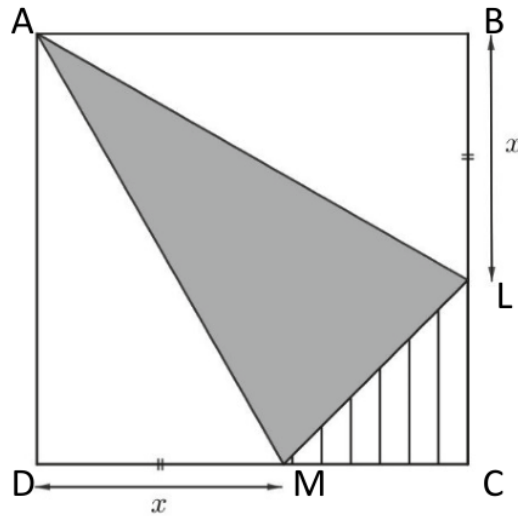
Le carré a une aire de **100 cm²**. Si les trois parties sont égales, chacune doit donc avoir une aire de $\frac{100}{3}$ cm². On pouvait résoudre directement $5x = \frac{100}{3}$ ou $100 - 10x = \frac{100}{3}$, ce qui conduit au même résultat.

Attention : L'erreur fréquente est de seulement évaluer les aires des deux triangles ADM et ABL. Cette égalité est toujours vraie, donc elle ne permet pas de trouver x . Il faut bien comparer un triangle avec le quadrilatère AMCL.

À retenir : L'aire d'un triangle rectangle est $\frac{\text{produit des deux côtés de l'angle droit}}{2}$.

Partie B

B.1.a Vérifier que si $x = 2$, alors l'aire du triangle hachuré MCL est égale à 32 cm^2 .



Corrigé

Pour $x = 2$, on a $DM = BL = 2 \text{ cm}$. Comme $CD = 10 \text{ cm}$, $MC = CD - DM = 10 - 2 = 8 \text{ cm}$.

Par symétrie par rapport à la diagonale AC , le point M est le symétrique du point L , donc $MC = CL$. Ainsi, $CL = 8 \text{ cm}$.

Le triangle MCL est rectangle en C , car ses côtés $[MC]$ et $[CL]$ sont portés par les côtés perpendiculaires du carré. Son aire est donc :

$$\mathcal{A}_{MCL} = \frac{MC \times CL}{2} = \frac{8 \times 8}{2} = 32 \text{ cm}^2.$$

L'aire du triangle hachuré MCL est donc bien égale à 32 cm^2 .

Pour comprendre en détail

À retenir : L'aire d'un triangle rectangle est la moitié du produit des longueurs des deux côtés perpendiculaires.

La symétrie par rapport à la diagonale AC permet de justifier rapidement $MC = CL$, mais on peut aussi calculer directement $CL = CB - BL = 10 - 2 = 8 \text{ cm}$.

Pour un x quelconque, on a $MC = CL = 10 - x$; l'aire du triangle MCL vaut donc $\frac{(10 - x)^2}{2}$. Cette formule permet de vérifier le résultat pour n'importe quelle valeur de x .

Attention : Ne pas confondre le triangle hachuré MCL de la partie B avec le quadrilatère grisé $AMCL$ de la partie A, dont l'aire est différente.

B.1.b Exprimer l'aire, en centimètre carré, de la partie hachurée MCL en fonction de x .

Corrigé

Le point M appartient à [CD] et $DM = x$, donc $MC = DC - DM = 10 - x$.

Le point L appartient à [BC] et $BL = x$, donc $CL = BC - BL = 10 - x$.

Le triangle MCL est rectangle en C, donc son aire est :

$$\mathcal{A}_{MCL} = \frac{MC \times CL}{2} = \frac{(10 - x)(10 - x)}{2} = \frac{1}{2}(10 - x)^2.$$

L'aire de la partie hachurée MCL est donc $\frac{1}{2}(10 - x)^2 \text{ cm}^2$.

Pour comprendre en détail

Le triangle MCL est rectangle en C car [MC] et [CL] sont portés par les côtés [CD] et [BC] du carré, perpendiculaires entre eux.

Attention : Pour MC et CL, on utilise le complément à 10 de x et non x lui-même. Penser aussi au facteur $\frac{1}{2}$ de l'aire d'un triangle.

Pour vérifier, en remplaçant x par 2, on trouve $\frac{1}{2} \times 8 \times 8 = 32 \text{ cm}^2$, ce qui est cohérent avec la question B.1.a.

B.1.c Montrer que l'aire du triangle grisé AML, exprimée en centimètre carré, est égale à $50 - \frac{x^2}{2}$.

Corrigé

Le triangle grisé AML est la partie du quadrilatère AMCL qui reste lorsqu'on enlève le triangle hachuré MCL, donc :

$$\mathcal{A}_{AML} = \mathcal{A}_{AMCL} - \mathcal{A}_{MCL}.$$

D'après la question A.4, $\mathcal{A}_{AMCL} = 100 - 10x$.

D'après la question B.1.b, $CL = CM = 10 - x$, donc $\mathcal{A}_{MCL} = \frac{(10 - x)^2}{2}$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{AML} &= 100 - 10x - \frac{(10 - x)^2}{2} = 100 - 10x - \frac{100 - 20x + x^2}{2} = 100 - 10x - 50 + 10x \\ &\quad - \frac{x^2}{2} = 50 - \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

L'aire du triangle grisé AML est donc $50 - \frac{x^2}{2} \text{ cm}^2$.

Pour comprendre en détail

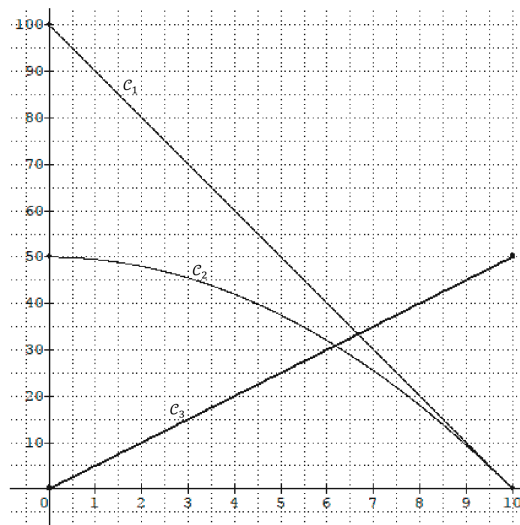
Le triangle AML n'est pas rectangle, donc il est difficile de calculer directement son aire avec une base et une hauteur. La méthode attendue consiste à le voir comme une différence d'aires en réutilisant les résultats des questions précédentes.

À retenir : un triangle rectangle de côtés de l'angle droit $10 - x$ et $10 - x$ a pour aire $\frac{(10 - x)^2}{2}$.

Attention : en développant $(10 - x)^2$, on obtient $100 - 20x + x^2$; ne pas oublier le double produit ni la division par 2.

Une autre méthode possible serait de soustraire de l'aire du carré les aires des trois triangles ADM, ABL et MCL. Pour vérifier avec $x = 2$, on obtient $50 - \frac{2^2}{2} = 48 \text{ cm}^2$, cohérent avec les questions précédentes.

B.2.a On a représenté dans le repère ci-dessous les fonctions f , g et h définies pour x entre 0 et 10 par : $f(x) = 5x$, $g(x) = 100 - 10x$, $h(x) = 50 - \frac{x^2}{2}$. On obtient les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.



Chacune des fonctions f , g et h permet de déterminer, en fonction de x , l'aire d'un des polygones ADM, AMCL et AML de la figure précédente. Associer à chaque fonction le polygone dont elle permet de déterminer l'aire. Justifier.

Corrigé

Le triangle ADM est rectangle en D, avec $AD = 10$ cm et $DM = x$ cm.

Son aire est donc :

$$A_{ADM} = \frac{AD \times DM}{2} = \frac{10 \times x}{2} = 5x.$$

Ainsi, $A_{ADM} = f(x)$, donc f correspond au triangle ADM.

Le quadrilatère AMCL a pour aire l'aire du carré ABCD diminuée des aires des triangles ADM et ABL.

Les triangles ADM et ABL ont la même aire $5x$, donc :

$$A_{AMCL} = 10^2 - 2 \times 5x = 100 - 10x.$$

Ainsi, $A_{AMCL} = g(x)$, donc g correspond au quadrilatère AMCL.

D'après la question B.1.c, l'aire du triangle AML est $50 - \frac{x^2}{2}$.

Donc $A_{AML} = h(x)$, donc h correspond au triangle AML.

Conclusion : f est associée au triangle ADM, g au quadrilatère AMCL et h au triangle AML.

Pour comprendre en détail

Pour justifier, on s'appuie sur les expressions algébriques des aires et non sur la simple lecture des courbes.

À retenir : l'aire d'un triangle rectangle est $\frac{\text{côté de l'angle droit} \times \text{autre côté de l'angle droit}}{2}$.

Attention : ne pas confondre l'aire de AMCL, qui est $100 - 10x$, avec celle de AML, qui fait intervenir x^2 . La courbe de h n'est pas une droite.

Remarque : dans la réponse attendue, la mention « question A.4 » pour $f(x) = 5x$ est une coquille ; $5x$ est l'aire de ADM, utilisée dans la question A.4 pour obtenir $100 - 10x$.

B.2.b Associer chaque courbe $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ à la fonction qu'elle représente. Justifier.

Corrigé

La fonction h est définie par $h(x) = 50 - \frac{x^2}{2}$: c'est une fonction du second degré, donc sa représentation graphique n'est pas une droite mais un arc de parabole. On associe donc h à la courbe $\mathcal{C}_2$.

Les fonctions f et g sont affines, donc leurs courbes sont des droites.

$f(x) = 5x$ a pour coefficient directeur $5 > 0$: elle est croissante et $f(0) = 0$. C'est la courbe $\mathcal{C}_3$.

$g(x) = 100 - 10x$ a pour coefficient directeur $-10 < 0$: elle est décroissante et $g(0) = 100$. C'est la courbe $\mathcal{C}_1$.

Ainsi :

$\mathcal{C}_1$ représente g ;

$\mathcal{C}_2$ représente h ;

$\mathcal{C}_3$ représente f .

Pour comprendre en détail

La méthode s'appuie sur la nature des fonctions :

- une fonction affine $x \mapsto ax + b$ a pour courbe une droite ; son coefficient directeur a donne le sens de variation : croissante si $a > 0$, décroissante si $a < 0$;
- une fonction du second degré a pour courbe une parabole, donc une courbe « courbée », jamais une droite.

À retenir : Pour associer courbe et fonction, on peut aussi calculer l'ordonnée à l'origine $f(0)$, $g(0)$ ou $h(0)$, puis vérifier avec une image simple comme $x = 3$ ou $x = 10$.

Attention : Ne pas confondre les deux droites : ici f et g ont des sens de variation opposés. Si deux droites avaient le même sens, on les départagerait par leurs ordonnées à l'origine ou par un point de contrôle.

B.2.c Déterminer graphiquement l'aire du triangle grisé AML pour $x = 3$.

Corrigé

D'après les questions précédentes, l'aire du triangle AML est représentée par la fonction h , donc par la courbe $\mathcal{C}_2$. Sur le graphique, pour $x = 3$, le point de $\mathcal{C}_2$ d'abscisse 3 a pour ordonnée environ 45. L'aire du triangle grisé AML pour $x = 3$ est donc environ **45 cm²**. (Valeur exacte : $h(3) = 50 - \frac{3^2}{2} = 45,5 \text{ cm}^2$, compatible avec la lecture graphique.)

Pour comprendre en détail

Pour lire graphiquement, on repère l'abscisse $x = 3$, on monte verticalement jusqu'à la courbe $\mathcal{C}_2$, puis on lit l'ordonnée sur l'axe vertical. La lecture est approchée ; le calcul de la valeur exacte par la formule de h est une bonne vérification.

Attention : ne pas confondre avec $\mathcal{C}_1$ (aire de AMCL) ou $\mathcal{C}_3$ (aire de ADM).

B.2.d Déterminer graphiquement la valeur de x pour laquelle l'aire du quadrilatère grisé AMCL de la partie A est égale à 25 cm².

Corrigé

L'aire du quadrilatère AMCL est donnée par la fonction $g(x) = 100 - 10x$, représentée par la courbe $\mathcal{C}_1$.

On cherche x tel que $g(x) = 25$. Graphiquement, le point de $\mathcal{C}_1$ d'ordonnée 25 a pour abscisse 7,5.

Par le calcul : $100 - 10x = 25$, donc $10x = 75$, d'où $x = 7,5$.

Conclusion : pour $x = 7,5$ cm, l'aire du quadrilatère grisé AMCL est égale à **25 cm²**.

Pour comprendre en détail

Il s'agit d'une lecture graphique d'antécédent : on lit l'abscisse du point de la droite d'ordonnée 25. On peut vérifier cette valeur par le calcul car on connaît l'expression de g .

À retenir : Résoudre $g(x) = k$ revient graphiquement à chercher l'abscisse du point d'intersection de la courbe de g avec la droite horizontale d'ordonnée k .

Attention : Ne pas confondre la courbe $\mathcal{C}_1$ (aire de AMCL, fonction affine décroissante) avec $\mathcal{C}_2$ (aire de AML, fonction du second degré) ou $\mathcal{C}_3$ (aire de ADM, fonction linéaire). La valeur lue sur l'axe horizontal est l'abscisse, pas l'ordonnée.

B.2.e Déterminer graphiquement la valeur de x pour que les trois triangles ABL, ADM et AML de la partie B aient la même aire. Justifier.

Corrigé

Les triangles ABL et ADM sont rectangles, de base 10 cm et de hauteur x , donc : $\frac{10 \times x}{2} = 5x = f(x)$. Ainsi, ABL et ADM ont toujours la même aire.

L'aire du triangle AML est $h(x) = 50 - \frac{x^2}{2}$. Pour que les trois triangles aient la même aire, il faut $f(x) = h(x)$.

Graphiquement, cela correspond à l'abscisse du point d'intersection des courbes $\mathcal{C}_3$ (représentant f) et $\mathcal{C}_2$ (représentant h). On lit $x \approx 6,2$.

Vérification par le calcul : $5x = 50 - \frac{x^2}{2}$ donne $x^2 + 10x - 100 = 0$, soit $x = -5 + \sqrt{125} \approx 6,18$.

Conclusion : pour $x \approx 6,2$ cm, les trois triangles ABL, ADM et AML ont la même aire.

Pour comprendre en détail

La courbe $\mathcal{C}_3$ représente l'aire commune des triangles ABL et ADM, et $\mathcal{C}_2$ celle du triangle AML ; leur intersection donne donc la valeur cherchée.

Attention : Ne pas utiliser la courbe $\mathcal{C}_1$, qui correspond au quadrilatère AMCL de la partie A et non à l'un des trois triangles.

La lecture graphique fournit une valeur approchée, ce qui est attendu dans cette question.

Partie C

C.1 Entre quelles valeurs le rayon r peut-il varier ? Justifier.

Corrigé

Le disque doit rester à l'intérieur du carré, donc son diamètre ne peut pas dépasser le côté du carré, soit 10 cm. On a ainsi $2r \leq 10$, d'où $r \leq 5$. Comme un rayon est une longueur positive ou nulle, $r \geq 0$. Par conséquent, le rayon r peut varier entre 0 cm et 5 cm : $0 \leq r \leq 5$.

Pour comprendre en détail

La plus grande distance entre le centre du carré et un côté est la moitié du côté : c'est le rayon maximal du disque inscrit. À l'inverse, un rayon peut être choisi aussi petit que l'on veut, jusqu'à 0.

Attention : Ne pas confondre rayon et diamètre : le diamètre maximal est 10 cm, donc le rayon maximal est 5 cm.

Le cas $r = 0$ correspond à un disque réduit à un point, ce qui reste acceptable dans ce partage.

C.2 Déterminer pour quelle valeur du rayon r , exprimée en centimètre, l'aire du disque est égale au quart de celle du carré. Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.

Corrigé

L'aire du carré est $10^2 = 100 \text{ cm}^2$. Le quart de cette aire vaut $100 \div 4 = 25 \text{ cm}^2$.

L'aire du disque est πr^2 . On doit donc avoir :

$$\pi r^2 = 25$$

$$r^2 = \frac{25}{\pi}$$

Comme r est une longueur, $r \geq 0$, donc $r = \sqrt{\frac{25}{\pi}} = \frac{5}{\sqrt{\pi}}$.

La valeur exacte du rayon est $\frac{5}{\sqrt{\pi}} \text{ cm}$, soit environ **2,82 cm** au centième.

Pour comprendre en détail

À retenir : L'aire d'un disque de rayon r est πr^2 ; l'aire d'un carré de côté c est c^2 .

Attention : Après avoir obtenu $r^2 = \frac{25}{\pi}$, il ne faut pas oublier de prendre la racine carrée pour obtenir r , en conservant la solution positive.

Pour vérifier la cohérence, on peut remarquer que la valeur trouvée est inférieure à 5 cm, demi-côté du carré, donc le disque reste bien à l'intérieur du carré.

C.3.a Pour déterminer l'aire du disque dans le carré en fonction de son rayon, on réalise avec un tableur la feuille de calcul suivante :

	A	B	
1	Rayon	Aire	
2	0	0	
3	0,5	0,78539816	
4	1	3,14159265	
5	1,5	7,06858347	
6	2	12,5663706	
7	2,5	19,6349541	
8	3	28,2743339	
9	3,5	38,48451	
10	4	50,2654825	
11	4,5	63,6172512	
12	5	78,5398163	
13			

Quelle formule permettant de calculer l'aire du disque doit être écrite dans la cellule B2 pour être ensuite copiée par glissement vers le bas ? Note : on pourra utiliser la fonction $PI()$ du tableur qui renvoie une valeur approchée du nombre π .

Corrigé

En B2, on saisit la formule $=PI()*A2^2$.

Cette formule calcule l'aire du disque $\pi \times \text{rayon}^2$ en utilisant la valeur du rayon inscrite en A2. Lorsqu'on la copie par glissement vers le bas, la référence relative A2 devient A3, A4, ... et la formule s'adapte à chaque ligne.

Pour comprendre en détail

À retenir : L'aire d'un disque de rayon r est πr^2 . Ici, le rayon est dans la colonne A, donc pour la ligne 2, r correspond à la cellule A2.

Attention : Ne pas oublier le signe = au début de la formule ; ne pas écrire $=PI()*A2*2$, qui donnerait la circonférence et non l'aire ; ne pas utiliser un mot comme *rayon* à la place de la référence de cellule.

On pourrait aussi écrire $=PI()*A2*A2$ ou $=PI()*PUISSANCE(A2;2)$: le résultat est identique. La recopie vers le bas fonctionne car A2 est une référence relative.

C.3.b Dédurre de ce tableau, un encadrement d'amplitude minimale de la valeur r_0 du rayon du disque pour que l'aire du disque soit égale à l'aire de la surface grisée.

Corrigé

Aire du carré : $10^2 = 100 \text{ cm}^2$.

L'aire du disque est égale à l'aire de la surface grisée, donc chacune vaut la moitié du carré : $100 \div 2 = 50 \text{ cm}^2$.

Dans le tableau, pour $r = 3,5$, l'aire du disque vaut environ $38,48 \text{ cm}^2$; pour $r = 4$, elle vaut environ $50,27 \text{ cm}^2$.

On a $38,48 < 50 < 50,27$, donc $3,5 \leq r_0 \leq 4$.

L'encadrement d'amplitude minimale fourni par le tableau est $3,5 \leq r_0 \leq 4$, soit une amplitude de $0,5 \text{ cm}$.

Pour comprendre en détail

À retenir : Si le disque et la surface grisée ont la même aire et qu'ils forment à eux deux le carré, alors chacun représente la moitié de l'aire totale du carré.

Attention : La surface grisée est la partie extérieure au disque, pas le disque lui-même. Il faut donc chercher $\pi r^2 = 100 - \pi r^2$, c'est-à-dire $\pi r^2 = 50 \text{ cm}^2$.

La fonction aire $r \mapsto \pi r^2$ est croissante sur $[0 ; 5]$, donc encadrer l'aire par les valeurs du tableau permet d'encadrer r_0 .

Le tableau donne les rayons de $0,5$ en $0,5$; on ne peut donc pas obtenir un encadrement plus fin avec ces seules données. La valeur exacte $r_0 = \sqrt{\frac{50}{\pi}}$ vaut environ $3,99$, ce qui est cohérent avec l'encadrement obtenu.

C.3.c Déterminer la valeur exacte de r_0 , exprimée en centimètre, puis donner l'arrondi au centième.

Corrigé

L'aire du disque est πr_0^2 et l'aire de la surface grisée est $100 - \pi r_0^2$.

On veut qu'elles soient égales, donc :

$\backslash[$

$$\pi r_0^2 = 100 - \pi r_0^2$$

$\backslash]$

$\backslash[$

$$2\pi r_0^2 = 100$$

$\backslash]$

$\backslash[$

$$\pi r_0^2 = 50$$

$\backslash]$

$\backslash[$

$$r_0^2 = \frac{50}{\pi}$$

$\backslash]$

Le rayon étant positif :

$\backslash[$

$$r_0 = \sqrt{\frac{50}{\pi}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

\]

La valeur arrondie au centième est :

\[

$r_0 \approx 3{,}99 \text{ cm}$

\]

Pour comprendre en détail

À retenir : L'aire d'un disque de rayon r est πr^2 . L'aire d'un carré de côté 10 cm est $10^2 = 100 \text{ cm}^2$.

La surface grisée est le complément du disque dans le carré : son aire est $100 - \pi r^2$. L'égalité des deux aires conduit donc à $\pi r_0^2 = 50$, car le disque occupe alors la moitié du carré.

Attention : Ne pas confondre avec la question C.2 où l'aire du disque devait être égale au quart de l'aire du carré, ce qui donnait $\pi r^2 = 25$. Ici, l'aire du disque est égale à l'aire grisée, donc à la moitié du carré.

Le corrigé officiel mentionne par erreur « le quart de l'aire du carré » ; il s'agit bien de la moitié pour cette question C.3.c. La valeur **3,99 cm** est cohérente avec l'encadrement $3{,}5 \leq r_0 \leq 4$ obtenu à la question C.3.b.

C.3.d Déterminer la valeur exacte r_1 du rayon du disque telle que l'aire du disque soit égale au tiers de l'aire de la surface grisée et donner son arrondi au dixième de millimètre.

Corrigé

L'aire du carré est $10^2 = 100 \text{ cm}^2$, donc l'aire de la surface grisée est $100 - \pi r_1^2$.

La condition s'écrit :

$$\pi r_1^2 = \frac{1}{3}(100 - \pi r_1^2)$$

$$\pi r_1^2 + \frac{\pi r_1^2}{3} = \frac{100}{3}$$

$$\frac{4}{3}\pi r_1^2 = \frac{100}{3}$$

$$4\pi r_1^2 = 100$$

$$\pi r_1^2 = 25$$

$$r_1^2 = \frac{25}{\pi}$$

$$r_1 = \frac{5}{\sqrt{\pi}} \text{ car } r_1 > 0.$$

Valeur exacte : $r_1 = \frac{5}{\sqrt{\pi}} \text{ cm}$.

Valeur arrondie au dixième de millimètre : $r_1 \approx 2{,}82 \text{ cm} = 28{,}2 \text{ mm}$.

Le rayon cherché est $\frac{5}{\sqrt{\pi}} \text{ cm}$, soit environ **28,2 mm**.

Pour comprendre en détail

À retenir : L'aire de la surface grisée est l'aire du carré moins l'aire du disque : $100 - \pi r_1^2$.

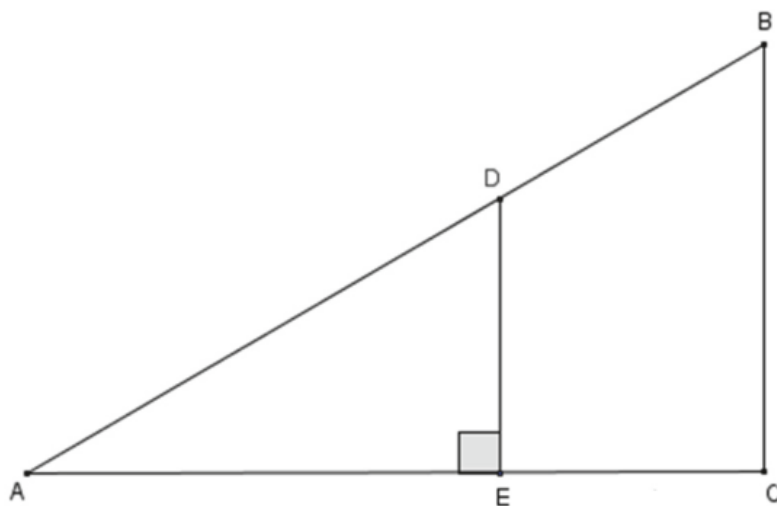
Attention : « le tiers de l'aire de la surface grisée » signifie $\frac{1}{3}(100 - \pi r_1^2)$, et non $\frac{1}{3} \times 100$.

Cette condition équivaut à « l'aire du disque vaut le quart de l'aire du carré » : si l'on note d l'aire du disque, l'égalité $d = \frac{1}{3}(100 - d)$ donne $4d = 100$, donc $d = 25$. C'est la même valeur qu'en C.2.

La valeur exacte $\frac{5}{\sqrt{\pi}}$ peut aussi s'écrire $\frac{5\sqrt{\pi}}{\pi}$. Pour l'arrondi au dixième de millimètre, convertir d'abord en millimètres avant d'arrondir.

Exercice 2

- 1 Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle, D et E sont des points des côtés $[AB]$ et $[AC]$ tels que : $AD = 9 \text{ cm}$, $DB = 6 \text{ cm}$, $AC = 10 \text{ cm}$, $EC = 4 \text{ cm}$.



Affirmation 1 : « Le triangle ABC est rectangle en C . »

Corrigé

On a $AB = AD + DB = 9 + 6 = 15 \text{ cm}$ et $AE = AC - EC = 10 - 4 = 6 \text{ cm}$.

$$\frac{AD}{AB} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \text{ et } \frac{AE}{AC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \text{ donc } \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$

Les points A, D, B d'une part et A, E, C d'autre part sont alignés dans le même ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

Or $(DE) \perp (AC)$, donc $(BC) \perp (AC)$: par suite, le triangle ABC est rectangle en C .

Affirmation vraie.

Pour comprendre en détail

À retenir : La réciproque du théorème de Thalès exige de vérifier l'égalité de deux rapports et l'alignement des points dans le même ordre.

Attention : On calcule $AB = AD + DB$ car D est sur $[AB]$, et $AE = AC - EC$ car E est sur $[AC]$; ne pas utiliser directement les longueurs données.

On enchaîne ensuite avec la propriété : si deux droites sont parallèles et que l'une est perpendiculaire à une troisième, alors l'autre lui est aussi perpendiculaire.

- 2** Affirmation 2 : « La somme de deux nombres entiers impairs consécutifs ne peut pas être un nombre premier. »

Corrigé

Soit m un entier impair. Le nombre impair suivant est $m + 2$. Leur somme est $m + (m + 2) = 2m + 2 = 2(m + 1)$. Cette somme est donc un nombre pair.

De plus, la plus petite somme de deux impairs consécutifs est $1 + 3 = 4$, donc cette somme est strictement supérieure à 2. Or, un nombre pair strictement supérieur à 2 possède au moins les diviseurs 1, 2 et lui-même ; il n'est donc pas premier.

L'affirmation est **vraie**.

Pour comprendre en détail

À retenir : un nombre premier est un entier naturel supérieur ou égal à 2 qui possède exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et lui-même. Le seul nombre premier pair est 2.

Pourquoi cette méthode ? Écrire les deux impairs consécutifs m et $m + 2$ permet de factoriser leur somme par 2 et de faire apparaître la divisibilité par 2. Il faut ensuite vérifier que cette somme est strictement supérieure à 2, car 2 est pair et premier ; cette vérification est essentielle.

Attention : une erreur fréquente est d'affirmer que tout nombre pair est non premier, ce qui est faux pour 2. Ici, la somme est au minimum 4, donc le raisonnement est valable.

Autre méthode possible : poser les deux impairs consécutifs $2n + 1$ et $2n + 3$; leur somme est un multiple de 4, ce qui est encore plus fort.

- 3** On suppose qu'une voiture perd chaque année 20 % de sa valeur. Affirmation 3 : « Dans 5 ans, la voiture vaudra encore plus d'un tiers de sa valeur initiale. »

Corrigé

Perdre 20 % de sa valeur revient à multiplier chaque année par $1 - \frac{20}{100} = 0,8$.

Sur 5 ans, la valeur est donc multipliée par $0,8^5 = 0,32768$.

Or $\frac{1}{3} \approx 0,3333$, donc $0,32768 < \frac{1}{3}$.

Après 5 ans, la voiture vaut environ 32,8 % de sa valeur initiale, c'est-à-dire moins d'un tiers. L'affirmation « vaudra encore plus d'un tiers » est donc **fausse**.

Pour comprendre en détail

À retenir : Pour une baisse de $t\%$, le coefficient multiplicateur est $1 - \frac{t}{100}$. Lors de plusieurs évolutions successives, on multiplie les coefficients entre eux.

Attention : On ne peut pas additionner les pourcentages de baisse sur plusieurs années. Dire que la voiture perd $5 \times 20\% = 100\%$ de sa valeur est faux : chaque baisse de 20 % s'applique à la valeur restante de l'année précédente.

Une comparaison fiable avec $\frac{1}{3}$ nécessite de conserver suffisamment de décimales : **0,32768** est très proche de **0,3333**, donc un arrondi à **0,33** pourrait laisser croire à tort que la valeur dépasse un tiers.

- 4** *Dans mon équipe, les trois quarts des joueurs sont mineurs et le tiers des majeurs a plus de 25 ans.
Affirmation 4 : « Un équipier sur six a entre 18 et 25 ans. »*

Corrigé

Les mineurs représentent $\frac{3}{4}$ des joueurs, donc les majeurs représentent $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ des joueurs.

Parmi les majeurs, $\frac{1}{3}$ a plus de 25 ans, donc $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ des majeurs a entre 18 et 25 ans.

La fraction de l'équipe ayant entre 18 et 25 ans est donc $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

Un équipier sur six a donc bien entre 18 et 25 ans : **l'affirmation est vraie**.

Pour comprendre en détail

À retenir : Pour prendre une fraction d'une fraction, on multiplie les deux fractions.

Attention : « le tiers des majeurs » ne représente pas le tiers de l'équipe entière : il faut d'abord isoler la part des majeurs ($\frac{1}{4}$ de l'équipe).

Autre méthode : avec un effectif total de 12 joueurs, il y a 9 mineurs et 3 majeurs ; 1 majeur a plus de 25 ans, donc 2 majeurs ont entre 18 et 25 ans, soit $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

Exercice 3

- 1 Calculer l'écart, en centimètre, entre la taille moyenne des filles et la taille moyenne des garçons.

Corrigé

Somme des tailles des filles :

$$149 + 155 + 161 + 142 + 167 + 163 + 157 + 150 + 165 + 152 + 161 + 159 + 160 = 2\,041.$$

Taille moyenne des filles :

$$\frac{2\,041}{13} = 157 \text{ cm.}$$

La taille moyenne des garçons est 159 cm.

Écart entre les deux moyennes :

$$159 - 157 = 2 \text{ cm.}$$

L'écart entre la taille moyenne des filles et la taille moyenne des garçons est donc de 2 cm.

Pour comprendre en détail

À retenir : La moyenne d'une série est la somme de toutes les valeurs divisée par l'effectif total.

Pour cette question, seule la moyenne des garçons est utile ; l'étendue et la médiane ne servent pas ici.

Attention : Il faut diviser la somme des tailles des filles par 13, et non par 28. L'écart demandé est la différence positive entre les deux moyennes.

- 2 Dans la classe, l'élève de plus petite taille mesure 140 cm. Quelle est la taille de l'élève le plus grand ?

Corrigé

La plus petite des filles mesure 142 cm ; l'élève de 140 cm est donc un garçon.

Pour une série statistique, l'étendue est **valeur max** – **valeur min**, donc **valeur max** = **valeur min** + **étendue**.

Pour les garçons, la plus grande taille est donc $140 + 29 = 169$ cm.

La plus grande fille mesure 167 cm. Comme $169 > 167$, l'élève le plus grand de la classe mesure 169 cm.

Pour comprendre en détail

L'étendue d'une série est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur : **max** – **min**. Ici, l'énoncé donne l'étendue des tailles des garçons, pas de la classe entière ; c'est pour cela qu'on commence par identifier le sexe de l'élève de 140 cm.

Attention : Les indicateurs **29** cm, **159** cm et **161** cm concernent les tailles des garçons. Il ne faut pas appliquer l'étendue à la classe entière. La moyenne et la médiane ne servent pas pour cette question.

Une fois la plus petite taille des garçons connue, la relation **max = min + étendue** donne directement leur plus grande taille.

3 Dans la classe, combien d'élèves mesurent 162 cm ou plus ?

Corrigé

Filles mesurant 162 cm ou plus : les tailles 167, 163 et 165 conviennent, donc **3 filles**.

Garçons : effectif **28 – 13 = 15**. La médiane est la 8^e valeur (15 est impair). Cette 8^e taille vaut 161 cm. Comme les tailles des garçons sont toutes différentes et entières, les 7 garçons classés après la 8^e valeur mesurent strictement plus de 161 cm, donc au moins 162 cm.

Total : **3 + 7 = 10**.

Il y a donc **10 élèves** qui mesurent 162 cm ou plus.

Pour comprendre en détail

À retenir : Pour une série de n valeurs, si n est impair, la médiane est la valeur de rang $\frac{n+1}{2}$. Ici $n = 15$, donc la médiane est la 8^e valeur.

Attention : Le garçon mesurant 161 cm (la médiane) ne mesure pas 162 cm ou plus. De même, les deux filles de 161 cm ne sont pas comptées. Les tailles étant toutes différentes chez les garçons, il y a exactement 7 garçons au-dessus de 161 cm.

L'étendue et la moyenne ne sont pas utiles pour cette question.

4 Calculer la taille moyenne, en centimètre, arrondie au millimètre, des élèves de cette classe.

Corrigé

La moyenne des filles est **157** cm et celle des garçons est **159** cm. Il y a **13** filles et **15** garçons, donc la moyenne de la classe est :

$$\frac{13 \times 157 + 15 \times 159}{28} = \frac{2\,041 + 2\,385}{28} = \frac{4\,426}{28} \approx 158,0714 \dots$$

Arrondie au millimètre, la taille moyenne des élèves de cette classe est donc **158,1** cm.

Pour comprendre en détail

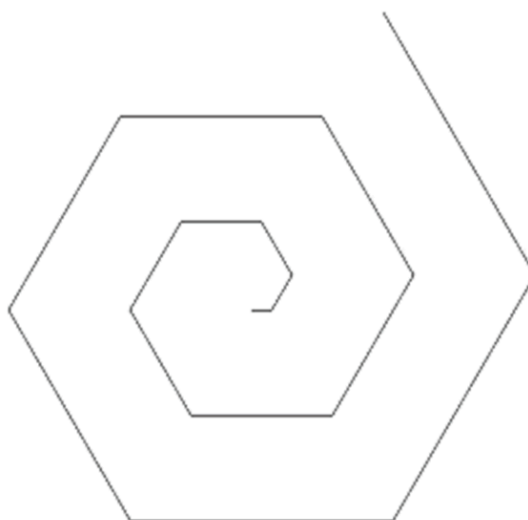
À retenir : Pour calculer la moyenne globale à partir des moyennes de deux sous-groupes, on utilise la moyenne pondérée : $\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$.

Attention : Ne pas faire la moyenne simple des deux moyennes $(157 + 159)/2$: les effectifs des filles et des garçons ne sont pas égaux.

La moyenne des filles utilisée ici a été obtenue en additionnant les treize tailles de l'énoncé puis en divisant par **13**. L'arrondi au millimètre correspond à un chiffre après la virgule en centimètres.

Exercice 4

- 1 Un élève écrit le programme suivant et obtient la figure ci-dessous.



Que doit-il modifier dans son programme pour obtenir la figure attendue ? Aucune justification n'est attendue.

Corrigé

Il faut remplacer l'instruction « tourner ⤵ de 60 degrés » par « tourner ⤵ de 120 degrés ».

En effet, pour une spirale triangulaire, l'angle de rotation est $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$.

Pour comprendre en détail

À retenir : Dans Scratch, l'instruction « tourner » modifie la direction du lutin d'un angle extérieur au polygone. Pour fermer un polygone régulier à n côtés, la somme des rotations vaut 360° , donc chaque rotation mesure $\frac{360^\circ}{n}$.

Attention : Ne pas confondre avec l'angle intérieur d'un triangle équilatéral qui vaut 60° ; ici on tourne de l'angle supplémentaire, c'est pourquoi on utilise 120° .

Le programme initial avec une rotation de 60° correspond à un polygone à 6 côtés (hexagone), d'où la figure obtenue.

2

Quelle est la longueur, exprimée en pixel, du dernier segment tracé ?

Corrigé

Le programme trace un segment à chaque répétition, avant d'augmenter la variable *longueur*.

Le premier segment mesure 10 pixels, puis chaque segment suivant mesure 10 pixels de plus que le précédent. La longueur du n -ième segment est donc :

$$10 + 10(n - 1) = 10n$$

Avec 15 répétitions, il y a 15 segments tracés. Le dernier segment tracé est le 15^e :

$$10 \times 15 = 150$$

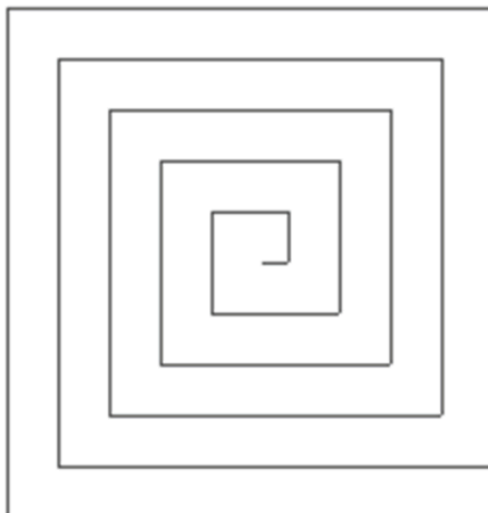
Le dernier segment tracé mesure 150 pixels.

Pour comprendre en détail

Attention : Le corrigé officiel donne 160 pixels, mais c'est la valeur de la variable *longueur* après la dernière augmentation. Cette augmentation a lieu après le 15^e tracé ; il n'y a pas de 16^e avancée. Il ne faut donc pas utiliser la valeur finale de la variable.

3

Que doit-on modifier dans le programme précédent pour obtenir la spirale suivante ?



Le plus petit segment mesure 10 pixels et chaque segment mesure 10 pixels de plus que le précédent.

Corrigé

Il faut remplacer l'angle de rotation **60°** par **90°**, et modifier la boucle en écrivant « répéter 20 fois » au lieu de « répéter 15 fois » (la figure comporte 20 segments, le dernier mesurant 200 pixels).

Pour comprendre en détail

Dans le programme initial, l'instruction « tourner de **60°** » correspond à l'angle extérieur d'un hexagone régulier ($\frac{360}{6} = 60^\circ$). Pour une spirale carrée, chaque segment fait un angle droit avec le précédent, donc l'angle de rotation vaut **90°**.

Le nombre de répétitions doit correspondre au nombre de segments visibles : les longueurs successives sont **10, 20, 30, ... , 200** pixels, soit 20 segments. Si l'on conservait 15 répétitions, le dernier segment ne mesurerait que 150 pixels et la spirale serait incomplète.

Attention : une erreur fréquente est de ne modifier que l'angle ou que le nombre de répétitions.