

ANNALES CRPE · MATHÉMATIQUES · 2022

Corrigé détaillé

CRPE 2022 – Mathématiques – Groupement 3

Épreuve écrite disciplinaire de mathématiques (2e épreuve d'admissibilité)

Durée : 3 heures

20 points

Exercice 1

Exercice 2

Exercice 3

Exercice 4

Pour chaque question : **rappel de l'énoncé**, **corrigé** rédigé, puis « **Pour comprendre en détail** » (méthode, rappels de cours, erreurs fréquentes). À utiliser avec le sujet officiel (documents, tableaux et figures).

Sujet : Ministère de l'Éducation nationale – session 2022. Corrigé rédigé par Campus XYZ – campusxyz.fr. Tous droits réservés.

Exercice 1

- 1 Quel est le volume d'un cylindre d'une hauteur de 6 cm et de base un disque d'un diamètre de 8 cm ? On rappelle que le volume d'un cylindre se calcule avec la formule suivante : aire de la base $\times$ hauteur.

A : $48\pi \text{ cm}^3$ · B : $96\pi \text{ cm}^3$ · C : $144\pi \text{ cm}^3$ · D : $384\pi \text{ cm}^3$

Corrigé

Le rayon du disque de base est la moitié du diamètre : $r = \frac{8}{2} = 4 \text{ cm}$.

L'aire de la base est $\pi r^2 = \pi \times 4^2 = 16\pi \text{ cm}^2$.

Le volume du cylindre est donc : $16\pi \times 6 = 96\pi \text{ cm}^3$.

La bonne réponse est la réponse B.

Pour comprendre en détail

À retenir : Pour un cylindre, $V = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$; si la base est un disque, $\text{aire de la base} = \pi r^2$, où r est le rayon.

Attention : Ici, 8 cm est le *diamètre*, pas le rayon. Utiliser 8 cm comme rayon conduirait à la réponse D, $384\pi \text{ cm}^3$. Le rayon vaut bien 4 cm.

Autre vérification rapide : $4^2 \times 6 = 16 \times 6 = 96$, donc le coefficient de π est bien 96.

- 2 Le 1^{er} juin, Nicolas lance une rumeur en la partageant avec trois personnes. Chaque jour, une personne prévenue la veille prévient trois nouvelles personnes qui ne sont pas encore informées. Combien de personnes apprennent la rumeur le 10 juin ?

A : 30 · B : 1 000 · C : 59 049 · D : 177 147

Corrigé

Le 1^{er} juin, 3 personnes apprennent la rumeur : $3 = 3^1$.

Le 2 juin, chacune de ces 3 personnes prévient 3 nouvelles personnes, donc $3 \times 3 = 3^2$ personnes apprennent la rumeur.

Le nombre de nouvelles personnes informées est donc multiplié par 3 chaque jour : le n -ième jour, 3^n personnes apprennent la rumeur.

Du 1^{er} au 10 juin, il s'écoule 10 jours, donc le 10 juin, le nombre de personnes qui apprennent la rumeur est :

$$3^{10} = 59\,049$$

La bonne réponse est la **réponse C**.

Pour comprendre en détail

À retenir : lorsqu'une quantité est multipliée par un même nombre à chaque étape, on peut utiliser une suite géométrique. Ici, le premier terme est $u_1 = 3$ et la raison est 3 , donc $u_n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$ pour le n -ième jour.

Attention : le 1^{er} juin correspond déjà à 3^1 et non à 3^0 : il ne faut donc pas prendre 3^9 pour le 10 juin. De plus, on ne demande pas le nombre total de personnes informées depuis le début, mais uniquement celles qui apprennent la rumeur le 10 juin.

Une autre méthode consiste à multiplier de proche en proche jour par jour, ce qui permet de vérifier la cohérence du résultat.

3 Le prix d'un article subit une hausse de 10 % suivie d'une baisse de 10 % quelques semaines plus tard. Au final :

A : le prix de l'article a baissé de 1 % · **B :** l'article a retrouvé son prix initial · **C :** le prix de l'article a augmenté de 1 % · **D :** le prix de l'article a augmenté de 5 %.

Corrigé

Une hausse de 10 % revient à multiplier le prix par $1 + \frac{10}{100} = 1,10$.

Une baisse de 10 % revient à multiplier le prix par $1 - \frac{10}{100} = 0,90$.

Le coefficient multiplicateur global est donc :

$$1,10 \times 0,90 = 0,99 = 1 - 0,01.$$

Cela correspond à une baisse de 1 %.

La bonne réponse est la **A**.

Pour comprendre en détail

À retenir : Une évolution de $t\%$ se traduit par le coefficient multiplicateur $1 + \frac{t}{100}$ pour une hausse et $1 - \frac{t}{100}$ pour une baisse. Pour des évolutions successives, on multiplie les coefficients multiplicateurs.

Attention : Une hausse de 10 % suivie d'une baisse de 10 % ne ramène pas au prix initial, car la baisse s'applique au prix déjà augmenté.

Autre méthode : partir d'un prix de 100 €. Après la hausse, il vaut 110 € ; après la baisse de 10 %, il baisse de 11 € et vaut 99 €, soit une baisse globale de 1 %.

4

$\frac{4}{25}$ est...

A : un nombre réel mais n'est pas un nombre rationnel · **B** : un nombre rationnel mais n'est pas un nombre décimal · **C** : un nombre décimal mais n'est pas un nombre entier · **D** : un nombre entier.

Corrigé

$$\frac{4}{25} = \frac{4 \times 4}{25 \times 4} = \frac{16}{100} = 0,16.$$

0,16 admet une écriture décimale finie, c'est donc un nombre décimal.

De plus, $0 < 0,16 < 1$, donc ce n'est pas un entier.

La bonne réponse est la **C**.

Pour comprendre en détail

À retenir : un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$, avec a entier et n entier naturel. Il possède une écriture décimale finie.

Attention : un nombre entier est aussi un nombre décimal ; ici, la réponse D est exclue car 0,16 n'est pas entier.

Une autre méthode consiste à poser la division décimale de 4 par 25 pour constater que l'écriture s'arrête.

5

Le quart de $\frac{4}{12}$ est...

$$A : \frac{1}{3} \cdot B : \frac{4}{3} \cdot C : \frac{16}{48} \cdot D : \frac{4}{48}$$

Corrigé

Le quart de $\frac{4}{12}$ se calcule ainsi :

$$\frac{1}{4} \times \frac{4}{12} = \frac{4}{48}.$$

En simplifiant par 4, $\frac{4}{48} = \frac{1}{12}$. Cette valeur correspond à la réponse **D**.

Pour comprendre en détail

Attention : ne pas confondre « le quart de $\frac{4}{12}$ » avec la simplification de $\frac{4}{12}$. La simplification donne $\frac{1}{3}$, mais le quart de cette fraction est inférieur à $\frac{1}{3}$.

Prendre une fraction d'une quantité ou d'une autre fraction se traduit toujours par une multiplication : ici, multiplier par $\frac{1}{4}$ équivaut à diviser par 4.

6 $\frac{2}{3} \times 5 + 5 \times \frac{1}{3}$ est égal à...

A : 5 · B : $\frac{20}{9}$ · C : $\frac{15}{15}$ · D : $\frac{20}{90}$

Corrigé

En factorisant par le facteur commun 5 :

$$\frac{2}{3} \times 5 + 5 \times \frac{1}{3} = 5 \times \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) = 5 \times 1 = 5.$$

La réponse exacte est la **A**.

Pour comprendre en détail

À retenir : On utilise la distributivité $a \times c + b \times c = (a + b) \times c$ avec ici $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$ et $c = 5$.

Attention : Une erreur fréquente est d'additionner les dénominateurs des fractions ou de poser $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6}$. Ici, les dénominateurs sont identiques, on additionne seulement les numérateurs.

Autre méthode possible : effectuer d'abord les multiplications, puis additionner les fractions de même dénominateur.

7 Le triangle ABC est rectangle en B. De plus, **AB** = 8 cm et **AC** = 10 cm. L'aire du triangle ABC est...

A : 24 cm² · B : 40 cm² · C : 48 cm² · D : 80 cm²

Corrigé

Le triangle ABC est rectangle en B, donc [AC] est l'hypoténuse. D'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AC^2 - AB^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36, \text{ donc } BC = \sqrt{36} = 6 \text{ cm.}$$

L'aire d'un triangle rectangle est le demi-produit des deux côtés de l'angle droit :

$$\mathcal{A} = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{8 \times 6}{2} = 24 \text{ cm}^2.$$

La bonne réponse est donc **A : 24 cm²**.

Pour comprendre en détail

Attention : Pour l'aire d'un triangle rectangle, on doit utiliser les deux côtés perpendiculaires, ici AB et BC. Le côté AC = 10 cm est l'hypoténuse, ce n'est pas une hauteur. Une erreur fréquente est de calculer $8 \times 10 \div 2 = 40 \text{ cm}^2$ en utilisant l'hypoténuse comme hauteur.

On peut aussi remarquer que les longueurs 6, 8, 10 correspondent à un triangle rectangle multiple du triplet 3, 4, 5, ce qui permet de retrouver rapidement BC = 6 cm.

Exercice 2

1.a Comparer les durées moyennes de course.

Corrigé

Durée totale de Célia :

$$33 \text{ min } 12 \text{ s} + 32 \text{ min } 4 \text{ s} + 40 \text{ min } 25 \text{ s} + 27 \text{ min } 11 \text{ s} + 30 \text{ min} + 26 \text{ min } 38 \text{ s} \\ + 29 \text{ min } 1 \text{ s} = 217 \text{ min } 91 \text{ s} = 218 \text{ min } 31 \text{ s} = 13\,111 \text{ s}.$$

$$\text{Moyenne de Célia : } \frac{13\,111}{7} = 1\,873 \text{ s} = 31 \text{ min } 13 \text{ s}.$$

La durée moyenne de course de Célia est donc égale à celle de sa sœur, soit **31 min 13 s**.

Pour comprendre en détail

Pour comparer deux moyennes, on les exprime dans la même unité. Convertir toutes les durées en secondes avant d'additionner permet d'éviter les erreurs de retenue entre minutes et secondes lors de la division.

À retenir : une moyenne est la somme des valeurs divisée par l'effectif total, ici le nombre de jours d'entraînement (7).

Attention : 91 secondes valent 1 min 31 s, donc 217 min 91 s se convertit bien en 218 min 31 s et non en 217,91 minutes.

Une autre méthode consiste à additionner séparément les minutes et les secondes, à convertir les secondes excédentaires en minutes, puis à diviser le total par 7.

1.b Comparer les durées médianes de course.

Corrigé

On range les durées de Célia dans l'ordre croissant : 26 min 38 s ; 27 min 11 s ; 29 min 1 s ; 30 min ; 32 min 4 s ; 33 min 12 s ; 40 min 25 s. L'effectif total est 7 ; la médiane est donc la 4^e valeur, soit 30 min. La sœur a une médiane de 30 min. Ainsi, les deux médianes sont égales (30 min chacune).

Pour comprendre en détail

À retenir : La médiane partage la série en deux groupes de même effectif. Pour 7 valeurs, sa position est $\frac{7+1}{2} = 4$, donc on prend la 4^e valeur après classement, sans faire de moyenne.

Attention : Il ne faut pas confondre médiane et moyenne. La médiane est une valeur effective de la série (ici 30 min), pas un résultat de calcul. On pouvait aussi convertir toutes les durées en secondes pour les ranger, mais la comparaison directe suffit.

- 1.c** Avec les informations ci-dessus, Célia affirme « Je suis la seule de nous deux à avoir réussi à effectuer ce parcours en moins de 28 minutes cette semaine ». Cette affirmation est-elle vraie ?

Corrigé

Célia a couru le parcours en **26 min 38 s** le samedi et en **27 min 11 s** le jeudi : elle a donc bien effectué le parcours en moins de 28 min.

Pour sa sœur, notons m son temps minimum et M son temps maximum. L'étendue est de 3 min, donc $M = m + 3$.

Supposons que sa sœur ait couru en moins de 28 min. On aurait alors $m < 28$ min, donc $M = m + 3 < 31$ min. Tous ses temps seraient donc strictement inférieurs à 31 min, et sa moyenne serait strictement inférieure à 31 min.

Or sa moyenne est de **31 min 13 s**, ce qui est supérieur à 31 min. C'est contradictoire.

Sa sœur n'a donc pas pu courir en moins de 28 min. L'affirmation de Célia est **vraie**.

Pour comprendre en détail

À retenir : L'étendue d'une série est la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale : $M - m$.

La médiane de la sœur (30 min) ne suffit pas à elle seule pour conclure : elle indique seulement que la 4^e valeur est 30 min, mais les trois plus petites durées pourraient être inférieures à 28 min. C'est le lien entre l'étendue et la moyenne qui permet de trancher.

Attention : Ne pas considérer que « moins de 28 min » implique $m \leq 28$ min puis conclure trop rapidement : le raisonnement montre ici que même $m = 28$ min serait impossible, car la moyenne serait alors inférieure ou égale à 31 min.

- 1.d** Avec les informations ci-dessus, sa sœur lui répond « Moi, j'ai été la plus régulière de nous deux sur la semaine ». Expliquer ce commentaire.

Corrigé

La régularité se mesure avec un indicateur de dispersion : ici, l'**étendue**.

Pour Célia, la durée maximale est **40 min 25 s** et la durée minimale est **26 min 38 s**.

Étendue de Célia :

$$40 \text{ min } 25 \text{ s} - 26 \text{ min } 38 \text{ s} = 13 \text{ min } 47 \text{ s}.$$

Étendue de la sœur : **3 min**.

Comme **3 min** < **13 min 47 s**, les temps de la sœur sont beaucoup plus regroupés : elle est donc **plus régulière** que Célia.

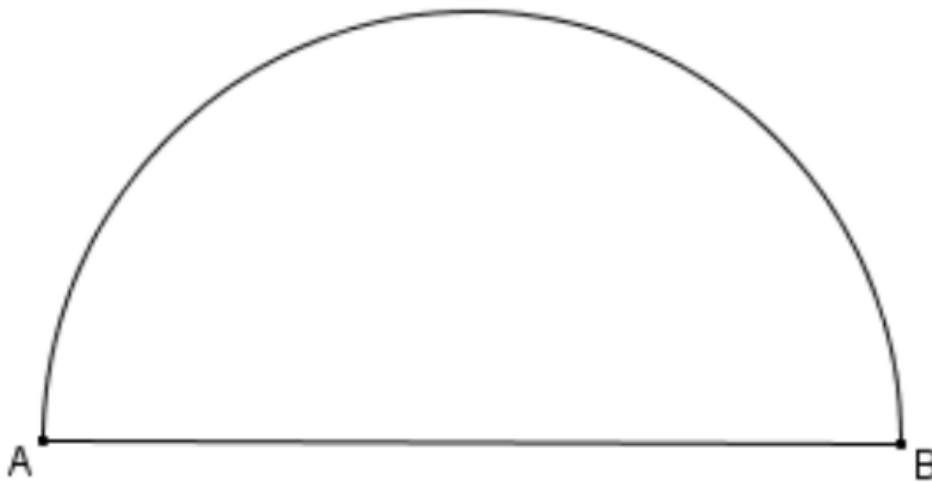
Pour comprendre en détail

À retenir : La moyenne et la médiane décrivent un niveau de performance, mais pas la régularité. Pour comparer la régularité, on utilise un indicateur de dispersion comme l'étendue.

Attention : Une étendue plus petite ne signifie pas que la sœur a été plus rapide, mais que ses temps varient moins d'un jour à l'autre.

Ici, en plus, les deux sœurs ont la même moyenne (**31 min 13 s**), donc la moyenne ne permettait pas de départager leur régularité : seule l'étendue le permet.

2.a Représenter le parcours à l'échelle $\frac{1}{20\,000}$. Justifier les mesures retenues pour réaliser la construction à l'échelle.



Corrigé

L'échelle $\frac{1}{20\,000}$ signifie que 1 cm sur le plan représente 20 000 cm dans la réalité, soit 200 m.

On convertit la longueur réelle du diamètre : 2 300 m = 230 000 cm.

Sur le plan, le segment $[AB]$ mesure :

$$230\,000 \div 20\,000 = 11,5 \text{ cm.}$$

Le parcours est un demi-cercle de diamètre $[AB]$; son rayon sur le plan est donc :

$$11,5 \div 2 = 5,75 \text{ cm.}$$

On trace un segment $[AB]$ de 11,5 cm, puis, à l'aide du compas pointé au milieu de $[AB]$ avec un écartement de 5,75 cm, on trace le demi-cercle de diamètre $[AB]$ au-dessus du segment.

Pour comprendre en détail

À retenir : Une échelle $\frac{1}{20\,000}$ signifie que les dimensions du plan sont 20 000 fois plus petites que les dimensions réelles. Pour trouver une longueur sur le plan, on convertit la longueur réelle en centimètres puis on divise par 20 000.

Attention : Il ne faut pas oublier de convertir **2 300 m** en centimètres avant de diviser, sinon le résultat est faux. Le rayon est la moitié du diamètre ; on ne trace qu'un demi-cercle, pas le cercle complet.

On peut vérifier la cohérence en multipliant la longueur tracée par 20 000 et en convertissant en mètres : on doit retrouver **2 300 m**.

2.b *Montrer que la distance du parcours, arrondie à l'unité, est d'environ 5 913 m.*

Corrigé

Le demi-cercle a pour rayon $r = \frac{2\,300}{2} = 1\,150$ m.

La longueur d'un demi-cercle est la moitié de la circonférence d'un cercle de rayon r , soit $\frac{1}{2} \times 2\pi r = \pi r = 1\,150\pi$ m.

Le parcours comprend aussi le diamètre $[AB]$, de longueur **2 300 m**.

La distance totale est donc :

$1\,150\pi + 2\,300 \approx 3\,612,83 + 2\,300 = 5\,912,83$ m,
soit environ **5 913 m** arrondi à l'unité.

Pour comprendre en détail

À retenir : La circonférence d'un cercle de rayon r est $2\pi r$; un demi-cercle a donc pour longueur πr .

Attention : Ne pas oublier d'ajouter le diamètre $[AB]$ qui ferme le parcours : le trajet n'est pas seulement l'arc de cercle.

Attention : Le diamètre mesure **2 300 m**, donc le rayon mesure **1 150 m** : une erreur fréquente est d'utiliser **2 300 m** comme rayon du demi-cercle.

L'arrondi à l'unité de **5 912,83 m** est **5 913 m** car le chiffre des dixièmes est 8.

2.c *Aujourd'hui, Célia a bouclé le parcours sur une durée de 33 minutes et 36 secondes. Quelle a été sa vitesse moyenne en km/h, arrondie au dixième près ?*

Corrigé

On convertit d'abord la durée en heures :

$$33 \text{ min } 36 \text{ s} = 33 \text{ min} + \frac{36}{60} \text{ min} = 33,6 \text{ min} = \frac{33,6}{60} \text{ h} = 0,56 \text{ h}.$$

La distance du parcours est **5,913 km** (question 2.b).

La vitesse moyenne est donc :

$$v = \frac{d}{t} = \frac{5,913}{0,56} \approx 10,559 \text{ km/h}.$$

Arrondie au dixième, la vitesse moyenne de Célia est **10,6 km/h**.

Pour comprendre en détail

La vitesse moyenne se calcule en divisant la distance parcourue par la durée du parcours. Pour obtenir une vitesse en km/h, il faut exprimer la distance en kilomètres et la durée en heures.

À retenir : $v = \frac{d}{t}$ avec d en km et t en h. Pour convertir des minutes en heures, on divise par 60 :
 $1 \text{ min} = \frac{1}{60} \text{ h}$.

Attention : une durée de **33 min 36 s** n'est pas **33,36 min** ni **33,6 h** ou **0,33 h**. Il faut d'abord transformer les secondes en minutes (**36 s = 0,6 min**), puis convertir le total en heures (**33,6 ÷ 60**).

Une autre méthode consiste à convertir la distance en mètres et la durée en secondes pour calculer une vitesse en m/s, puis à multiplier par **3,6** pour l'obtenir en km/h.

2.d

Célia a l'habitude d'effectuer le parcours dans le sens des aiguilles d'une montre en partant du point A. Sur la représentation de la question 2.a., placer les points L, M et N correspondants respectivement au quart, à la moitié et aux trois quarts du parcours.

Corrigé

En partant de A dans le sens des aiguilles d'une montre, on parcourt d'abord le demi-cercle de A vers B, puis le diamètre [BA].

Le parcours à l'échelle $\frac{1}{20\,000}$ a une longueur totale $P = 5,75\pi + 11,5 \approx 18,06 + 11,5 = 29,56$ cm.

Le quart du parcours mesure $29,56 \div 4 \approx 7,39$ cm, la moitié mesure $29,56 \div 2 \approx 14,78$ cm et les trois quarts mesurent $29,56 \times \frac{3}{4} \approx 22,17$ cm.

Le demi-cercle mesure environ **18,06** cm, donc L et M sont sur l'arc de cercle.

Pour placer L, on utilise la longueur d'arc $l = R\theta$ avec $R = 5,75$ cm :

$\theta_L = \frac{7,39}{5,75} \approx 1,285 \text{ rad}$, soit environ $1,285 \times \frac{180}{\pi} \approx 73,6^\circ$, donc $\widehat{AOL} \approx 74^\circ$. On trace la demi-droite issue du centre O faisant un angle d'environ **74°** avec [OA] vers le haut, et L est son intersection avec le demi-cercle.

Pour M, on procède de même :

$\theta_M = \frac{14,78}{5,75} \approx 2,57 \text{ rad}$, soit environ $2,57 \times \frac{180}{\pi} \approx 147^\circ$ (le double de 74° arrondi donnerait 148° : l'écart vient des arrondis). Donc $\widehat{AOM} \approx 147^\circ$; M est l'intersection de la demi-droite correspondante avec le demi-cercle.

Pour N, la distance **22,17** cm dépasse la longueur du demi-cercle de $22,17 - 18,06 \approx 4,11$ cm : on continue donc sur le diamètre [BA] à partir de B. N est sur [BA] à environ **4,1** cm de B, c'est-à-dire à $11,5 - 4,1 = 7,4$ cm de A.

Pour comprendre en détail

À retenir : Pour reporter une longueur le long d'un arc de cercle, on convertit la longueur d'arc en angle au centre avec $l = R\theta$, où θ est en radians (π radians = 180°).

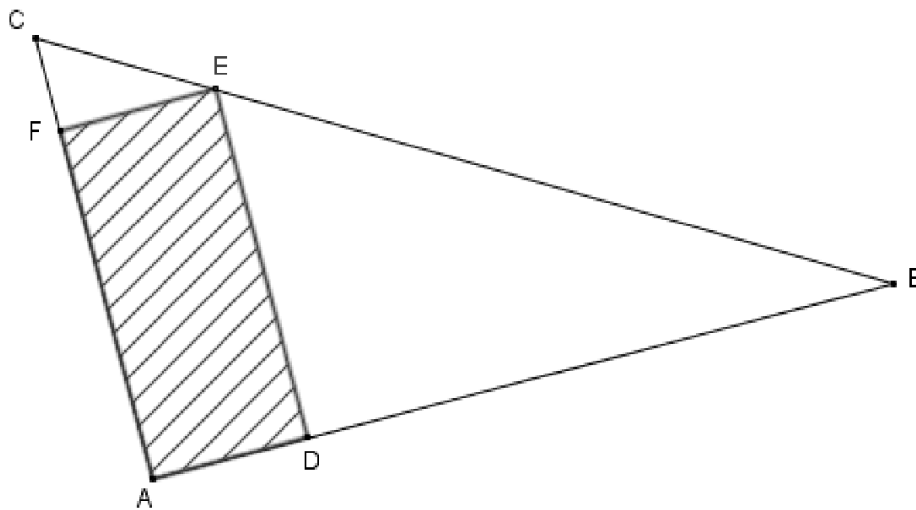
Attention : Une longueur d'arc ne se mesure pas avec une règle droite : la règle donnerait la corde, pas l'arc. Il faut utiliser un rapporteur.

Comme le quart et la moitié du parcours sont inférieurs à la longueur du demi-cercle, L et M se trouvent sur l'arc ; les trois quarts dépassent cette longueur, donc N se trouve sur le diamètre. C'est cohérent avec le sens de parcours choisi.

Exercice 3

Partie A : installation du potager

A.1 Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.



Corrigé

Dans le triangle ABC, le plus grand côté est $[BC]$.

D'une part : $AC^2 + AB^2 = 10^2 + 24^2 = 100 + 576 = 676$.

D'autre part : $BC^2 = 26^2 = 676$.

On a donc $BC^2 = AC^2 + AB^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

Pour comprendre en détail

À retenir : La réciproque du théorème de Pythagore sert à démontrer qu'un triangle est rectangle : si le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle ; l'angle droit est situé au sommet opposé à ce plus grand côté.

Attention : Une erreur fréquente est d'écrire $AB^2 + BC^2 = AC^2$ ou $AC^2 + BC^2 = AB^2$ sans avoir repéré le plus grand côté. Ici, c'est BC , donc l'égalité à tester est $BC^2 = AC^2 + AB^2$.

On peut aussi remarquer que les longueurs **10, 24** et **26** forment un multiple de **2** du triplet pythagoricien **5; 12; 13**, ce qui confirme que le triangle est rectangle.

A.2.a Dans la suite de cette partie, on souhaite déterminer où positionner le point D sur $[AB]$ pour que l'aire du rectangle hachuré $ADEF$ soit la plus grande possible. Dans cette question on considère que $AD = 4,8$ m. Montrer que la longueur DE est égale à 8 m.

Corrigé

$ADEF$ est un rectangle, donc (DE) est parallèle à (AF) . Comme F appartient à $[AC]$, on a $(AF) = (AC)$, donc $(DE) \parallel (AC)$.

Dans le triangle BAC , avec D sur $[BA]$ et E sur $[BC]$, le théorème de Thalès donne :

$$\frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AC}.$$

Or $BD = BA - AD = 24 - 4,8 = 19,2$ m.

$$\text{Ainsi, } \frac{19,2}{24} = \frac{DE}{10}, \text{ d'où } DE = \frac{10 \times 19,2}{24} = 8.$$

La longueur DE est donc égale à 8 m.

Pour comprendre en détail

La condition essentielle pour utiliser le théorème de Thalès est le parallélisme de (DE) et (AC) , fourni ici par la nature rectangulaire de $ADEF$.

À retenir : Le théorème de Thalès s'applique lorsque deux droites parallèles coupent deux droites sécantes ; il permet d'écrire l'égalité des rapports entre les côtés homologues des triangles formés.

Attention : Le rapport à utiliser est $\frac{BD}{BA}$ et non $\frac{AD}{AB}$, car le côté du petit triangle qui correspond à $[AC]$ est $[DE]$ et le point D est sur $[BA]$; il faut donc d'abord calculer $BD = BA - AD$.

On peut vérifier la cohérence du résultat : $DE = 8$ m est bien inférieur à $AC = 10$ m, ce qui est attendu puisque D est situé au-delà du milieu de $[AB]$ en direction de B .

A.2.b En déduire l'aire du rectangle $ADEF$ en m^2 .

Corrigé

$ADEF$ est un rectangle, donc son aire est :

$$\mathcal{A}_{ADEF} = AD \times DE.$$

Or $AD = 4,8$ m et $DE = 8$ m, donc :

$$\mathcal{A}_{ADEF} = 4,8 \times 8 = 38,4.$$

L'aire du rectangle $ADEF$ est donc 38,4 m^2 .

Pour comprendre en détail

À retenir : L'aire d'un rectangle se calcule en multipliant sa longueur par sa largeur. Ici, AD et DE sont deux côtés consécutifs du rectangle $ADEF$.

Attention : Ne pas confondre aire et périmètre : on multiplie les longueurs, on ne les additionne pas.
Penser aussi à exprimer le résultat en m².

A.3.a On note x la longueur, exprimée en mètre, du segment $[AD]$. Montrer que $DE = 10 - \frac{5}{12}x$.

Corrigé

ADEF étant un rectangle, les droites (DE) et (AC) sont parallèles.

Dans le triangle ABC, $D \in [AB]$, $E \in [BC]$ et $(DE) \parallel (AC)$. D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AC}.$$

Or $BA = 24$ m, $BD = BA - AD = 24 - x$ et $AC = 10$ m, donc :

$$\frac{DE}{10} = \frac{24 - x}{24}.$$

$$\text{D'où } DE = 10 \times \frac{24 - x}{24} = 10 - \frac{10}{24}x = 10 - \frac{5}{12}x.$$

Ainsi, pour $AD = x$, on a bien $DE = 10 - \frac{5}{12}x$.

Pour comprendre en détail

À retenir : Dans une configuration de Thalès, on identifie le sommet commun (ici B) et on écrit les rapports des longueurs des côtés alignés de même origine : $\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}$.

Attention : On utilise $BD = 24 - x$, car D est sur $[AB]$; une erreur fréquente est d'utiliser $AD = x$ à la place de BD dans le rapport.

On peut aussi remarquer que cette relation est cohérente avec la question A.2.a : si $x = 4,8$ m, on retrouve $DE = 8$ m.

A.3.b En déduire l'aire du rectangle ADEF en fonction de x .

Corrigé

Le rectangle ADEF a pour dimensions $AD = x$ et $DE = 10 - \frac{5}{12}x$.

Son aire est donc :

$$A(x) = AD \times DE = x \times \left(10 - \frac{5}{12}x\right).$$

En développant :

$$A(x) = 10x - \frac{5}{12}x^2.$$

L'aire du rectangle ADEF en fonction de x est $A(x) = 10x - \frac{5}{12}x^2$, exprimée en m².

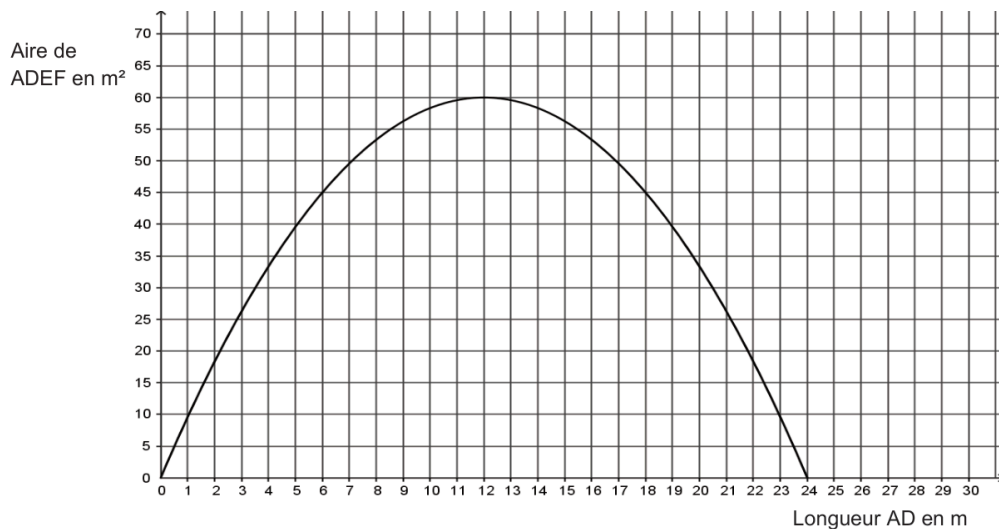
Pour comprendre en détail

À retenir : L'aire d'un rectangle est le produit de sa longueur par sa largeur : $\mathcal{A} = L \times \ell$. Ici, les deux dimensions sont portées par les côtés perpendiculaires du triangle rectangle en A.

On utilise directement le résultat de la question A.3.a : $DE = 10 - \frac{5}{12}x$. On peut vérifier la cohérence avec les questions précédentes : pour $x = 4,8$, on retrouve $DE = 10 - \frac{5}{12} \times 4,8 = 10 - 2 = 8$ m, ce qui redonne bien l'aire $4,8 \times 8 = 38,4$ m².

Attention : Ne pas confondre l'expression développée $10x - \frac{5}{12}x^2$ avec l'expression factorisée $x \left(10 - \frac{5}{12}x\right)$; les deux sont justes, mais le développement demandé ici montre clairement une fonction polynôme du second degré.

A.4.a Le graphique ci-dessous représente l'aire, exprimée en mètre carré, du rectangle ADEF en fonction de la longueur x en mètre.



À l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes. Quelle est l'aire du potager si la longueur AD vaut 5 m ?

Corrigé

Sur le graphique, le point de la courbe d'abscisse 5 a pour ordonnée environ 40. L'aire du potager est donc d'environ 40 m².

Vérification par le calcul : $\mathcal{A}(5) = 5 \times \left(10 - \frac{25}{12}\right) \approx 39,6$ m², ce qui est cohérent avec la lecture graphique.

Pour comprendre en détail

Attention : Ne pas confondre l'abscisse (longueur AD) et l'ordonnée (aire) : on part de 5 sur l'axe horizontal et on lit la valeur sur l'axe vertical.

La lecture graphique donne une valeur approchée ; le calcul exact est légèrement inférieur à 40 m².

A.4.b Pour quelle(s) valeur(s) de la longueur AD l'aire du potager est-elle égale à 45 m^2 ?

Corrigé

D'après le graphique, la droite horizontale d'ordonnée 45 coupe la courbe en deux points dont les abscisses sont 6 et 18 .

L'aire du potager est donc égale à 45 m^2 pour $AD = 6 \text{ m}$ ou $AD = 18 \text{ m}$.

Pour comprendre en détail

Attention : Ne confonds pas l'aire, qui se lit sur l'axe vertical (45 m^2), et la longueur AD, qui se lit sur l'axe horizontal.

Une lecture graphique donne des valeurs approchées selon la précision du tracé ; ici, la résolution algébrique de $x(10 - \frac{5}{12}x) = 45$ confirmerait les deux abscisses trouvées.

A.4.c Pour quelle(s) valeur(s) de la longueur AD l'aire du potager est-elle supérieure ou égale à 50 m^2 ?

Corrigé

Sur le graphique, la droite horizontale d'ordonnée 50 m^2 coupe la courbe en deux points dont les abscisses valent environ 7 m et 17 m .

La courbe est située au-dessus de cette droite pour les valeurs de x comprises entre ces deux abscisses.

L'aire du potager est donc supérieure ou égale à 50 m^2 lorsque $7 \text{ m} \leq AD \leq 17 \text{ m}$ (valeurs approchées par lecture graphique).

Pour comprendre en détail

La question est une lecture graphique : on cherche l'intervalle des abscisses pour lesquelles la courbe a une ordonnée supérieure ou égale à 50 . Les valeurs lues sont approchées, leur précision dépendant du quadrillage.

Attention : Il ne faut pas donner uniquement l'abscisse du maximum (12 m) ni confondre axe des abscisses et axe des ordonnées. L'inégalité est large, donc les bornes sont incluses.

À retenir : Pour résoudre graphiquement $f(x) \geq k$, on trace la droite $y = k$, on repère ses intersections avec la courbe, puis on lit les intervalles de x où la courbe est au-dessus de cette droite.

Vérification possible par le calcul : en utilisant l'expression de l'aire $x(10 - \frac{5}{12}x)$, l'inéquation $x(10 - \frac{5}{12}x) \geq 50$ conduit à $x^2 - 24x + 120 \leq 0$, soit $x \in [12 - 2\sqrt{6}; 12 + 2\sqrt{6}]$
 $\approx [7,1 \text{ m}; 16,9 \text{ m}]$, ce qui est cohérent avec la lecture graphique.

A.4.d Quelle est l'aire maximale du potager ? Donner la longueur et la largeur du rectangle ADEF correspondant.

Corrigé

Par lecture graphique, la courbe atteint son maximum au point de coordonnées (12 ; 60).

L'aire maximale du potager est donc 60 m^2 , obtenue pour $AD = 12 \text{ m}$.

Pour $AD = 12 \text{ m}$, d'après la question A.3.a :

$$DE = 10 - \frac{5}{12} \times 12 = 10 - 5 = 5 \text{ m}.$$

Le rectangle ADEF a donc pour longueur 12 m et pour largeur 5 m .

Pour comprendre en détail

La courbe représentant l'aire en fonction de x est une arche de parabole : son sommet correspond bien à l'aire maximale. On pouvait aussi vérifier ce résultat par le calcul avec l'expression de l'aire $A(x)$
 $= 10x - \frac{5}{12}x^2$.

Attention : Ne confonds pas l'ordonnée du sommet (l'aire maximale) avec la largeur du rectangle. La largeur est DE , qui se calcule séparément avec $x = 12$.

Partie B : choix du terreau

B.1 Montrer que le volume de terreau nécessaire pour le potager est de 6 m^3 .

Corrigé

Le potager est un pavé droit de dimensions 12 m , 5 m et $30 \text{ cm} = 0,30 \text{ m}$.

Volume total du mélange : $V = 12 \times 5 \times 0,30 = 18 \text{ m}^3$.

Le terreau représente un tiers du mélange, donc : $V_{\text{terreau}} = \frac{1}{3} \times 18 = 6 \text{ m}^3$.

Le volume de terreau nécessaire est donc bien 6 m^3 .

Pour comprendre en détail

À retenir : Le volume d'un pavé droit se calcule par $V = \text{longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}$, à condition que toutes les dimensions soient exprimées dans la même unité.

Attention : Une erreur fréquente est d'utiliser 30 au lieu de $0,30$ dans le calcul, ce qui donne un volume 100 fois trop grand. Il faut convertir les centimètres en mètres.

On peut aussi appliquer directement la fraction de terreau au produit $12 \times 5 \times 0,30$, mais le passage par le volume total du pavé est plus transparent.

B.2 Trois magasins proposent les offres suivantes :

Magasin 1	Magasin 2	Magasin 3
Livraison : 20 €. 0,10 € le litre de terreau.	Livraison offerte. 2,35 € le sac de 20 litres de terreau. 20 % de remise immédiate après l'achat d'une carte de fidélité au prix de 10 €.	Livraison offerte pour tout achat supérieur à 50 €. 5,37 € le sac de 50 litres de terreau.

Quel magasin choisir pour avoir le tarif, livraison comprise, le plus économique possible pour les 6 m³ nécessaires ?

Corrigé

$$6 \text{ m}^3 = 6\,000 \text{ dm}^3 = 6\,000 \text{ L.}$$

- Magasin 1 : $20 + 6\,000 \times 0,10 = 620 \text{ €}$.
- Magasin 2 : $6\,000 \div 20 = 300$ sacs ; $300 \times 2,35 = 705 \text{ €}$; après remise de 20 % : $705 \times 0,8 = 564 \text{ €}$; avec la carte : $564 + 10 = 574 \text{ €}$.
- Magasin 3 : $6\,000 \div 50 = 120$ sacs ; $120 \times 5,37 = 644,40 \text{ €}$; livraison offerte car $644,40 > 50$.

Le magasin le plus économique est le **magasin 2**, avec un coût total de **574 €**.

Pour comprendre en détail

À retenir : $1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ L}$, donc pour comparer des offres, on convertit d'abord le volume dans l'unité utilisée par les prix.

On compare ici des coûts totaux pour une même quantité de terreau : il faut donc inclure le nombre de sacs (en arrondissant à l'entier supérieur si nécessaire), les frais de livraison et les éventuelles remises ou cartes de fidélité.

Attention : pour le magasin 2, la remise de 20 % s'applique au montant des sacs avant l'ajout du prix de la carte de fidélité ; pour le magasin 3, la livraison est offerte car l'achat dépasse 50 €.

Partie C : plantation des fleurs

C.1 Combien de fleurs un élève peut-il espérer voir pousser ?

Corrigé

Le taux de germination est de 90 % et un élève reçoit 20 graines.

Le nombre de fleurs qu'un élève peut espérer voir pousser est donc :

$$0,90 \times 20 = 18.$$

Un élève peut espérer voir pousser 18 fleurs.

Pour comprendre en détail

À retenir : Pour calculer un pourcentage d'une quantité, on multiplie cette quantité par $\frac{90}{100}$ ou par 0,90.

Attention : Le paquet contient 50 graines, mais chaque élève n'en reçoit que 20. Le nombre d'élèves de la classe (26) n'intervient pas dans cette question.

C.2 *Quel sera le budget à prévoir pour l'achat des graines ?*

Corrigé

Le nombre total de graines à prévoir est :

$$26 \times 20 = 520 \text{ graines.}$$

Chaque paquet contient 50 graines :

$$520 \div 50 = 10,4.$$

Il faut donc acheter **11** paquets entiers, car 10 paquets ne suffisent pas.

Le coût est :

$$11 \times 4,53 = 49,83 \text{ €.}$$

Le budget à prévoir pour l'achat des graines est donc de **49,83 €**.

Pour comprendre en détail

On arrondit le nombre de paquets à l'entier supérieur car on ne peut pas acheter une fraction de paquet : 10 paquets fourniraient seulement 500 graines, ce qui est insuffisant pour les 520 graines nécessaires.

Attention : Le taux de germination ne doit pas être utilisé ici ; il concerne le nombre de fleurs attendues, pas le nombre de graines à acheter.

C.3.a *En plus des graines, des bulbes de tulipes et de jonquilles sont plantés. L'enseignante en plante sur un sixième du potager puis un peu plus loin sur un huitième de ce même potager. Un élève affirme que les bulbes représentent plus de 25 % du potager. A-t-il raison ? Justifier votre réponse.*

Corrigé

La fraction du potager occupée par les bulbes est :

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{4}{24} + \frac{3}{24} = \frac{7}{24}.$$

$$\text{Or } 25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = \frac{6}{24}.$$

Comme $\frac{7}{24} > \frac{6}{24}$, on a $\frac{7}{24} > 25\%$ (environ **29,2 %**).

L'élève a raison : les bulbes représentent plus de 25 % du potager.

Pour comprendre en détail

Pour additionner deux fractions, il faut les réduire au même dénominateur ; ici, 24 est un multiple commun de 6 et 8. Une erreur fréquente consiste à comparer séparément chaque fraction à 25 % au lieu d'additionner d'abord les deux parts du potager.

Attention : 25 % correspond à la fraction $\frac{1}{4}$, soit $\frac{6}{24}$, et non $\frac{1}{4}$ d'une fraction déjà présente.

À retenir : Un pourcentage t % correspond à la fraction $\frac{t}{100}$. Pour comparer une somme de fractions à un pourcentage, on peut tout exprimer avec un même dénominateur.

C.3.b Elle met dans un panier 30 bulbes de jonquilles et des bulbes de tulipes. La proportion de bulbes de jonquilles dans le panier est de $\frac{5}{6}$. Calculer le nombre de bulbes de tulipes dans ce panier.

Corrigé

Soit N le nombre total de bulbes dans le panier.

Les jonquilles représentent $\frac{5}{6}$ du total, donc :

$$\frac{5}{6} \times N = 30$$

On en déduit $N = 30 \times \frac{6}{5} = 36$.

Le nombre de bulbes de tulipes est $36 - 30 = 6$.

Il y a donc 6 bulbes de tulipes dans le panier.

Pour comprendre en détail

À retenir : Une proportion $\frac{a}{b}$ d'une quantité N se traduit par $\frac{a}{b} \times N = \text{quantité correspondante}$.

On peut aussi raisonner en parts : les jonquilles représentent 5 parts sur 6, donc une part vaut $30 \div 5$ bulbes ; les tulipes représentent la sixième part restante.

Attention : La proportion $\frac{5}{6}$ porte sur le total des bulbes, pas sur le nombre de jonquilles.

Exercice 4

1 Représenter la figure obtenue lorsque le programme est exécuté. On prendra 1 mm pour 1 pixel.

Corrigé

Le lutin part de l'origine (0 ; 0), orienté vers la droite (90°).

À chaque répétition, il effectue :

- un tracé de 10 pixels, soit 1 cm, stylo posé ;
- un déplacement de 10 pixels, soit 1 cm, stylo levé, donc sans tracé ;
- un quart de tour vers la droite (sens horaire).

Il parcourt ainsi à chaque fois 20 pixels (2 cm) le long d'un côté d'un carré, mais seul le premier centimètre est tracé. Comme la boucle est répétée 4 fois, on obtient **4 tirets de 1 cm placés au début de chaque côté d'un carré de 2 cm de côté**, en suivant le sens des aiguilles d'une montre : le premier tiret vers la droite, le deuxième vers le bas, le troisième vers la gauche, le quatrième vers le haut. Le lutin revient au point de départ.

Pour comprendre en détail

La difficulté est de bien prendre en compte que le stylo n'écrit que pendant le premier déplacement de 10 pixels : le second déplacement de 10 pixels se fait stylo levé et ne laisse donc aucune trace. Beaucoup d'élèves tracent le carré complet de côté 20 pixels ou tracent des côtés de 10 pixels seulement en croyant que le côté s'arrête là.

On peut vérifier en additionnant les déplacements : $4 \times (10 + 10) = 80$ pixels au total, soit un retour à l'origine après avoir décrit un carré de périmètre 80 pixels. Le sens « tourner $\cup$ de 90 degrés » indique une rotation horaire, donc les tirets sont orientés vers la droite, le bas, la gauche puis le haut.

À retenir : Dans un programme de déplacement, un segment n'est tracé que si le stylo est en position d'écriture ; relever le stylo permet de se déplacer sans laisser de trace.

2 Marie souhaite obtenir la figure ci-dessous où chaque tiret mesure 10 pixels et est séparé du précédent de 10 pixels. Quelle(s) modification(s) doit-elle apporter au programme ?



Corrigé

Pour obtenir huit tirets alignés horizontalement, le lutin doit toujours se déplacer vers la droite, sans changer de direction. Il faut donc supprimer le bloc « tourner de 90 degrés » situé en fin de

boucle.

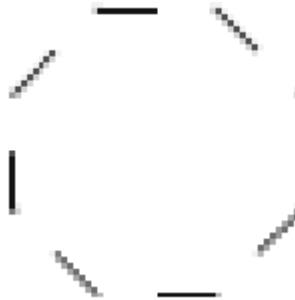
De plus, la figure voulue comporte huit tirets : on remplace « répéter 4 fois » par « répéter 8 fois ».

Avec ces modifications, le programme trace bien huit tirets horizontaux de 10 pixels séparés par des espaces de 10 pixels.

Pour comprendre en détail

Dans le programme initial, le bloc « tourner de 90 degrés » modifie l'orientation du lutin après chaque tiret : celui-ci change donc de direction au lieu de continuer tout droit. En le supprimant, le lutin conserve l'orientation initiale de 90° (vers la droite) tout au long de l'exécution. Une erreur fréquente est de seulement augmenter le nombre de répétitions sans supprimer la rotation ; on obtiendrait alors huit tirets répartis dans plusieurs directions, mais pas une ligne horizontale. Les blocs « avancer de 10 » avec stylo en position d'écriture puis stylo relevé assurent déjà le trait de 10 pixels et l'espace de 10 pixels, ils n'ont pas à être modifiés.

3.a Léo souhaite modifier le programme donné pour que l'on obtienne la figure ci-dessous. Quelle(s) modification(s) doit-il apporter au programme de départ ?



Corrigé

La figure cible comporte 8 tirets régulièrement répartis autour du centre. Pour un tour complet, la somme des rotations est 360° . Chaque tiret est donc séparé du suivant par un angle de $\frac{360}{8} = 45^\circ$.

Il faut modifier le programme de départ en remplaçant « répéter 4 fois » par « répéter 8 fois » et « tourner de 90 degrés » par « tourner de 45 degrés ».

Pour comprendre en détail

À retenir : pour dessiner n motifs régulièrement espacés en tournant autour d'un point, on répète n fois et on tourne de $\frac{360}{n}$ degrés à chaque fois.

Attention : modifier uniquement le nombre de répétitions ou uniquement l'angle ne suffit pas ; les deux modifications sont liées, car $8 \times 45^\circ = 360^\circ$ permet de revenir au point de départ après un tour complet.

3.b Quel type de transformation géométrique permet de passer d'un tiret à un autre ?

Corrigé

Les huit tirets étant placés régulièrement autour du centre de l'octogone, l'angle au centre entre deux tirets voisins est $\frac{360}{8} = 45^\circ$.

Passer d'un tiret au tiret suivant se fait donc par une **rotation** de centre le centre de l'octogone et d'angle 45° (ou un multiple de 45° pour un tiret non voisin).

Pour comprendre en détail

À retenir : Une rotation est une transformation qui conserve les longueurs et les angles, et qui fait tourner une figure autour d'un point donné.

Attention : Il ne s'agit pas d'une translation car l'orientation des tirets change (certains sont horizontaux, d'autres verticaux ou inclinés).

La figure est invariante par rotations de 45° , 90° , 135° , etc. autour du centre de l'octogone.