

ANNALES CRPE · MATHÉMATIQUES · 2023

Corrigé **détailé**

CRPE 2023 – Mathématiques – Groupement 2

Épreuve écrite disciplinaire de mathématiques (2e épreuve d'admissibilité)

Durée : 3 heures

20 points

Exercice 1

Exercice 2

Exercice 3

Exercice 4

Exercice 5

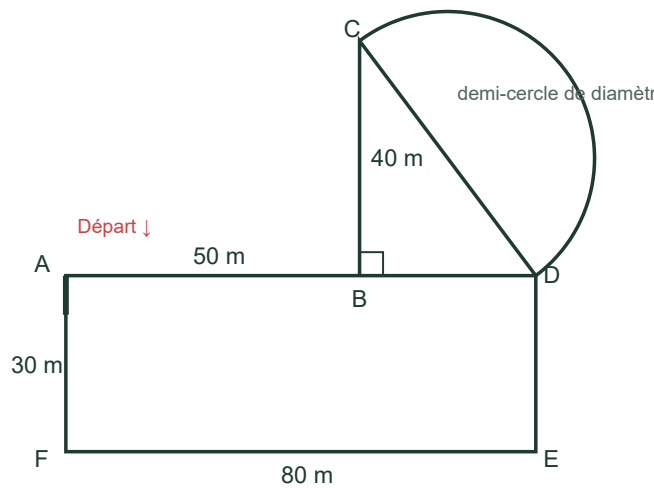
Exercice 6

Pour chaque question : **rappel de l'énoncé**, **corrigé** rédigé, puis « **Pour comprendre en détail** » (méthode, rappels de cours, erreurs fréquentes). À utiliser avec le sujet officiel (documents, tableaux et figures).

Sujet : Ministère de l'Éducation nationale – session 2023. Corrigé rédigé par Campus XYZ – campusxyz.fr. Tous droits réservés.

Exercice 1

- 1 Calculer la longueur du segment $[CD]$.



Corrigé

Dans le rectangle $AFED$, les côtés opposés ont la même longueur, donc :

$$AD = EF = 80 \text{ m.}$$

Les points A, B, D sont alignés, donc :

$$BD = AD - AB = 80 - 50 = 30 \text{ m.}$$

Dans le triangle CBD rectangle en B , d'après le théorème de Pythagore :

$$CD^2 = CB^2 + BD^2 = 40^2 + 30^2 = 1\,600 + 900 = 2\,500.$$

D'où :

$$CD = \sqrt{2\,500} = 50.$$

Le segment $[CD]$ mesure 50 m.

Pour comprendre en détail

À retenir : Dans un rectangle, les côtés opposés sont de même longueur. Le théorème de Pythagore s'applique uniquement dans un triangle rectangle.

Attention : Ne pas utiliser $AB = 50$ m comme côté de l'angle droit du triangle CBD : ce triangle a pour côtés de l'angle droit $CB = 40$ m et BD , qu'il faut d'abord calculer par différence ($BD = AD - AB$).

Le demi-cercle de diamètre $[CD]$ n'intervient pas dans cette question ; il servira éventuellement pour calculer la longueur de l'arc dans une question de périmètre. Une vérification rapide : les longueurs **30**, **40**, **50** forment un triplet pythagoricien (multiple de **3**, **4**, **5**).

- 2** Montrer que la longueur du parcours, arrondie au mètre, est **309 m**. On utilisera cette valeur dans la suite de l'exercice.

Corrigé

Le parcours est constitué de $AF + FE + ED$ (trois côtés du rectangle), du demi-cercle de diamètre CD , puis de $CB + BA$.

Comme $AFED$ est un rectangle, $FE = AD = 80$ et $ED = FA = 30$. D'après la question 1, $CD = 50$.

La longueur du demi-cercle est : $\frac{\pi \times CD}{2} = \frac{\pi \times 50}{2} = 25\pi$.

Longueur totale :

$$30 + 80 + 30 + 25\pi + 40 + 50 = 230 + 25\pi \approx 230 + 78,54 = 308,54.$$

Arrondie au mètre, la longueur du parcours est donc **309 m**.

Pour comprendre en détail

À retenir : La circonférence d'un cercle de diamètre d est πd , donc un demi-cercle a pour longueur $\frac{\pi d}{2}$.

Attention : Ne pas confondre diamètre et rayon : ici $CD = 50$ est un diamètre, pas un rayon. Une erreur fréquente est d'utiliser $\pi \times 50$ (cercle entier) au lieu de la moitié.

L'arrondi au mètre suit la règle habituelle : **308,54** est plus proche de **309** que de **308**.

- 3** Construire un plan du parcours à l'échelle $1/800$.

Corrigé

À l'échelle $1/800$, 1 cm sur le plan représente 800 cm réels, soit 8 m. On obtient les longueurs sur le plan en divisant les longueurs réelles en mètres par 8.

Segment	Longueur réelle (m)	Longueur sur le plan (cm)
$[AB]$	50	$50 \div 8 = 6,25$
$[BC]$	40	$40 \div 8 = 5$
$[AF] = [DE]$	30	$30 \div 8 = 3,75$
$[EF] = [AD]$	80	$80 \div 8 = 10$
$[BD]$	30	$30 \div 8 = 3,75$
$[CD]$	50	$50 \div 8 = 6,25$

Le demi-cercle a donc un diamètre de **6,25** cm, soit un rayon de **3,125** cm. Étapes de construction :

- Tracer le rectangle $AFED$ avec $EF = AD = 10$ cm et $AF = DE = 3,75$ cm.
- Placer B sur $[AD]$ tel que $AB = 6,25$ cm ; il reste $BD = 3,75$ cm.
- Tracer la perpendiculaire à (AD) passant par B et placer C sur cette perpendiculaire tel que $BC = 5$ cm, du côté indiqué sur le schéma.
- Tracer le segment $[CD]$ de longueur **6,25** cm.
- Tracer le demi-cercle de diamètre $[CD]$ à l'extérieur du triangle BCD , du côté droit de (CD) .
- Repasser le parcours $A \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow D$, puis le demi-cercle de D vers C , puis $C \rightarrow B \rightarrow A$, en indiquant le sens par une flèche.

Pour comprendre en détail

À retenir : Pour convertir une longueur réelle en longueur sur le plan à l'échelle $1/800$, on divise la longueur réelle en mètres par 8, car 8 m réels correspondent à 1 cm sur le plan.

Attention : Pour tracer le demi-cercle, on ouvre le compas du rayon, c'est-à-dire $CD \div 2 = 3,125$ cm, et non du diamètre **6,25** cm. Il faut aussi penser à le tracer à l'extérieur du rectangle, du bon côté de (CD) .

- 4** Killian a effectué un tour complet en **3** minutes. À quelle vitesse moyenne Killian a-t-il couru ? On donnera le résultat en mètre par seconde arrondi au centième, puis en kilomètre par heure, arrondi au dixième.

Corrigé

$$t = 3 \text{ min} = 3 \times 60 = 180 \text{ s.}$$

$$v = \frac{309}{180} \approx 1,7167, \text{ donc } v \approx 1,72 \text{ m/s (arrondi au centième).}$$

En km/h : $1,7167 \times 3,6 \approx 6,18$, donc $v \approx 6,2$ km/h (arrondi au dixième).

La vitesse moyenne de Killian est d'environ **1,72** m/s, soit **6,2** km/h.

Pour comprendre en détail

Pourquoi cette méthode ? La vitesse moyenne est le quotient de la distance parcourue par le temps de parcours. Pour obtenir une vitesse en m/s, on convertit d'abord le temps en secondes.

À retenir : $1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/h}$, car en $1 \text{ h} = 3\,600 \text{ s}$, on parcourt 3 600 fois plus de mètres, soit 3,6 km/h.

Attention : Ne pas utiliser la valeur arrondie **1,72** m/s pour convertir en km/h : $1,72 \times 3,6 = 6,192$, ce qui donne encore **6,2**, mais l'arrondi intermédiaire peut parfois fausser le dernier chiffre. On utilise de préférence la valeur non arrondie **1,7167**.

Autre méthode : **309 m** en **3 min** soit **103 m/min**, puis $103 \times 60 = 6\,180 \text{ m/h} = 6,18 \text{ km/h} \approx 6,2 \text{ km/h}$.

- 5.a** On suppose que Sophia court à une vitesse constante de **7 km/h**. Combien de tours complets pourrait-elle effectuer à cette vitesse en **18 minutes** ?

Corrigé

$$18 \text{ min} = \frac{18}{60} \text{ h} = 0,3 \text{ h.}$$

La distance parcourue est $d = v \times t = 7 \times 0,3 = 2,1 \text{ km} = 2\,100 \text{ m}$.

Le nombre de tours est $\frac{2\,100}{309} \approx 6,8$.

Sophia peut donc effectuer **6 tours complets**.

Pour comprendre en détail

À retenir : $d = v \times t$, avec des unités cohérentes : si v est en km/h et t en h, alors d est en km.

Attention : On ne doit pas arrondir **6,8** à 7, car on demande des tours *complets* ; le **7^e** tour ne serait pas terminé.

Vérification utile : 6 tours représentent $6 \times 309 = 1\,854 \text{ m}$, tandis que 7 tours représentent $7 \times 309 = 2\,163 \text{ m}$, ce qui dépasse les **2 100 m** parcourus.

Autre méthode possible : convertir directement **7 km/h** en mètres par minute (environ **116,67 m/min**) puis multiplier par 18 min.

- 5.b** On désigne par *S* le point du parcours où Sophia se trouve au bout de **18 minutes** de course. Placer le point *S* sur le plan réalisé à la question 3.

Corrigé

Distance parcourue en 18 min à **7 km/h** : $7 \times \frac{18}{60} = 2,1 \text{ km} = 2\,100 \text{ m}$.

Nombre de tours complets : $2\,100 \div 309 \approx 6,8$, donc 6 tours complets, soit $6 \times 309 = 1\,854 \text{ m}$.

Distance restante : $2\,100 - 1\,854 = 246 \text{ m}$.

Longueurs cumulées depuis A :

A → F : 30 m, F → E : 80 m, E → D : 30 m, donc $30 + 80 + 30 = 140 \text{ m}$ jusqu'à D.

Le demi-cercle mesure $\frac{50\pi}{2} = 25\pi \approx 78,5 \text{ m}$, donc C est atteint à environ $140 + 78,5 = 218,5 \text{ m}$.

Puis B est atteint à $218,5 + 40 = 258,5 \text{ m}$.

Comme $218,5 < 246 < 258,5$, *S* est sur le segment [CB], à $246 - 218,5 \approx 27,5 \text{ m}$ de C.

Sur le plan à l'échelle $1/800$, 1 cm représente 8 m, donc $27,5 \div 8 \approx 3,4 \text{ cm}$.

Conclusion : on place *S* sur le segment [CB] du plan, à environ **3,4 cm** de C.

Pour comprendre en détail

Pourquoi cette méthode ? Le nombre de tours complets ne suffit pas : il faut localiser la position exacte après la distance restante. On utilise donc les distances cumulées le long du parcours dans le

sens de course (A→F→E→D→demi-cercle→C→B→A).

Attention : la valeur **309 m** est arrondie ; les distances cumulées calculées avec 25π restent proches et la position sur [CB] ne change pas. Ne pas placer S sur le demi-cercle : **246 m** est plus grand que la distance jusqu'à C (environ **218,5 m**).

On peut aussi remarquer que 7 km/h équivaut à $\frac{7000}{60} \approx 116,7 \text{ m/min}$, donc $18 \times 116,7 \approx 2\,100 \text{ m}$, ce qui donne le même résultat.

6.a L'école est composée de **325** élèves. Le tableau ci-dessous indique le nombre de tours complets effectués par les élèves.

Nombre de tours	2	3	4	5	6	7	8
Nombre d'élèves	52	52	78	65	39	26	13

Quel est le nombre moyen de tours complets effectués ?

Corrigé

La moyenne m est donnée par :

$$m = \frac{2 \times 52 + 3 \times 52 + 4 \times 78 + 5 \times 65 + 6 \times 39 + 7 \times 26 + 8 \times 13}{52 + 52 + 78 + 65 + 39 + 26 + 13}$$
$$m = \frac{104 + 156 + 312 + 325 + 234 + 182 + 104}{325}$$
$$m = \frac{1\,417}{325} \approx 4,36$$

Le nombre moyen de tours complets effectués est environ **4,36** tours.

Pour comprendre en détail

À retenir : La moyenne d'une série statistique est le quotient de la somme de toutes les valeurs par l'effectif total. Ici, chaque nombre de tours doit être compté autant de fois qu'il y a d'élèves l'ayant réalisé ; on parle de moyenne pondérée.

Attention : On ne peut pas calculer simplement la moyenne des sept nombres de tours (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) sans tenir compte des effectifs, car les élèves ne sont pas répartis uniformément entre ces valeurs.

6.b Quelle est l'étendue de cette série statistique ?

Corrigé

L'étendue d'une série statistique est la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale du caractère.

Ici, la valeur maximale est 8 tours et la valeur minimale est 2 tours.

Étendue = $8 - 2 = 6$ tours.

Pour comprendre en détail

À retenir : L'étendue mesure la dispersion d'une série. Elle se calcule uniquement à partir des valeurs du caractère : $E = x_{\max} - x_{\min}$.

Attention : On ne soustrait pas les effectifs, mais les valeurs de la variable. Ici, peu importe que 52 élèves aient fait 2 tours et 13 élèves aient fait 8 tours.

L'étendue s'exprime dans la même unité que le caractère, donc en tours.

6.c Déterminer la médiane de cette série statistique.

Corrigé

L'effectif total est $52 + 52 + 78 + 65 + 39 + 26 + 13 = 325$. 325 est impair, donc la médiane est la valeur classée au rang $\frac{325 + 1}{2} = 163$. Effectifs cumulés croissants :

- 2 tours : 52 élèves ;
- 3 tours : $52 + 52 = 104$ élèves ;
- 4 tours : $104 + 78 = 182$ élèves.

La 163e valeur se situe donc dans la modalité « 4 tours ». La médiane de cette série statistique est 4 tours.

Pour comprendre en détail

À retenir : La médiane est la valeur qui partage la série ordonnée en deux moitiés. Pour un effectif impair N , elle correspond à la valeur de rang $\frac{N + 1}{2}$.

Attention : ne pas confondre médiane et moyenne. La médiane est une modalité de la série, ici un nombre de tours, et non un résultat de calcul pondéré. Il faut donc lire la modalité correspondant au rang trouvé, pas calculer une moyenne des effectifs.

6.d Interpréter le résultat de la question c.

Corrigé

La médiane est 4 tours. Cela signifie qu'au moins la moitié des élèves ont effectué 4 tours ou moins, et qu'au moins la moitié des élèves ont effectué 4 tours ou plus.

Pour comprendre en détail

À retenir : Une médiane M est une valeur telle qu'au moins 50 % des valeurs de la série sont inférieures ou égales à M et au moins 50 % des valeurs sont supérieures ou égales à M .

Attention : Cela ne signifie pas que la moitié des élèves a effectué exactement 4 tours, ni que les effectifs sont répartis exactement en deux groupes de 162 élèves.

6.e Déterminer le premier et le troisième quartile de cette série.

Corrigé

Effectif total : $N = 325$.

Effectifs cumulés croissants : 52 ; 104 ; 182 ; 247 ; 286 ; 312 ; 325.

Pour le premier quartile Q_1 , on cherche la plus petite valeur telle qu'au moins 25 % des valeurs lui soient inférieures ou égales.

$$\frac{1}{4}N = \frac{325}{4} = 81,25, \text{ donc on vise le rang } 82.$$

D'après les effectifs cumulés, la 82^e valeur est 3 tours, donc $Q_1 = 3$.

Pour le troisième quartile Q_3 , on cherche la plus petite valeur telle qu'au moins 75 % des valeurs lui soient inférieures ou égales.

$$\frac{3}{4}N = \frac{3 \times 325}{4} = 243,75, \text{ donc on vise le rang } 244.$$

D'après les effectifs cumulés, la 244^e valeur est 5 tours, donc $Q_3 = 5$.

Le premier quartile est 3 tours et le troisième quartile est 5 tours.

Pour comprendre en détail

À retenir : Pour une série discrète, le premier quartile est la plus petite valeur du caractère telle qu'au moins 25 % des données lui soient inférieures ou égales ; le troisième quartile est la plus petite valeur telle qu'au moins 75 % des données lui soient inférieures ou égales. Si le rang calculé est décimal, on arrondit à l'entier supérieur.

Attention : Ne pas confondre le quartile avec la moyenne ou la médiane. Une erreur fréquente consiste à prendre le rang 81 ou 243 (troncature au lieu d'arrondi supérieur) ; cela conduirait à des valeurs différentes.

6.f Quel pourcentage d'élèves a réussi à faire au moins 4 tours ?

Corrigé

Les élèves ayant effectué au moins 4 tours sont ceux qui ont effectué 4, 5, 6, 7 ou 8 tours.

Leur nombre est : $78 + 65 + 39 + 26 + 13 = 221$.

Sur un total de 325 élèves, la proportion est $\frac{221}{325} = 0,68$.

Le pourcentage demandé est donc $0,68 \times 100 = 68\%$.

Ainsi, 68 % des élèves ont réussi à faire au moins 4 tours.

Pour comprendre en détail

À retenir : Pour calculer un pourcentage, on divise l'effectif partiel par l'effectif total puis on multiplie par 100.

Attention : « au moins 4 tours » signifie 4 tours ou plus ; il faut donc bien inclure l'effectif correspondant à 4 tours.

- L'effectif total du tableau est bien $52 + 52 + 78 + 65 + 39 + 26 + 13 = 325$, ce qui confirme que la proportion est calculée sur le bon total.
- Autre méthode : on peut calculer le pourcentage des élèves ayant fait moins de 4 tours et le soustraire à 100 % ; on aboutit au même résultat.

Exercice 2

- 1 *Un quadrilatère qui possède deux angles droits est-il un rectangle ? Justifier.*

Corrigé

Non, un quadrilatère qui possède deux angles droits n'est pas nécessairement un rectangle.

Contre-exemple : un trapèze rectangle possède deux angles droits adjacents (par exemple $\widehat{A}$ et $\widehat{D}$), mais ses deux autres angles ne sont pas droits.

Or, d'après la définition, un rectangle est un quadrilatère dont les quatre angles sont droits.

Un quadrilatère avec seulement deux angles droits ne vérifie donc pas toujours la définition du rectangle.

Pour comprendre en détail

À retenir : Pour montrer qu'une affirmation est fausse, il suffit de donner un contre-exemple. Ici, le trapèze rectangle est un quadrilatère avec exactement deux angles droits, mais ce n'est pas un rectangle.

Attention : Ne pas confondre « posséder deux angles droits » et « être un rectangle ». Un rectangle a nécessairement quatre angles droits ; deux angles droits ne suffisent pas.

On peut aussi raisonner avec la somme des angles d'un quadrilatère : 360° . Si deux angles sont droits, les deux autres ont une somme de 180° , mais ils peuvent être par exemple 80° et 100° , donc non droits.

- 2.a *Dans une classe de CE2, une enseignante demande à ses élèves de compléter la phrase suivante : « Un rectangle est un quadrilatère dont ... ». Voici deux réponses proposées : **Élève A** : « Un rectangle est un quadrilatère dont les côtés opposés sont de même longueur ». **Élève B** : « Un rectangle est un quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur ».*

Préciser en quoi la réponse de l'élève A ne pourrait pas être admise comme définition mathématique du rectangle.

Corrigé

La réponse de l'élève A ne peut pas être admise comme définition mathématique du rectangle car la propriété « les côtés opposés sont de même longueur » n'est pas suffisante pour garantir que le quadrilatère est un rectangle. En effet, tout parallélogramme vérifie cette propriété : ses côtés opposés sont de même longueur. Or un parallélogramme peut ne pas avoir d'angle droit (par exemple un losange non carré) ; il n'est alors pas un rectangle. La condition est donc nécessaire mais non suffisante.

Pour comprendre en détail

À retenir : Une définition mathématique doit énoncer une condition nécessaire et suffisante : tout objet défini la vérifie, et tout objet qui la vérifie est l'objet défini.

Ici, la propriété de l'élève A est vraie pour tout rectangle (condition nécessaire), mais elle est aussi vraie pour d'autres quadrilatères comme les parallélogrammes non rectangles ou les losanges. Pour prouver qu'une propriété n'est pas une définition, il suffit de produire un contre-exemple à la réciproque : un quadrilatère ayant ses côtés opposés de même longueur qui n'est pas un rectangle.

Attention : Ne pas confondre propriété vraie pour un rectangle et propriété caractéristique du rectangle. Beaucoup d'élèves pensent que toute propriété des rectangles peut servir de définition ; ce n'est pas le cas.

On peut remarquer que pour obtenir une définition correcte, il faudrait ajouter une condition sur les angles, par exemple « un quadrilatère dont les côtés opposés sont de même longueur et qui possède un angle droit » (ce qui définit bien un rectangle).

2.b *Préciser en quoi la réponse de l'élève B ne pourrait pas être admise comme définition mathématique du rectangle.*

Corrigé

La propriété « avoir des diagonales de même longueur » est vraie pour tout rectangle, mais elle est aussi vérifiée par d'autres quadrilatères. Par exemple, un trapèze isocèle non rectangle possède des diagonales de même longueur sans être un rectangle. Cette condition est donc nécessaire mais pas suffisante : la réponse de l'élève B ne peut pas être admise comme définition mathématique du rectangle.

Pour comprendre en détail

À retenir : Une définition doit caractériser exactement l'objet : tout rectangle doit la vérifier, et tout quadrilatère qui la vérifie doit être un rectangle. Ici, la réciproque est fausse.

Pour invalider une définition, un seul contre-exemple suffit. Le trapèze isocèle est le contre-exemple le plus simple : ses deux côtés non parallèles sont égaux, ce qui entraîne l'égalité des diagonales, mais ses angles ne sont pas droits. Une confusion classique est de prendre une propriété vraie pour les rectangles (condition nécessaire) et de la croire suffisante pour définir le rectangle.

3 *Quelle est la nature d'un rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires ?*

Corrigé

Un rectangle est un parallélogramme. Si ses diagonales sont perpendiculaires, alors ce parallélogramme est un losange. Or un losange qui possède quatre angles droits est un carré. Donc un rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires est un carré.

Pour comprendre en détail

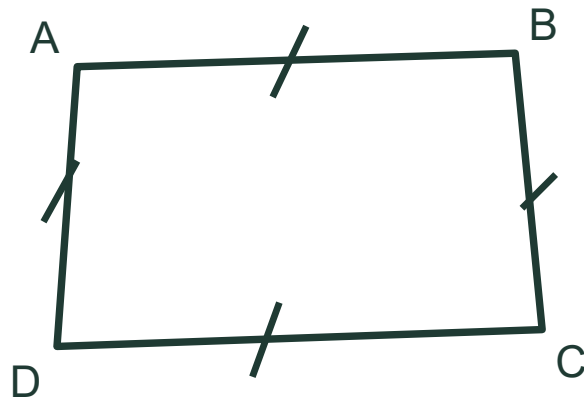
Une autre façon de formuler la propriété : un quadrilatère qui est à la fois un rectangle et un losange est un carré. Ce raisonnement utilise deux caractérisations : les diagonales d'un losange sont perpendiculaires, et réciproquement un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.

Attention : répondre uniquement « losange » est incorrect, car on impose ici que la figure reste un rectangle. Un losange n'a pas nécessairement quatre angles droits.

À retenir : Un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange ; un rectangle qui est un losange est un carré.

4

En s'appuyant sur le codage du quadrilatère ci-après dessiné à main levée, préciser la nature du quadrilatère en question en justifiant la réponse.



Corrigé

Le codage indique que les quatre côtés du quadrilatère ABCD ont la même longueur : $AB = BC = CD = DA$.

Or, un quadrilatère dont les quatre côtés sont de même longueur est un losange. Le quadrilatère ABCD est donc un losange.

De plus, aucun angle droit n'est codé sur la figure : on ne peut donc pas affirmer que ce quadrilatère est un carré.

Pour comprendre en détail

À retenir : Un quadrilatère ayant quatre côtés de même longueur est un losange. Un carré est un losange particulier qui possède en plus un angle droit (donc quatre angles droits).

Attention : Il ne faut pas déduire qu'un quadrilatère est un carré à partir de la seule égalité des quatre côtés : c'est une confusion fréquente. Ici, comme aucun angle droit n'est codé, seule la nature « losange » est certaine. Le dessin étant à main levée, on ne doit pas se fier à l'apparence éventuelle d'angles droits non codés.

Exercice 3

- 1 Montrer que si l'utilisateur saisit le nombre 2, alors le programme A retourne le nombre 54.

Corrigé

Pour $a = 2$, on a :

- $b = 2 \times 2 + 5 = 9$;
- $c = 5 \times 2 - 4 = 6$;
- $d = b \times c = 9 \times 6 = 54$.

Le programme A retourne donc 54.

Pour comprendre en détail

À retenir : Le programme A calcule successivement $b = 2a + 5$, $c = 5a - 4$ puis leur produit $d = b \times c$.

Attention : Ne pas confondre avec le programme B qui élève au carré ; ici il n'y a pas de carré. Respecter aussi les priorités : $2 \times 2 + 5 = 4 + 5 = 9$.

Autre méthode : calculer directement $(2 \times 2 + 5)(5 \times 2 - 4) = 9 \times 6 = 54$.

- 2 Calculer le résultat obtenu avec le programme A si le nombre saisi par l'utilisateur est 1,15.

Corrigé

Pour $a = 1,15$:

$$b = 2 \times 1,15 + 5 = 2,3 + 5 = 7,3.$$

$$c = 5 \times 1,15 - 4 = 5,75 - 4 = 1,75.$$

$$d = b \times c = 7,3 \times 1,75 = 12,775.$$

Le programme A retourne 12,775.

Pour comprendre en détail

Attention : Le programme A ne demande pas de calculer le carré de b (c'est le programme B) : on doit bien multiplier b par c .

Les calculs intermédiaires utilisent la priorité de la multiplication sur l'addition et la soustraction. Une erreur fréquente est d'écrire $2 \times 1,15 = 2,15$ au lieu de 2,3 ; on peut poser la multiplication pour sécuriser les calculs décimaux.

3 Pour quel(s) nombre(s) de départ le programme A retourne-t-il le nombre 0 ?

Corrigé

Le programme A affiche $d = (2a + 5)(5a - 4)$.

On cherche a tel que $d = 0$, c'est-à-dire $(2a + 5)(5a - 4) = 0$.

D'après la propriété du produit nul, cela équivaut à $2a + 5 = 0$ ou $5a - 4 = 0$.

- $2a + 5 = 0$ donne $2a = -5$, donc $a = \frac{-5}{2} = -2,5$;
- $5a - 4 = 0$ donne $5a = 4$, donc $a = \frac{4}{5} = 0,8$.

Le programme A retourne 0 pour les nombres $-2,5$ et $0,8$.

Pour comprendre en détail

Le programme A calcule $d = (2a + 5) \times (5a - 4)$. Pour trouver les nombres qui rendent ce produit nul, on utilise la propriété du produit nul.

À retenir : Un produit $A \times B$ est nul si et seulement si $A = 0$ ou $B = 0$.

Attention : Une erreur classique est de résoudre $5a - 4 = 0$ en écrivant $a = -\frac{4}{5}$. En isolant a , on obtient bien $a = \frac{4}{5} = 0,8$.

On peut vérifier les résultats en remplaçant : pour $a = -2,5$, $2a + 5 = 0$; pour $a = 0,8$, $5a - 4 = 0$. Le produit est alors nul dans les deux cas. Développer l'expression serait possible mais moins efficace.

4.a Si l'utilisateur saisit le nombre 3, quel résultat le programme B retourne-t-il ?

Corrigé

Le programme B correspond au calcul :

$$(2 \times 3 + 5)^2 = (6 + 5)^2 = 11^2 = 121.$$

Le programme B retourne donc 121.

Pour comprendre en détail

Le programme B traduit l'expression $(2x + 5)^2$: on multiplie par 2, on ajoute 5, puis on met le tout au carré.

Attention : Le carré s'applique au résultat de $2x + 5$, pas seulement au nombre de départ ni à 5. Par exemple, $3^2 + 5$ ou $2 \times 3 + 5^2$ ne correspondent pas au programme.

4.b Si l'utilisateur saisit le nombre $\frac{3}{4}$, quel résultat le programme B retourne-t-il ?

Corrigé

Programme B avec $\frac{3}{4}$:

- Double de $\frac{3}{4}$: $2 \times \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.
- Ajouter 5 : $\frac{3}{2} + 5 = \frac{3}{2} + \frac{10}{2} = \frac{13}{2}$.
- Carré du résultat : $\left(\frac{13}{2}\right)^2 = \frac{169}{4} = 42,25$.

Le programme B retourne $\frac{169}{4}$, soit **42,25**.

Pour comprendre en détail

À retenir : Pour additionner un entier à une fraction, on écrit l'entier avec le même dénominateur.

Pour élever une fraction au carré, on élève le numérateur et le dénominateur au carré : $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$.

Attention : Le programme demande de prendre le double *avant* d'ajouter 5. Une erreur fréquente est d'ajouter 5 à la fraction sans avoir réduit au même dénominateur.

5.a On détermine les résultats suivants retournés par le programme B à l'aide d'une feuille de calcul automatisé.

1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	25	49	81	121	169	225	289	361	441

(Colonnes A à I ; la ligne 1 contient les nombres de départ, la ligne 2 les résultats du programme B.) Quelle cellule du tableur permet de retrouver la réponse à la question 4.a ci-dessus ?

Corrigé

Le nombre de départ **3** est dans la colonne D car, sur la ligne 1 : A1 = **0**, B1 = **1**, C1 = **2**, D1 = **3**. Le résultat du programme B pour **3** se lit donc sur la ligne 2 de cette même colonne, c'est-à-dire en **D2**. La cellule cherchée est **D2**.

Pour comprendre en détail

Le tableau est présenté sans les lettres de colonnes : le premier « 1 » de la première ligne est le numéro de ligne, pas une donnée. Dans un tableur, une cellule est repérée par sa colonne (lettre) puis sa ligne (nombre).

Attention : ne pas confondre la cellule D1 (qui contient le nombre de départ **3**) avec D2 (qui contient le résultat **121**). Ici, on demande la cellule qui permet de retrouver la réponse à la question 4.a, donc le résultat.

5.b Quelle formule a pu être saisie dans la cellule A2 de la feuille de calcul automatisé afin de la copier-glisser sur la ligne 2 ?

Corrigé

En A2, on peut saisir : $=(2*A1+5)^2$.

A1 contient le nombre de départ ; en copiant vers la droite, la formule s'adapte en $=(2*B1+5)^2$, $=(2*C1+5)^2$, etc., ce qui correspond au programme B.

Pour comprendre en détail

À retenir : Dans un tableur, le symbole $^$ permet d'élever à une puissance et l'opérateur $*$ réalise la multiplication. Une référence de cellule sans \$ (comme A1) est *relative* : elle s'adapte automatiquement lors d'un copier-glisser.

Attention : Écrire $=2*A1+5^2$ calculerait $2 \times A1 + 25$ et non $(2A1 + 5)^2$. La mise entre parenthèses de $(2*A1+5)$ avant d'élever au carré est indispensable.

Une autre formule possible est $=\text{PUISSANCE}(2*A1+5;2)$ selon le tableur (séparateur d'argument « ; » en version française).

6.a Pour quel nombre de départ le programme B retourne-t-il le nombre zéro ?

Corrigé

Soit x le nombre choisi. Le programme B calcule $(2x + 5)^2$.

On cherche x tel que $(2x + 5)^2 = 0$.

Or, un carré est nul si et seulement si l'expression élevée au carré est nulle. Donc :

$$2x + 5 = 0$$

$$2x = -5$$

$$x = -\frac{5}{2} = -2,5.$$

Le programme B retourne 0 pour le nombre de départ $-2,5$.

Pour comprendre en détail

Le programme B construit d'abord l'expression $2x + 5$ puis l'élève au carré. L'équation $(2x + 5)^2 = 0$ se résout donc directement en annulant $2x + 5$.

À retenir : Pour toute expression A , $A^2 = 0$ équivaut à $A = 0$.

Attention : Développer le carré $(2x + 5)^2$ donnerait $4x^2 + 20x + 25 = 0$, une équation du second degré inutilement compliquée ici. Pense aussi au signe négatif du résultat.

On peut vérifier en remplaçant la valeur trouvée dans $2x + 5$: on doit obtenir 0, ce qui donne bien $0^2 = 0$.

6.b Ce nombre de départ est-il rationnel ? Justifier.

Corrigé

Le nombre de départ trouvé à la question 6.a est $-2,5$.

Or $-2,5 = -\frac{5}{2}$, où -5 et 2 sont des entiers relatifs, avec $2 \neq 0$.

Donc $-2,5$ est le quotient de deux entiers : c'est un nombre rationnel.

Conclusion : oui, ce nombre de départ est rationnel.

Pour comprendre en détail

À retenir : Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers relatifs, avec $b \neq 0$. Tout nombre décimal est rationnel.

Attention : Une écriture décimale avec une virgule ne rend pas un nombre irrationnel ; ici $-2,5$ est bien rationnel.

6.c Ce nombre de départ est-il décimal ? Justifier.

Corrigé

Le nombre de départ trouvé à la question 6.a est $-2,5$. Or, $-2,5 = -\frac{25}{10}$, qui est une fraction décimale. Par définition, un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale. Donc $-2,5$ est un nombre décimal.

Pour comprendre en détail

À retenir : Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec a entier relatif et n entier naturel. Avoir une écriture décimale finie est équivalent.

Attention : Tout nombre décimal est rationnel, mais la réciproque est fausse. Par exemple, $\frac{1}{3}$ est rationnel mais n'est pas décimal car son écriture décimale est infinie. Ici, l'écriture décimale est finie, donc le nombre est bien décimal.

7 Pour quel(s) nombre(s) de départ le programme A retourne-t-il le même résultat que le programme B ?

Corrigé

Pour un nombre de départ x :

Programme A : $(2x + 5)(5x - 4)$.

Programme B : $(2x + 5)^2$.

On cherche x tel que :

$$(2x + 5)(5x - 4) = (2x + 5)^2$$

$$(2x + 5)(5x - 4) - (2x + 5)^2 = 0$$

$$(2x + 5)[(5x - 4) - (2x + 5)] = 0$$

$$(2x + 5)(5x - 4 - 2x - 5) = 0$$

$$(2x + 5)(3x - 9) = 0$$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

- $2x + 5 = 0$ donc $2x = -5$ donc $x = -\frac{5}{2} = -2,5$;
- $3x - 9 = 0$ donc $3x = 9$ donc $x = 3$.

Conclusion : les nombres de départ cherchés sont $-2,5$ et 3 .

Pour comprendre en détail

À retenir : Pour résoudre une équation du type $A \times B = 0$, on utilise la propriété : si un produit est nul, alors l'un au moins de ses facteurs est nul.

Attention : Il ne faut pas diviser les deux membres par $2x + 5$: comme ce facteur dépend de x , il peut s'annuler et on éliminerait alors une solution.

Une autre méthode consisterait à développer puis factoriser, mais la factorisation directe est plus simple et évite les calculs inutiles.

Exercice 4

1.a Au premier essai : quelle est la probabilité que Jeanne touche un bateau ?

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								

Corrigé

La grille comporte $8 \times 8 = 64$ cases. Les quatre bateaux occupent $2 + 3 + 3 + 4 = 12$ cases. Le choix d'une case étant équiprobable, la probabilité de toucher un bateau au premier essai est $\frac{12}{64} = \frac{3}{16}$.

La probabilité cherchée est donc $\frac{3}{16}$.

Pour comprendre en détail

En situation d'équiprobabilité, on divise le nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles.

Attention : il faut compter des cases occupées, pas des navires : le bateau de 4 cases compte pour 4 issues favorables.

On peut vérifier sur la grille que les 12 cases grisées sont bien les seules issues favorables. La fraction a été simplifiée par 4 : $\frac{12}{64} = \frac{3}{16}$.

1.b Quelle est la probabilité que Jeanne ne touche aucun bateau ?

Corrigé

La grille comporte $8 \times 8 = 64$ cases.

Les navires occupent $2 + 3 + 3 + 4 = 12$ cases, donc la probabilité de toucher un bateau au premier essai est $\frac{12}{64} = \frac{3}{16}$.

L'événement « ne toucher aucun bateau » est l'événement contraire de « toucher un bateau ». Sa probabilité est donc :

$$1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$$

La probabilité que Jeanne ne touche aucun bateau au premier essai est $\frac{13}{16}$.

Pour comprendre en détail

On peut aussi compter directement les cases vides : $64 - 12 = 52$, d'où une probabilité de $\frac{52}{64} = \frac{13}{16}$.

À retenir : Pour un événement A , la probabilité de l'événement contraire $\bar{A}$ est $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Attention : Il ne faut pas oublier les deux navires de trois cases en plus du navire de quatre cases et de celui de deux cases.

1.c *Un des bateaux a une chance sur seize d'être touché. De combien de cases est-il composé ?*

Corrigé

La grille comporte $8 \times 8 = 64$ cases.

Notons n le nombre de cases du bateau cherché.

Au premier essai, les choix étant équiprobables, la probabilité de toucher ce bateau est $\frac{n}{64}$.

On veut $\frac{n}{64} = \frac{1}{16}$.

Or $\frac{1}{16} = \frac{4}{64}$, donc $n = 4$.

Le bateau qui a une chance sur seize d'être touché est composé de **4 cases**.

Pour comprendre en détail

La probabilité s'obtient en comparant le nombre de cases du bateau au nombre total de cases de la grille. Il faut donc exprimer $\frac{1}{16}$ avec un dénominateur égal à **64** pour retrouver le nombre de cases.

Attention : Ne pas confondre le nombre de bateaux (ici 4) avec le nombre de cases d'un bateau. La probabilité dépend de la surface occupée par un bateau sur la grille, pas du nombre total de bateaux.

1.d *Jeanne choisit une case de la colonne B. Quelle est la probabilité qu'elle touche un bateau ?*

Corrigé

La colonne B comporte 8 cases. Les cases occupées par un bateau dans cette colonne sont B4, B6, B7 et B8, soit 4 cases au total. Chaque case de la colonne B étant choisie de façon équiprobable, la probabilité de toucher un bateau est donc :

$$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Jeanne a donc une chance sur deux de toucher un bateau en choisissant une case de la colonne B.

Pour comprendre en détail

On restreint ici l'expérience aléatoire aux 8 cases de la colonne B, toutes équiprobables. La probabilité se calcule donc comme le quotient du nombre de cases occupées par le nombre total de cases de cette colonne.

À retenir : Quand toutes les issues sont équiprobables, la probabilité d'un événement est $\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

Attention : Une erreur fréquente est d'oublier que la case B4 appartient au navire horizontal de 4 cases (A4-D4) ou de compter B5 qui est vide. Mieux vaut vérifier sur la grille en listant les cases de B1 à B8.

- 2** *Au premier essai de la partie, Jeanne désigne la case « E1 ». Teddy annonce « Touché ! ». Jeanne souhaite couler le bateau touché et choisit une case adjacente à la case « E1 ». Quelle est la probabilité qu'elle coule le bateau au coup suivant ? Justifier.*

Corrigé

La case E1 est située sur le bord supérieur de la grille. Ses cases adjacentes par un côté sont donc D1, F1 et E2, soit 3 cases possibles équiprobables.

D'après la grille, le navire touché en E1 occupe les cases E1 et F1. Pour le couler au coup suivant, Jeanne doit toucher la case F1.

Il y a donc 1 issue favorable sur 3 issues possibles, d'où une probabilité de $\frac{1}{3}$.

Pour comprendre en détail

À retenir : Quand toutes les issues sont équiprobables, la probabilité d'un événement est $\frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}}$.

Attention : Des cases adjacentes en diagonale ne comptent pas dans la bataille navale : seules les cases qui partagent un côté sont adjacentes. Ici, E1 étant sur le bord supérieur, elle n'a que trois cases voisines par un côté.

- 3** *Teddy annonce « À l'eau ! » pour les deux premiers essais de Jeanne. Quelle est la probabilité de toucher un bateau pour son troisième essai ?*

Corrigé

La grille comporte $8 \times 8 = 64$ cases.

Deux cases vides ont déjà été annoncées, il reste donc $64 - 2 = 62$ cases possibles.

Les navires occupent $2 + 3 + 3 + 4 = 12$ cases, toutes encore non énoncées puisque les deux premiers tirs étaient « À l'eau ! ».

La probabilité de toucher un bateau au troisième essai est donc $\frac{12}{62} = \frac{6}{31}$.

La probabilité demandée est $\frac{6}{31}$.

Pour comprendre en détail

À retenir : Quand toutes les issues sont équiprobables, la probabilité d'un événement est $\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

Les deux essais « À l'eau ! » indiquent que les deux cases annoncées étaient vides : elles ne peuvent plus être choisies, mais les cases des bateaux restent toutes présentes dans l'ensemble des choix possibles.

L'erreur classique serait de conserver le dénominateur à **64**, ou au contraire de retirer aussi des cases de bateaux. Ici, seules des cases vides sont éliminées, ce qui augmente légèrement la probabilité de toucher un bateau par rapport au premier essai.

Exercice 5

- 1 En utilisant cette formule, convertir 95°F en degré Celsius.

Corrigé

On applique la formule $C = (F - 32) \times \frac{5}{9}$ avec $F = 95$.

$$C = (95 - 32) \times \frac{5}{9} = 63 \times \frac{5}{9} = 35.$$

Donc 95°F correspond à 35°C .

Pour comprendre en détail

Attention : La soustraction doit être effectuée avant la multiplication : les parenthèses autour de $F - 32$ sont indispensables.

On peut simplifier 63 et 9 par 9 , ce qui donne 7×5 , pour éviter de calculer 63×5 puis de diviser par 9 .

Une vérification possible : repasser en degrés Fahrenheit avec la formule réciproque $F = \frac{9}{5}C + 32$ et constater qu'on retrouve 95 .

- 2 En utilisant cette formule, convertir 5°C en degré Fahrenheit.

Corrigé

On remplace C par 5 :

$$5 = (F - 32) \times \frac{5}{9}.$$

En multipliant les deux membres par $\frac{9}{5}$:

$$5 \times \frac{9}{5} = F - 32, \text{ soit } 9 = F - 32.$$

En ajoutant 32 aux deux membres :

$$F = 9 + 32 = 41.$$

Donc 5°C correspond à 41°F .

Pour comprendre en détail

La formule donne C en fonction de F . Pour retrouver F , on applique les opérations inverses dans l'ordre inverse de celui de la formule : F est d'abord diminué de 32 , puis multiplié par $\frac{5}{9}$; on multiplie

donc d'abord par $\frac{9}{5}$, puis on ajoute 32.

Attention : Ne remplacez pas F par 5 : la valeur donnée est en degrés Celsius, donc $C = 5$. De plus, l'ajout de 32 se fait en dernier dans la résolution, pas avant la multiplication.

Autre méthode : à partir de $C = (F - 32) \times \frac{5}{9}$, on peut établir la formule inverse $F = \frac{9}{5}C + 32$, puis remplacer C par 5.

3 Existe-t-il des températures pour lesquelles la mesure en degrés Celsius est égale à la mesure en degrés Fahrenheit ? Donner toutes les réponses possibles en justifiant.

Corrigé

On cherche F tel que $C = F$.

En remplaçant C par F dans la formule $C = (F - 32) \times \frac{5}{9}$, on obtient :

$$F = (F - 32) \times \frac{5}{9}$$

En multipliant chaque membre par 9 :

$$9F = 5(F - 32)$$

$$9F = 5F - 160$$

$$9F - 5F = -160$$

$$4F = -160$$

$$F = -40$$

Vérification : si $F = -40$, alors $C = (-40 - 32) \times \frac{5}{9} = (-72) \times \frac{5}{9} = -40$.

Conclusion : il existe une seule température pour laquelle les deux mesures sont égales : $-40^\circ\text{C} = -40^\circ\text{F}$.

Pour comprendre en détail

À retenir : Dire que la mesure en degrés Celsius est égale à la mesure en degrés Fahrenheit signifie simplement que $C = F$. On peut alors remplacer l'une des deux lettres par l'autre dans la formule.

Attention : Dans l'équation $F = (F - 32) \times \frac{5}{9}$, il ne faut pas oublier de développer le produit $5(F - 32)$: on obtient bien $5F - 160$, et non $5F - 32$.

Une autre méthode possible consiste à exprimer F en fonction de C , puis à résoudre $F = C$, mais l'équation obtenue serait équivalente et mènerait à la même solution.

Exercice 6

- 1 Appliquer cette règle pour calculer le produit 6×8 .

Corrigé

Pour 6, on lève 1 doigt : il reste 4 doigts baissés.

Pour 8, on lève 3 doigts : il reste 2 doigts baissés.

La somme des doigts levés donne $1 + 3 = 4$ dizaines.

Le produit des doigts baissés donne $4 \times 2 = 8$ unités.

On obtient donc 4 dizaines et 8 unités, soit 48.

Ainsi, $6 \times 8 = 48$.

Pour comprendre en détail

À retenir : Pour deux nombres a et b compris entre 5 et 10, la règle revient à calculer $10((a - 5) + (b - 5)) + (10 - a)(10 - b)$.

Attention : Les orteils servent uniquement à représenter les 5 de départ ; seuls les doigts des mains interviennent dans le calcul (levés pour les dizaines, baissés pour les unités).

- 2.a On note g le nombre de doigts levés de la main gauche et d le nombre de doigts levés de la main droite. Que représentent dans ce contexte les nombres $(5 - g)$ et $(5 - d)$?

Corrigé

Comme chaque main possède 5 doigts, $5 - g$ représente le nombre de doigts baissés de la main gauche et $5 - d$ représente le nombre de doigts baissés de la main droite.

Pour comprendre en détail

Ces deux nombres sont les compléments à 5 du nombre de doigts levés de chaque main. Dans cette règle, les orteils ne sont pas utilisés pour le calcul : ils servent uniquement à représenter la partie « 5 » des nombres, car ils sont toujours levés. La question prépare le calcul des unités, dans lequel on multipliera justement ces nombres de doigts baissés.

À retenir : Pour une main, le nombre total de doigts est 5, donc le nombre de doigts baissés est égal à 5 moins le nombre de doigts levés.

2.b Démontrer l'égalité : $(5 + g)(5 + d) = 10(g + d) + (5 - g)(5 - d)$.

Corrigé

Développons le membre de gauche :

$$(5 + g)(5 + d) = 25 + 5d + 5g + gd.$$

Développons le membre de droite :

$$\begin{aligned} 10(g + d) + (5 - g)(5 - d) &= 10g + 10d + (25 - 5d - 5g + gd) \\ &= 25 + 5g + 5d + gd. \end{aligned}$$

Les deux membres sont donc égaux : $(5 + g)(5 + d) = 10(g + d) + (5 - g)(5 - d)$.

Pour comprendre en détail

À retenir : la double distributivité $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ permet de développer chaque membre.

Attention : dans $(5 - g)(5 - d)$, les termes croisés sont $-5g$ et $-5d$, mais le produit des deux derniers termes est $+gd$.

Cette égalité montre pourquoi la règle digitale fonctionne : le membre de gauche est le produit cherché, le membre de droite traduit le nombre de dizaines $g + d$ et les unités $(5 - g)(5 - d)$.

2.c Conclure quant à la validité de la règle de calcul.

Corrigé

Les nombres multipliés sont $5 + g$ et $5 + d$, avec g et d entiers compris entre 0 et 5 ; ce sont donc bien des entiers de 5 à 10.

D'après la question 2.b, on a : $(5 + g)(5 + d) = 10(g + d) + (5 - g)(5 - d)$.

Dans cette égalité, $g + d$ est la somme des doigts levés, donc $10(g + d)$ représente des dizaines ; $(5 - g)(5 - d)$ est le produit des doigts baissés, donc des unités. L'égalité étant vraie pour toutes les valeurs entières de g et d comprises entre 0 et 5, la règle de calcul est valide pour tout produit de deux entiers compris entre 5 et 10, quitte à convertir les unités en dizaines lorsque le produit des doigts baissés dépasse 9.

Pour comprendre en détail

L'égalité de la question 2.b démontre la règle pour tous les couples possibles de doigts levés, et pas seulement sur un exemple.

Attention : le produit des doigts baissés peut dépasser 9 ; il vaut au maximum $5 \times 5 = 25$. Il faut alors convertir les unités en dizaines, comme dans l'exemple où 12 unités deviennent 1 dizaine et 2 unités.

La restriction $0 \leq g \leq 5$ et $0 \leq d \leq 5$ est essentielle : chaque main lève entre 0 et 5 doigts, les cinq orteils étant toujours levés pour représenter le nombre de départ.