

ANNALES CRPE · MATHÉMATIQUES · 2021

Corrigé détaillé

CRPE 2021 – Mathématiques – Session supplémentaire Créteil

Épreuve écrite disciplinaire de mathématiques (2e épreuve d'admissibilité)

Durée : 4 heures

26 points

Exercice 1

13 points

Exercice 2

Exercice 3

Exercice 4

Pour chaque question : **rappel de l'énoncé**, **corrigé** rédigé, puis « **Pour comprendre en détail** » (méthode, rappels de cours, erreurs fréquentes). À utiliser avec le sujet officiel (documents, tableaux et figures).

Sujet : Ministère de l'Éducation nationale – session 2021 (PE2–21–G5). Corrigé rédigé par Campus XYZ – campusxyz.fr. Tous droits réservés.

Exercice 1 (13 points)

Partie A

A.1.a Donner le nombre d'apiculteurs qui possédaient entre 150 ruches et 399 ruches en France métropolitaine en 2017.

Corrigé

Sur le diagramme, dans la catégorie « De 150 à 399 ruches », la barre de l'année 2017 atteint la graduation **1 523** sur l'axe des ordonnées.

En 2017, **1 523** apiculteurs possédaient entre 150 et 399 ruches.

Pour comprendre en détail

Attention : il ne faut pas confondre la barre de 2017 avec celle de 2016 (**2 540**), ni avec la catégorie voisine « De 50 à 149 ruches » (**1 939** en 2017).

Une lecture attentive de la légende ou des couleurs permet d'identifier la bonne barre dans la bonne catégorie.

A.1.b Donner le nombre total d'apiculteurs en 2017 en France métropolitaine.

Corrigé

Le nombre total d'apiculteurs en 2017 est :

$$49\,892 + 1\,939 + 1\,523 + 599 = 53\,953.$$

Il y avait donc **53 953** apiculteurs en France métropolitaine en 2017.

Pour comprendre en détail

Attention : Le graphique présente deux années ; il faut utiliser uniquement les valeurs de 2017 et ne pas oublier la catégorie « moins de 50 ruches », dont la barre est souvent coupée.

Les quatre catégories sont disjointes et couvrent l'ensemble des apiculteurs, donc la somme des effectifs donne le total demandé.

A.1.c Donner le nombre d'apiculteurs qui possédaient entre 50 ruches et 399 ruches en France métropolitaine en 2016.

Corrigé

Les apiculteurs possédant entre 50 et 399 ruches en 2016 sont ceux des catégories « de 50 à 149 ruches » et « de 150 à 399 ruches ».

En 2016, le graphique donne :

- catégorie 50 à 149 ruches : **2 020** apiculteurs ;
- catégorie 150 à 399 ruches : **2 540** apiculteurs.

On additionne ces deux valeurs : $2\,020 + 2\,540 = 4\,560$.

Il y avait donc **4 560** apiculteurs possédant entre 50 et 399 ruches en France métropolitaine en 2016.

Pour comprendre en détail

Attention : l'erreur fréquente est de lire les valeurs de 2017 ou d'oublier l'une des deux catégories composant l'intervalle demandé. Bien vérifier l'année et additionner les deux tranches.

A.2.a Expliquer pourquoi la partie du diagramme concernant les apiculteurs possédant moins de 50 ruches n'est pas représentée de la même façon que les autres parties.

Corrigé

Il y a plus de 20 fois plus d'apiculteurs ayant moins de 50 ruches (49 892 en 2017) que dans les autres catégories (quelques centaines à 2 000) : à la même échelle, les autres barres seraient presque invisibles ; la barre est donc coupée (axe interrompu).

Pour comprendre en détail

À retenir : Dans un diagramme en barres, quand une valeur est très grande par rapport aux autres, on peut interrompre l'axe vertical (barre coupée) pour garder une échelle lisible sur les petites valeurs ; cette coupure doit être visible.

Attention : Une barre coupée ne doit pas être lue comme si sa hauteur était proportionnelle aux autres sans tenir compte de l'interruption de l'axe.

La catégorie « moins de 50 ruches » concentre la très grande majorité des apiculteurs : sans cette rupture d'axe, les barres des catégories 50 à 149, 150 à 399 et plus de 400 ruches (de quelques centaines à environ 2 500) seraient écrasées près de zéro et le graphique perdrait toute information utile. C'est donc un choix de lisibilité du graphique, signalé par la barre coupée.

A.2.b Pour les apiculteurs ayant moins de 50 ruches, le pourcentage d'augmentation entre 2016 et 2017 a été de 10,4 %. Calculer le nombre d'apiculteurs en 2016 dans cette catégorie.

Corrigé

Une augmentation de 10,4 % correspond au coefficient multiplicateur $1 + \frac{10,4}{100} = 1,104$.

Soit n le nombre d'apiculteurs possédant moins de 50 ruches en 2016. On a : $n \times 1,104 = 49\,892$, donc $n = \frac{49\,892}{1,104} \approx 45\,192$.

En 2016, il y avait environ 45 192 apiculteurs dans cette catégorie.

Pour comprendre en détail

À retenir : Augmenter une valeur de t % revient à la multiplier par $1 + \frac{t}{100}$. Ici, $t = 10,4$, donc le coefficient multiplicateur vaut 1,104.

Attention : Le pourcentage d'augmentation s'applique à la valeur de 2016, inconnue ; on ne peut donc pas calculer 10,4 % de 49 892 puis soustraire.

Vérification : $45\,192 \times 1,104 \approx 49\,892$; le résultat est arrondi à l'unité car il s'agit d'un nombre d'apiculteurs.

A.3 Calculer le pourcentage d'évolution du nombre d'apiculteurs possédant au moins 150 ruches de 2016 à 2017, on arrondira le résultat au dixième d'unité de pourcentage.

Corrigé

Les apiculteurs possédant au moins 150 ruches sont ceux des catégories « De 150 à 399 ruches » et « Plus de 400 ruches ».

- En 2016 : $2\,540 + 608 = 3\,148$ apiculteurs.
- En 2017 : $1\,523 + 599 = 2\,122$ apiculteurs.

Le taux d'évolution est donné par $\frac{V_f - V_i}{V_i} \times 100$:

$$\frac{2\,122 - 3\,148}{3\,148} \times 100 \approx -32,6.$$

Le pourcentage d'évolution du nombre d'apiculteurs possédant au moins 150 ruches de 2016 à 2017 est donc environ $-32,6\%$, soit une diminution de $32,6\%$.

Pour comprendre en détail

À retenir : Le taux d'évolution entre une valeur initiale V_i et une valeur finale V_f est donné par $\frac{V_f - V_i}{V_i} \times 100$. Un résultat négatif signifie une diminution.

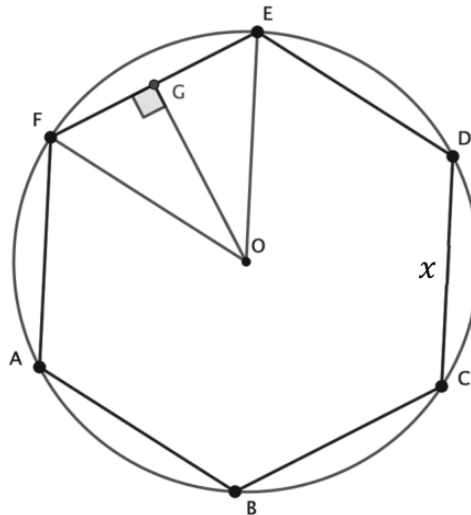
Attention : L'expression « au moins 150 ruches » regroupe les classes « De 150 à 399 ruches » et « Plus de 400 ruches » ; il faut additionner leurs effectifs avant d'appliquer la formule.

--

On peut aussi, pour vérifier, calculer le coefficient multiplicateur $\frac{V_f}{V_i}$ et le comparer à 1 : s'il est inférieur à 1, le nombre a baissé.

Partie B

B.1.a Montrer que le triangle FOE est un triangle équilatéral.



Corrigé

Les segments $[OF]$ et $[OE]$ sont deux rayons du cercle de centre O , donc $OF = OE$. Le triangle FOE est donc isocèle en O .

Comme ABCDEF est un hexagone régulier, les six angles au centre sont égaux, donc $\widehat{EOF} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$.

Le triangle FOE est isocèle en O avec un angle de 60° ; il est donc équilatéral.

Pour comprendre en détail

À retenir : Dans un triangle isocèle, les angles à la base sont égaux ; si l'angle au sommet mesure 60° , alors les deux angles à la base mesurent aussi 60° , donc le triangle est équilatéral.

On peut aussi justifier que les angles à la base valent chacun $\frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$.

Attention : Il ne suffit pas de dire que $[OF]$ et $[OE]$ ont la même longueur ; il faut aussi justifier que $[FE]$ est égal à ces longueurs, ce que permet ici l'angle de 60° .

B.1.b On admet que l'aire d'un triangle équilatéral ayant des côtés de longueur x est $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$. Déterminer l'aire de l'hexagone ABCDEF en fonction de x .

Corrigé

L'hexagone régulier ABCDEF est formé de six triangles équilatéraux de côté x , tous isométriques au triangle FOE.

L'aire d'un triangle équilatéral de côté x est donnée par $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.

Donc l'aire de l'hexagone est :

$$6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = \frac{6\sqrt{3}}{4}x^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$$

L'aire de l'hexagone ABCDEF est donc $\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$.

Pour comprendre en détail

Le découpage en six triangles équilatéraux repose sur le fait que l'hexagone régulier est inscrit dans le cercle de centre O : les six angles au centre mesurent 60° , donc les triangles formés avec deux sommets consécutifs et le centre sont équilatéraux.

Attention : ne pas oublier de multiplier l'aire d'un seul triangle par 6. Une erreur fréquente consiste à donner seulement l'aire du triangle FOE.

B.1.c Le périmètre de l'hexagone régulier vaut 18 mm. Montrer que l'aire de cet hexagone, arrondie au millième près, vaut **0,234 cm²**.

Corrigé

Le périmètre d'un hexagone régulier de côté x est $6x$. On a donc $6x = 18$, d'où $x = 3$ mm.

D'après la question B.1.b, l'aire de l'hexagone est $A = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$. Pour $x = 3$ mm : $A = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 3^2 = \frac{27\sqrt{3}}{2}$ mm². Or $\frac{27\sqrt{3}}{2} \approx 23,38$, donc $A \approx 23,38$ mm².

Comme $1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$, on a $23,38 \text{ mm}^2 = 0,2338 \text{ cm}^2$. En arrondissant au millième, on obtient $A \approx 0,234 \text{ cm}^2$.

L'aire de l'hexagone, arrondie au millième près, vaut donc bien **0,234 cm²**.

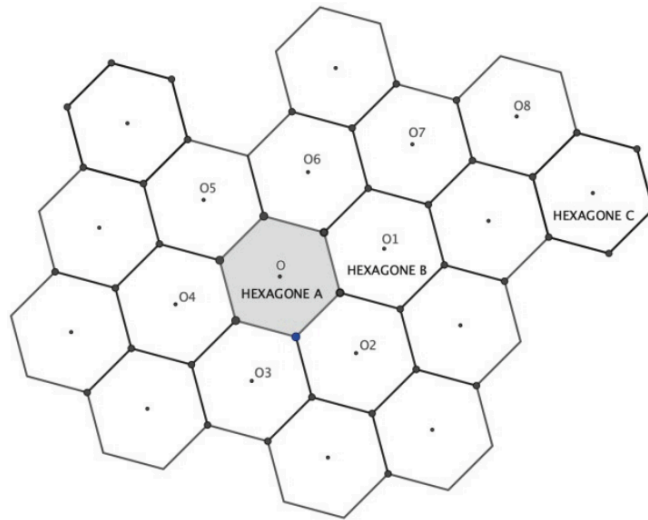
Pour comprendre en détail

L'hexagone régulier se décompose en six triangles équilatéraux identiques, ce qui justifie la formule utilisée.

À retenir : Pour les unités d'aire, le coefficient de conversion est le carré de celui des longueurs : $1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$.

Attention : On ne divise pas par 10 mais par 100 pour convertir des mm² en cm².

B.2.a Les abeilles utilisent cette forme hexagonale régulière pour paver le plan :



Corrigé

- Ces trois transformations permettent de passer de l'hexagone A à l'hexagone B.

La translation est la transformation la plus directe : elle envoie le centre O sur O_1 et conserve l'orientation des hexagones. La symétrie centrale de centre le milieu de $[OO_1]$ échange les deux centres et laisse globalement invariant le côté commun, donc échange les deux hexagones. La symétrie axiale d'axe (O_2O_6) retourne A sur B car cette droite est la médiatrice de $[OO_1]$ et contient le côté commun.

Attention : une rotation de centre O ne convient pas : elle laisse O fixe et l'hexagone A est globalement invariant pour certains angles, donc ne donne pas B.

B.2.b Caractériser une transformation qui permet de passer de l'hexagone A à l'hexagone C.

Corrigé

La transformation qui permet de passer de l'hexagone A à l'hexagone C est la **translation** de vecteur $3\overrightarrow{OO_1}$.

En effet, C est situé sur la même rangée, à droite de A, trois « pas » après A ; chaque pas correspondant à la translation de vecteur $\overrightarrow{OO_1}$.

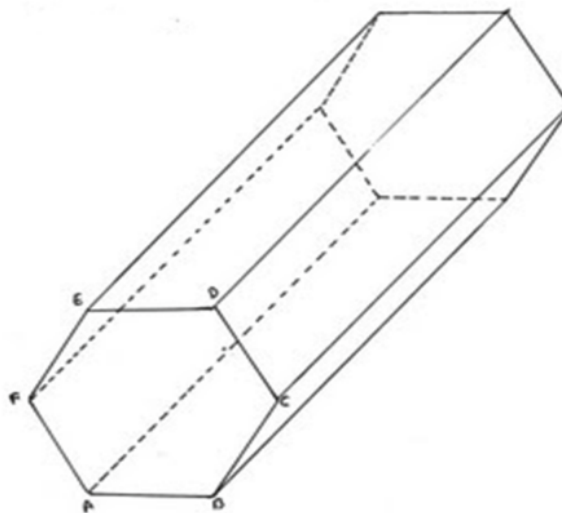
Pour comprendre en détail

À retenir : Une translation est définie par un vecteur : elle déplace toutes les figures selon la même direction, le même sens et la même longueur.

Le déplacement élémentaire qui mène d'un hexagone à son voisin direct est donné par le vecteur $\overrightarrow{OO_1}$. Comme C est situé trois positions plus loin sur la même rangée, on répète trois fois ce déplacement.

Attention : « trois hexagones plus loin » signifie trois déplacements successifs, pas trois hexagones intermédiaires.

B.3.a On admet qu'une alvéole a la forme d'un prisme régulier à base hexagonale, et est ouverte sur une face pour permettre le passage de l'abeille. On admet que la partie visible de chacune des alvéoles est un hexagone régulier dont le côté c mesure 3 mm et que la profondeur des alvéoles, notée h , mesure 11,5 mm.



Montrer que la contenance d'une alvéole est environ 270 mm^3 .

Corrigé

La contenance de l'alvéole est le volume V d'un prisme droit de base hexagonale régulière et de hauteur $h = 11,5 \text{ mm}$.

L'aire d'un hexagone régulier de côté c est $A_{\text{base}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}c^2$. Avec $c = 3 \text{ mm}$:

$$A_{\text{base}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 3^2 = \frac{27\sqrt{3}}{2} \approx 23,38 \text{ mm}^2.$$

Le volume du prisme est donc :

$$V = A_{\text{base}} \times h \approx 23,38 \times 11,5 \approx 268,9 \text{ mm}^3.$$

La contenance d'une alvéole est donc environ **270 mm³**.

Pour comprendre en détail

À retenir : L'aire d'un hexagone régulier de côté c se retrouve en le découpant en six triangles équilatéraux : $6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}c^2$. Le volume d'un prisme droit est toujours « aire de la base » hauteur ».

Attention : Toutes les longueurs sont données en mm, le volume est donc en mm³ ; aucune conversion n'est nécessaire ici. Le résultat exact est arrondi à la dizaine de mm³ pour obtenir la valeur demandée, et il ne faut pas confondre le côté de l'hexagone avec son apothème.

L'ouverture de l'alvéole ne change pas la contenance : celle-ci correspond au volume intérieur du prisme.

B.3.b En déduire la contenance d'une alvéole en millilitre.

Corrigé

On sait que **1 mL = 1 cm³ = 1 000 mm³**.

On convertit donc le volume donné :

$$270 \text{ mm}^3 = \frac{270}{1\,000} \text{ mL} = 0,27 \text{ mL}.$$

La contenance d'une alvéole est donc **0,27 mL**.

Pour comprendre en détail

La conversion repose sur les équivalences entre unités de volume et de capacité : **1 L = 1 dm³**, donc **1 mL = 1 cm³**. Un centimètre cube est le volume d'un cube de **10 mm** de côté, soit **10 × 10 × 10 = 1 000 mm³**.

Attention : ne pas confondre avec les unités de longueur : **1 cm = 10 mm**, mais pour les volumes, **1 cm³ = 1 000 mm³**, car le facteur **10** est élevé au cube.

B.3.c Construire un patron d'une alvéole à l'échelle 6 : 1.

Corrigé

L'échelle **6 : 1** est un agrandissement : les dimensions réelles sont multipliées par **6**.

- côté de l'hexagone : **3 mm × 6 = 18 mm** ;
- profondeur de l'alvéole : **11,5 mm × 6 = 69 mm**.

Le patron d'un prisme droit à base hexagonale ouvert sur une face comporte :

- **un seul hexagone régulier** de côté **18 mm** ;
- **six rectangles** de **18 mm** sur **69 mm**, correspondant aux six faces latérales.

On trace donc une rangée de six rectangles de **18 mm** par **69 mm**, accolés par leurs grands côtés, puis on fixe l'hexagone de côté **18 mm** sur l'un des petits côtés d'un rectangle.

Pour comprendre en détail

À retenir : Une échelle **6 : 1** signifie qu'une longueur réelle de **1 mm** est représentée par **6 mm** sur le patron : on multiplie donc les longueurs par **6**.

Attention : Ne pas ajouter un second hexagone : le prisme est ouvert sur une face, donc une seule base hexagonale doit apparaître dans le patron.

Pour tracer l'hexagone régulier, on peut tracer un cercle dont le rayon est égal au côté de l'hexagone, puis reporter six fois ce rayon sur le cercle.

Partie C

C.1 *En assimilant chaque alvéole à un carré dont les côtés mesurent 5 mm, montrer que l'on peut estimer qu'une telle ruche peut héberger 100 000 alvéoles.*

Corrigé

Aire d'une alvéole carrée de côté **5 mm** : $5 \text{ mm} \times 5 \text{ mm} = 25 \text{ mm}^2$.

Dimensions d'un cadre : **41 cm** = **410 mm** et **26,5 cm** = **265 mm**.

Aire d'une face de cadre : $410 \times 265 = 108\,650 \text{ mm}^2$.

Aire utile par cadre, avec ses deux faces : $2 \times 108\,650 = 217\,300 \text{ mm}^2$.

Nombre d'alvéoles par cadre : $\frac{217\,300}{25} = 8\,692$.

Pour 12 cadres : $12 \times 8\,692 = 104\,304$.

Une telle ruche peut donc héberger environ **104 304** alvéoles, soit environ **100 000** alvéoles, ce qui valide l'estimation demandée.

Pour comprendre en détail

Attention : Un cadre possède deux faces (avant et arrière) : oublier de multiplier par 2 conduit à une estimation deux fois trop faible.

À retenir : Pour estimer un nombre d'objets identiques pavant une surface, on divise l'aire totale disponible par l'aire d'un objet, après avoir converti toutes les longueurs dans la même unité.

La modélisation par des carrés de **5 mm** de côté est une approximation ; le résultat obtenu est un ordre de grandeur, pas une valeur exacte.

C.2 Montrer que le volume de miel, arrondi au litre, que peuvent contenir l'ensemble des 100 000 alvéoles d'une ruche Dadant à 12 cadres est 27 L.

Corrigé

D'après la question B.3.b, une alvéole a une contenance d'environ **0,27 mL**.

Pour 100 000 alvéoles, le volume total est :

$$100\,000 \times 0,27 = 27\,000 \text{ mL.}$$

Or $1 \text{ L} = 1\,000 \text{ mL}$, donc :

$$27\,000 \text{ mL} = 27 \text{ L.}$$

Le volume de miel pouvant être contenu dans l'ensemble des 100 000 alvéoles est donc environ **27 L**, arrondi au litre.

Pour comprendre en détail

À retenir : $1 \text{ mL} = 1 \text{ cm}^3 = 1\,000 \text{ mm}^3$.

Attention : pour convertir des mm^3 en cm^3 (donc en mL), on divise par 1 000. Pour passer des mL aux L, on divise encore par 1 000. Ne pas confondre ces deux étapes.

Le résultat obtenu est déjà un nombre entier de litres, donc l'arrondi au litre n'introduit pas de nouvelle approximation ; il s'agit toutefois d'une estimation car la contenance d'une alvéole utilisée était elle-même arrondie.

C.3.a On dispose des deux documents suivants. **Une sortie d'une abeille butineuse** : nombre de fleurs butinées : 20 à 300 ; durée de la sortie : 20 minutes ; distance parcourue : 1 km ; vitesse de l'abeille en vol : 27 km/h ; masse de nectar récolté : $6 \times 10^{-5} \text{ kg}$. **Miel** : masse volumique : 1,4 kg/L ; quantité de nectar nécessaire pour fabriquer 1 kg de miel : 4 kg.

Répondre aux questions suivantes en utilisant les documents ci-dessus et les questions précédentes.
Quelle masse de nectar doivent récolter les abeilles pour obtenir 25 g de miel ?

Corrigé

D'après le document, 1 kg de miel nécessite 4 kg de nectar.

On convertit : **25 g = 0,025 kg**.

Par proportionnalité, la masse de nectar nécessaire est :

$$0,025 \times 4 = 0,1 \text{ kg.}$$

Or **0,1 kg = 100 g**.

Les abeilles doivent donc récolter **100 g de nectar** pour obtenir 25 g de miel.

Pour comprendre en détail

À retenir : Le rapport « masse de nectar / masse de miel » vaut 4, donc on peut multiplier la masse de miel par 4 pour obtenir la masse de nectar, à condition de conserver la même unité.

Attention : Une erreur fréquente est d'oublier de convertir 25 g en kg lorsqu'on utilise **4 kg** pour **1 kg**. On peut aussi raisonner directement en grammes : **4 g** de nectar pour **1 g** de miel.

C.3.b Quelle masse de nectar doivent récolter les abeilles pour obtenir 100 mL de miel ?

Corrigé

100 mL = **0,1 L**.

Masse de 100 mL de miel : $1,4 \times 0,1 = 0,14$ kg.

Masse de nectar nécessaire : $4 \times 0,14 = 0,56$ kg.

Les abeilles doivent donc récolter **0,56 kg** de nectar.

Pour comprendre en détail

Pourquoi cette méthode : la masse volumique ρ relie une masse m à un volume V par $m = \rho \times V$; il faut donc exprimer le volume en litres pour utiliser $\rho = 1,4$ kg/L.

Attention : la question porte sur la masse de nectar, pas la masse de miel. Le document indique qu'il faut 4 kg de nectar pour produire 1 kg de miel, ce qui impose de multiplier la masse de miel obtenue par 4. Le corrigé officiel s'arrête à la masse de miel (**0,14 kg**) et omet cette dernière étape.

Une erreur fréquente est d'oublier la conversion des millilitres en litres ou d'oublier le facteur 4.

C.3.c Estimer la masse de miel que peuvent contenir l'ensemble des alvéoles d'une ruche Dadant à 12 cadres.

Corrigé

Le volume de miel que peuvent contenir les alvéoles de la ruche Dadant à 12 cadres a été estimé à 27 L à la question C.2. La masse volumique du miel est **1,4 kg/L**.

On a $m = \rho \times V$, donc :

$m = 27 \text{ L} \times 1,4 \text{ kg/L} = 37,8$ kg.

L'ensemble des alvéoles d'une ruche Dadant à 12 cadres peut contenir environ **37,8 kg** de miel.

Pour comprendre en détail

À retenir : La masse volumique ρ est définie par $\rho = \frac{m}{V}$, d'où $m = \rho \times V$.

Attention : Ici, le volume est en litres et la masse volumique en kg/L, la masse obtenue est directement en kilogrammes ; une conversion en mL ou cm³ n'est pas nécessaire et pourrait introduire une erreur.

Cette valeur est une estimation : la masse volumique du miel et le volume des alvéoles sont des données approchées. La cohérence peut se vérifier en remarquant que le miel est plus dense que l'eau.

C.3.d Montrer qu'une estimation de la distance parcourue par l'ensemble des abeilles pour obtenir 1 kilogramme de miel est de 67 000 km.

Corrigé

D'après le document, il faut 4 kg de nectar pour fabriquer 1 kg de miel.

Une sortie d'abeille butineuse récolte 6×10^{-5} kg de nectar, donc le nombre de sorties nécessaires est :

$$\frac{4}{6 \times 10^{-5}} \approx 66\,667.$$

Chaque sortie correspond à une distance parcourue de 1 km, donc la distance totale est environ $66\,667 \times 1 = 66\,667$ km, soit environ 67 000 km.

Pour comprendre en détail

À retenir : Pour passer d'une masse de nectar à un nombre de sorties, on divise la masse totale de nectar par la masse récoltée lors d'une sortie ; le résultat est un nombre de sorties, sans unité.

On utilise ici une estimation : la masse de nectar par sortie est donnée comme une valeur fixe 6×10^{-5} kg, alors que le document indique une fourchette de fleurs butinées. L'arrondi final à 67 000 km est cohérent avec la précision des données.

Attention : Ne pas confondre la masse de nectar et la masse de miel : ici, 1 kg de miel demande 4 kg de nectar, et c'est bien le nectar qui est récolté lors des sorties.

C.3.e Estimer la distance parcourue par l'ensemble des abeilles pour remplir de miel l'ensemble des alvéoles d'une ruche Dadant à 12 cadres (sans compter le miel consommé par les abeilles elles-mêmes).

Corrigé

D'après la question C.3.c, la masse de miel contenue dans la ruche est :

$$27 \times 1,4 = 37,8 \text{ kg.}$$

D'après la question C.3.d, il faut parcourir environ 67 000 km pour produire 1 kg de miel.

La distance totale parcourue est donc :

$$37,8 \times 67\,000 = 2\,532\,600 \text{ km.}$$

Les abeilles parcourent donc environ 2,5 millions de kilomètres pour remplir les alvéoles de la ruche, soit plus de 60 fois le tour de la Terre.

Pour comprendre en détail

On combine ici deux résultats intermédiaires : la contenance de la ruche a été convertie en masse de miel grâce à la masse volumique (1,4 kg/L), puis la question C.3.d a traduit cette masse en distance parcourue à raison de 67 000 km par kilogramme de miel.

Comme 67 000 km est une valeur arrondie, le résultat obtenu est lui aussi une estimation ; un calcul avec la valeur exacte $\frac{4}{6 \times 10^{-5}} \approx 66\,667$ km donnerait environ 2 520 000 km, ce qui reste cohérent

avec l'ordre de grandeur attendu.

Attention : Ne pas utiliser seulement **25 g** ou **100 mL** de miel (questions C.3.a et C.3.b) : la question porte sur le remplissage complet de la ruche, donc sur la masse totale **37,8 kg**.

Exercice 2

- 1 On tire au hasard une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule bleue ?

Corrigé

Les quatre couleurs (rouge, verte, noire, bleue) couvrent toutes les issues possibles, donc la somme de leurs probabilités vaut 1.

$$P(\text{bleue}) = 1 - P(\text{rouge}) - P(\text{verte}) - P(\text{noire}) = 1 - \frac{1}{4} - 0,3 - 0,2 = 1 - 0,25 - 0,3 - 0,2 = 0,25.$$

La probabilité de tirer une boule bleue est donc 0,25, soit $\frac{1}{4}$ ou 25%.

Pour comprendre en détail

On utilise le fait que les quatre couleurs forment une partition de l'univers : leurs probabilités ont une somme égale à 1. La probabilité cherchée est donc le complément à 1 des trois probabilités connues.

À retenir : Pour des événements incompatibles qui couvrent toutes les issues, la somme de leurs probabilités vaut 1.

Attention : 20% doit être converti en 0,2, et 0,3 correspond à $\frac{3}{10}$, pas à 3%.

Autre méthode : exprimer toutes les probabilités en fractions ($\frac{1}{4}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{5}$) permet d'obtenir le même complément à 1.

- 2 Il y a 140 boules dans l'urne. Donner le nombre de boules de chaque couleur.

Corrigé

Les boules sont indiscernables au toucher : chaque boule a la même probabilité d'être tirée.

Les probabilités de tirer une boule rouge, verte et noire sont respectivement $\frac{1}{4} = 0,25$, 0,3 et 20% = 0,2.

La somme des probabilités de toutes les issues vaut 1, donc :

$$P(\text{bleue}) = 1 - (0,25 + 0,3 + 0,2) = 1 - 0,75 = 0,25.$$

Comme il y a 140 boules, on obtient :

- boules rouges : $0,25 \times 140 = 35$
- boules bleues : $0,25 \times 140 = 35$
- boules noires : $0,2 \times 140 = 28$

- boules vertes : $0,3 \times 140 = 42$

Il y a donc 35 boules rouges, 35 boules bleues, 28 boules noires et 42 boules vertes.

Pour comprendre en détail

À retenir : Lorsque les boules sont indiscernables au toucher, chaque boule a la même probabilité d'être tirée : la probabilité d'une couleur est le quotient du nombre de boules de cette couleur par le nombre total de boules. Pour retrouver un effectif, on multiplie la probabilité par l'effectif total.

Attention : Ne pas confondre probabilité (nombre entre 0 et 1) et effectif (nombre de boules). Penser à vérifier que les effectifs trouvés totalisent bien 140.

On peut aussi raisonner avec des fractions sur 100 : $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$, $0,3 = \frac{30}{100}$, $20\% = \frac{20}{100}$; la part restante est alors $\frac{25}{100}$.

3.a On effectue maintenant deux tirages successifs avec remise. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge puis une boule verte ?

Corrigé

Notons R l'événement « tirer une boule rouge » et V l'événement « tirer une boule verte ».

On a $P(R) = \frac{1}{4} = 0,25$ et $P(V) = 0,3$.

Les deux tirages sont successifs avec remise, donc les événements sont indépendants.

Ainsi $P(R \text{ puis } V) = P(R) \times P(V) = 0,25 \times 0,3 = 0,075$.

La probabilité de tirer une boule rouge puis une boule verte est donc **0,075**, soit **7,5 %**.

Pour comprendre en détail

La clé est que le tirage « avec remise » rend les deux épreuves indépendantes : le second tirage se fait dans les mêmes conditions que le premier.

À retenir : si deux événements A et B sont indépendants, $P(A \text{ puis } B) = P(A) \times P(B)$.

Attention : ici la probabilité de tirer une boule verte est **0,3**, pas **0,25**. Une version erronée du corrigé officiel écrit $0,25 \times 0,25 = 0,0625$; cela confond la probabilité de la boule verte (**0,3**) avec celle de la boule rouge ou de la boule bleue (**0,25**).

3.b Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge et une boule verte ?

Corrigé

Notons R l'événement « tirer une boule rouge » et V l'événement « tirer une boule verte ». Les tirages sont avec remise, donc les deux tirages sont indépendants.

L'issue « une boule rouge et une boule verte » peut se réaliser de deux façons : rouge puis verte, ou verte puis rouge.

$$P(R \text{ puis } V) = 0,25 \times 0,3 = 0,075$$

$$P(V \text{ puis } R) = 0,3 \times 0,25 = 0,075$$

Donc $P(\text{une rouge et une verte}) = 0,075 + 0,075 = 0,15$, soit $2 \times 0,25 \times 0,3 = 0,15$.

La probabilité de tirer une boule rouge et une boule verte est 0,15.

Pour comprendre en détail

À retenir : Lors de tirages avec remise, le second tirage est indépendant du premier : on multiplie les probabilités des événements successifs.

Attention : « une boule rouge et une boule verte » ne précise pas l'ordre des tirages. Il faut donc compter les deux ordres possibles, rouge puis verte ou verte puis rouge, et additionner leurs probabilités. Ne pas confondre avec la question 3.a qui imposait l'ordre rouge puis verte.

On peut aussi visualiser la situation avec un arbre de probabilités : les deux branches $R \rightarrow V$ et $V \rightarrow R$ sont les issues favorables.

3.c Quelle est la probabilité de tirer deux boules de la même couleur ?

Corrigé

Notons N l'issue « tirer une boule noire », R « tirer une boule rouge », V « tirer une boule verte » et B « tirer une boule bleue ».

Les tirages étant avec remise, ils sont indépendants. Les quatre issues favorables sont $(N; N)$, $(R; R)$, $(V; V)$ et $(B; B)$, qui sont incompatibles entre elles.

$$\begin{aligned} P(\text{deux boules de même couleur}) &= P(N; N) + P(R; R) + P(V; V) + P(B; B) \\ &= 0,20^2 + 0,25^2 + 0,30^2 + 0,25^2 = 0,04 + 0,0625 + 0,09 + 0,0625 = 0,255. \end{aligned}$$

La probabilité de tirer deux boules de la même couleur est donc 0,255, soit 25,5 %.

Pour comprendre en détail

On additionne les probabilités des issues favorables car elles sont disjointes : le tirage ne peut pas être à la fois deux boules rouges et deux boules bleues.

À retenir : Pour deux tirages avec remise, $P(A \text{ puis } B) = P(A) \times P(B)$.

Attention : Ne pas multiplier par 2 ici : demander « deux boules de la même couleur » ne demande pas un ordre précis ; la paire rouge-rouge n'a qu'une seule réalisation.

Autre approche possible : calculer la probabilité de l'événement contraire « deux couleurs différentes » puis utiliser le fait que la somme des probabilités vaut 1.

Exercice 3

- 1 Montrer que si le nombre de départ est 2, on obtient 16 avec chacun des deux algorithmes.

Corrigé

Algorithme 1 : $2 + 3 = 5$; $5 \times 5 = 25$; $25 - 9 = 16$.

Algorithme 2 : $2 + 6 = 8$; $8 \times 2 = 16$.

Ainsi, avec un nombre de départ égal à 2, les deux algorithmes affichent 16.

Pour comprendre en détail

On applique les instructions séquentiellement, en lisant chaque bloc l'un après l'autre.

À retenir : dans Scratch, la variable *réponse* garde la valeur saisie au clavier ; la variable *Résultat* est mise à jour à chaque bloc.

Attention : dans l'algorithme 2, après l'ajout de 6, il faut multiplier par le nombre de départ (*réponse* = 2), pas par le résultat intermédiaire 8 : on obtiendrait alors 64 au lieu de 16.

Autre vision possible : pour un nombre de départ x , l'algorithme 1 calcule $(x + 3)^2 - 9$ et l'algorithme 2 calcule $x(x + 6)$.

- 2 Le nombre de départ est 1,2. Quel(s) nombre(s) obtient-on avec chacun des deux algorithmes ?

Corrigé

Algorithme 1 : $1,2 + 3 = 4,2$; $4,2^2 = 17,64$; $17,64 - 9 = 8,64$.

Algorithme 2 : $1,2 + 6 = 7,2$; $7,2 \times 1,2 = 8,64$.

Avec le nombre de départ 1,2, chacun des deux algorithmes donne 8,64.

Pour comprendre en détail

À retenir : Dans un programme de calcul, on applique les opérations dans l'ordre des blocs. Le bloc « mettre Résultat à Résultat $\times$ Résultat » élève la valeur actuelle de Résultat au carré.

Attention : Pour l'algorithme 2, le second bloc utilise la variable « réponse » qui contient encore le nombre de départ 1,2, et non la valeur 7,2 déjà modifiée.

On peut aussi remarquer que les deux expressions sont égales : $(x + 3)^2 - 9 = x^2 + 6x$ et $(x + 6)x = x^2 + 6x$, donc les deux algorithmes donnent toujours le même résultat pour n'importe quel nombre de départ x .

Corrigé

Conjecture : les deux algorithmes donnent toujours le même résultat, quel que soit le nombre choisi au départ.

Notons x le nombre saisi.

Algorithme 1 :

On ajoute 3 : $x + 3$.

On élève au carré : $(x + 3)^2$.

On soustrait 9 : $(x + 3)^2 - 9$.

À l'aide de l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, on développe :

$$(x + 3)^2 - 9 = x^2 + 6x + 9 - 9 = x^2 + 6x.$$

Algorithme 2 :

On ajoute 6 : $x + 6$.

On multiplie par le nombre de départ : $(x + 6) \times x$.

En développant :

$$(x + 6) \times x = x^2 + 6x.$$

Les deux algorithmes conduisent donc à la même expression littérale $x^2 + 6x$. La conjecture est démontrée : les deux algorithmes donnent toujours le même résultat.

Pour comprendre en détail

Pour démontrer une conjecture valable pour tous les nombres de départ, il ne suffit pas de vérifier quelques valeurs : on utilise une lettre x qui représente un nombre quelconque et on exprime le résultat de chaque programme.

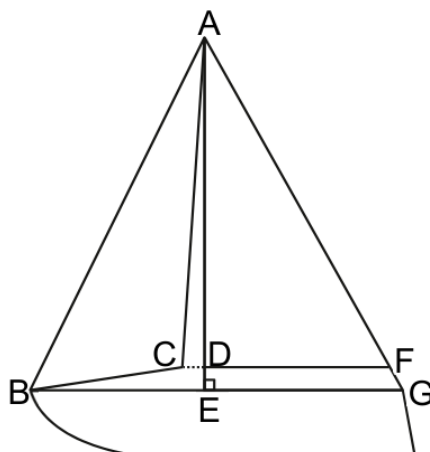
À retenir : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; ici $(x + 3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$.

Attention : une erreur fréquente est d'écrire $(x + 3)^2 = x^2 + 9$ en oubliant le double produit $2 \times x \times 3$.

Une vérification des questions précédentes (par exemple $x = 2$ donne **16** pour les deux algorithmes) confirme la cohérence, mais la démonstration générale repose sur l'égalité des expressions.

Exercice 4

- 1 En utilisant le théorème de Thalès dans le triangle AEG , déterminer la longueur de la bôme $[DF]$.



Vue en coupe du bateau
La figure n'est pas à l'échelle.

Corrigé

Dans le triangle AEG , D est sur $[AE]$, F est sur $[AG]$ et les droites (DF) et (EG) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AF}{AG} = \frac{DF}{EG}$$

On a :

$$AD = AE - DE = 12 - 1 = 11 \text{ m ;}$$

$$EG = BG - BE = 11 - 5 = 6 \text{ m.}$$

Donc :

$$\frac{11}{12} = \frac{DF}{6}$$

d'où :

$$DF = 6 \times \frac{11}{12} = \frac{66}{12} = 5,5$$

La longueur de la bôme $[DF]$ est 5,5 m.

Pour comprendre en détail

Pour appliquer le théorème de Thalès, on vérifie les conditions : D est sur $[AE]$, F est sur $[AG]$ et (DF) est parallèle à (EG) .

À retenir : Dans une configuration de triangles emboîtés, les longueurs des côtés du petit triangle sont proportionnelles à celles du grand triangle. On écrit le rapport des côtés correspondants.

Attention : Il faut d'abord exprimer AD et EG en fonction des données : $AD = AE - DE$ et $EG = BG - BE$, car E est entre B et G . Ne pas utiliser BG comme longueur de EG .

Une autre rédaction possible est d'écrire $\frac{AD}{AE} = \frac{DF}{EG}$ puis d'effectuer un produit en croix.

2 Calculer l'aire de la grand-voile.

Corrigé

Les droites (DF) et (EG) sont parallèles et (EG) est perpendiculaire à (AE) . Or, si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre, donc $(DF) \perp (AE)$.

Le triangle ADF est donc rectangle en D . De plus, $AD = AE - DE = 12 - 1 = 11$ m. D'après la question 1, $DF = 5,5$ m.

$$\text{Aire de la grand-voile} = \frac{1}{2} \times AD \times DF = \frac{1}{2} \times 11 \times 5,5 = 30,25 \text{ m}^2.$$

L'aire de la grand-voile est **30,25 m²**.

Pour comprendre en détail

Pourquoi cette méthode ? L'aire d'un triangle rectangle est la moitié du produit des deux côtés de l'angle droit. Ici, AD et DF sont ces côtés, donc il n'est pas nécessaire de chercher une autre hauteur.

Attention : AD n'est pas égal à AE . Il faut soustraire $DE = 1$ m pour obtenir $AD = 11$ m.

3.a Lorsque le vent forçit, on remplace le foc par une voile plus petite appelée trinquette. La trinquette est une réduction du foc de coefficient $\frac{4}{5}$ (appliquée aux longueurs). Calculer l'aire du triangle ADC et du quadrilatère $BCDE$.

Corrigé

Le triangle ADC est rectangle en D car $(AD) \perp (DC)$.

On a $AD = AE - DE = 12 - 1 = 11$ m et $DC = 1$ m.

$$\text{Aire de } ADC : \frac{1}{2} \times AD \times DC = \frac{1}{2} \times 11 \times 1 = 5,5 \text{ donc } 5,5 \text{ m}^2.$$

Le quadrilatère $BCDE$ est un trapèze rectangle de bases parallèles $[BE]$ et $[CD]$, et de hauteur $[DE]$.

$$\text{Aire de } BCDE : \frac{(BE + CD) \times DE}{2} = \frac{(5 + 1) \times 1}{2} = 3 \text{ donc } 3 \text{ m}^2.$$

Conclusion : l'aire du triangle ADC est $5,5 \text{ m}^2$ et celle du quadrilatère BCDE est 3 m^2 .

Pour comprendre en détail

Le calcul de l'aire du triangle utilise le fait que (AD) et (DC) sont perpendiculaires. Pour le quadrilatère, on applique la formule de l'aire d'un trapèze.

$$\begin{aligned}\text{À retenir : Aire du trapèze} &= \frac{(\text{grande base} + \text{petite base}) \times \text{hauteur}}{2} ; \\ \text{Aire du triangle rectangle} &= \frac{\text{côté} \times \text{côté perpendiculaire}}{2}.\end{aligned}$$

Attention : l'énoncé transcrit est ambigu : pour que BCDE soit un trapèze, il faut que $[CD]$ soit parallèle à $[BE]$, donc que C soit sur la parallèle à la coque passant par D, et non sur le mât comme pourrait le laisser croire « C et D sur le mât ». Vérifier la figure utilisée.

3.b En déduire que l'aire du foc (ABC) est de $21,5 \text{ m}^2$.

Corrigé

Le triangle ABE est rectangle en E car $(AE) \perp (BG)$ et les points B, E, G sont alignés.

Son aire est donc :

$$\frac{1}{2} \times AE \times BE = \frac{1}{2} \times 12 \times 5 = 30 \text{ m}^2.$$

Le foc ABC est la partie restante du triangle ABE après avoir enlevé le triangle ADC et le quadrilatère $BCDE$.

Ainsi :

$$\text{Aire}(ABC) = \text{Aire}(ABE) - \text{Aire}(ADC) - \text{Aire}(BCDE)$$

$$\text{Aire}(ABC) = 30 - 5,5 - 3 = 21,5 \text{ m}^2.$$

L'aire du foc ABC est donc bien $21,5 \text{ m}^2$.

Pour comprendre en détail

La décomposition repose sur l'observation de la figure : le triangle ABE est partagé en trois pièces disjointes qui le recouvrent entièrement : le triangle ABC , le triangle ADC et le quadrilatère $BCDE$.

À retenir : L'aire d'un triangle rectangle vaut $\frac{1}{2} \times \text{côté de l'angle droit}$
 $\times \text{autre côté de l'angle droit}$.

Attention : Pour la base du triangle ABE , il faut utiliser $BE = 5 \text{ m}$, et non $BG = 11 \text{ m}$.

3.c En déduire l'aire de la trinquette.

Corrigé

La trinquette est une réduction du foc de coefficient $\frac{4}{5}$.

Les aires sont donc multipliées par $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$.

Aire du foc : **21,5 m²**.

Aire de la trinquette :

\[

$\frac{16}{25} \times 21 = \frac{336}{25} = 13,44$

\]

L'aire de la trinquette est donc **13,44 m²**.

Pour comprendre en détail

À retenir : Dans un agrandissement ou une réduction de coefficient k , les longueurs sont multipliées par k et les aires sont multipliées par k^2 .

Attention : Une erreur fréquente est de multiplier l'aire par $\frac{4}{5}$ au lieu de $\left(\frac{4}{5}\right)^2$. Ici, $21,5 \times \frac{4}{5} = 17,2$, mais ce n'est pas l'aire de la trinquette.

Autre vérification possible : la trinquette étant plus petite que le foc, son aire doit être inférieure à **21,5 m²**, ce qui est bien le cas avec **13,44 m²**.

- 4** Pour cette question, on admet que l'aire de la surface totale des voiles (grand-voile, foc et trinquette) est égale à **65,51 m²**. La propriétaire hésite entre deux voileries pour la fabrication de ses voiles.

Maître voilier local	Usine en Asie
Tarif : 86 €/m ² . Qualité du tissu : 340 g/m ² . Livraison offerte.	Tarif de base : 64 €/m ² . Qualité du tissu : 340 g/m ² . Taxes d'importation : 32 % du prix de base de la marchandise. Frais de port à la charge du client.

Frais de port de l'Asie vers la France	
Masse (en kg, arrondie à l'unité)	Prix à payer
Entre 5 et 10	100 €
Entre 11 et 18	150 €
Entre 19 et 25	250 €
Au-delà de 26 kg	Contactez le service client

Déterminer la solution la plus économique en justifiant la réponse.

Corrigé

Coût chez le maître voilier local :

- $86 \times 65,51 = 5\,633,86$ €.

Coût à l'usine en Asie :

- Prix de base du tissu : $64 \times 65,51 = 4\,192,64$ €.
- Prix avec taxes d'importation (+ 32 %) : $4\,192,64 \times 1,32 = 5\,534,28$ €.

- Masse des voiles : $340 \text{ g/m}^2 = 0,34 \text{ kg/m}^2$, donc $0,34 \times 65,51 \approx 22,3 \text{ kg}$, arrondie à l'unité : **22 kg**.
- Frais de port pour 22 kg : **250 €**.
- Coût total : $5\,534,28 + 250 = 5\,784,28 \text{ €}$.

Comparaison : $5\,633,86 < 5\,784,28$.

La solution la plus économique est le maître voilier local.

Pour comprendre en détail

À retenir : Pour calculer la masse d'une voile, on multiplie son aire par sa masse surfacique exprimée en kg/m^2 : ici $340 \text{ g/m}^2 = 0,34 \text{ kg/m}^2$. L'arrondi à l'unité se fait au plus proche : une masse d'environ 22,3 kg s'arrondit à 22 kg.

Attention : Il ne faut pas oublier les taxes d'importation ni les frais de port dans le coût de l'usine en Asie. L'arrondi de la masse doit être effectué avant de choisir le forfait de port, et un arrondi par excès (à 23 kg) serait ici incorrect.

Une autre présentation possible consiste à calculer séparément 32 % du prix de base puis à additionner cette taxe, plutôt que de multiplier directement par 1,32. L'écart entre les deux devis étant faible, il est important de conserver une précision suffisante dans les calculs.