

ANNALES CRPE · MATHÉMATIQUES · 2023

Corrigé détaillé

CRPE 2023 – Mathématiques – Groupement 3

Épreuve écrite disciplinaire de mathématiques (2e épreuve d'admissibilité)

Durée : 3 heures

20 points

Exercice 1

Exercice 2

Exercice 3

Exercice 4

Exercice 5

Pour chaque question : **rappel de l'énoncé**, **corrigé** rédigé, puis « **Pour comprendre en détail** » (méthode, rappels de cours, erreurs fréquentes). À utiliser avec le sujet officiel (documents, tableaux et figures).

Sujet : Ministère de l'Éducation nationale – session 2023. Corrigé rédigé par Campus XYZ – campusxyz.fr. Tous droits réservés.

Exercice 1

1 L'entier 4 216 est-il un multiple de 17 ? Justifier.

Corrigé

On effectue la division euclidienne de 4 216 par 17 :

$4\,216 = 17 \times 248$ donc le reste est 0.

Comme 4 216 peut s'écrire 17×248 avec 248 entier, 4 216 est un multiple de 17.

Pour comprendre en détail

À retenir : Un entier a est un multiple d'un entier b s'il existe un entier k tel que $a = b \times k$. Cela revient à dire que la division euclidienne de a par b a un reste nul.

Une vérification rapide : $17 \times 250 = 4\,250$, donc $17 \times 248 = 4\,250 - 17 \times 2 = 4\,250 - 34 = 4\,216$.

Attention : Ne pas confondre « 17 divise 4 216 » avec « 4 216 divise 17 » ; ici c'est bien 4 216 qui est le multiple et 17 le diviseur.

2.a Guillaume veut revoir sa leçon en prenant son petit déjeuner. Malheureusement, il a renversé son chocolat sur sa feuille. Le chiffre des unités et la justification de l'exemple du maître sont illisibles : « 2 29□ est divisible par 3 car ... ».

Rappeler le critère de divisibilité par 3.

Corrigé

Un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Pour comprendre en détail

Attention : Ne pas confondre avec les critères de divisibilité par 2 ou par 5 qui ne regardent que le chiffre des unités. Pour 3, il faut additionner tous les chiffres.

Ce critère fonctionne parce que $10 = 9 + 1$, $100 = 99 + 1$, etc., donc chaque puissance de 10 a pour reste 1 dans la division par 3. Autre vérification possible : poser la division euclidienne par 3, mais le critère est plus rapide.

2.b Donner toutes les valeurs possibles du chiffre des unités, caché par la tache (le nombre s'écrit $2\ 29\ \square$, de somme de chiffres $2 + 2 + 9 + \square$).

Corrigé

Soit n le chiffre des unités caché. Le nombre s'écrit $2\ 29n$.

Sa somme des chiffres est $2 + 2 + 9 + n = 13 + n$, avec $0 \leq n \leq 9$.

D'après le critère de divisibilité par 3, le nombre est divisible par 3 si et seulement si cette somme est un multiple de 3.

On a $13 \leq 13 + n \leq 22$. Les multiples de 3 compris entre 13 et 22 sont **15, 18 et 21**.

- $13 + n = 15$ donc $n = 2$;
- $13 + n = 18$ donc $n = 5$;
- $13 + n = 21$ donc $n = 8$.

Les valeurs possibles du chiffre des unités sont donc **2, 5 et 8**.

Pour comprendre en détail

À retenir : Un entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.

La somme des chiffres connus vaut 13. Comme le chiffre caché est entre 0 et 9, la somme totale est automatiquement comprise entre 13 et 22 : il suffit donc de chercher les multiples de 3 dans cet intervalle, puis de retrouver le chiffre correspondant.

Attention : On oublie parfois que le chiffre caché doit être un chiffre, donc compris entre 0 et 9. Par exemple, continuer la liste des multiples de 3 au-delà de 22 donnerait des valeurs qui ne sont pas des chiffres.

Autre méthode possible : tester les dix nombres **2 290, 2 291, ..., 2 299** et vérifier lesquels sont divisibles par 3, par calcul mental ou en posant la division.

3.a On admet qu'un nombre entier est divisible par 7 si et seulement si la différence entre son nombre de dizaines et le double de son chiffre des unités est un multiple de 7, positif ou négatif. Par exemple, 294 est divisible par 7 car $29 - 4 \times 2 = 21$, et 21 est divisible par 7.

En détaillant les étapes, vérifier que **413** est bien divisible par 7 en utilisant le critère indiqué ci-dessus.

Corrigé

Pour **413**, le nombre de dizaines est **41** et le chiffre des unités est **3**.

On applique le critère : $41 - 2 \times 3 = 41 - 6 = 35$.

Or $35 = 5 \times 7$, donc **35** est un multiple de 7.

Par conséquent, **413** est divisible par 7 (en effet, $413 = 7 \times 59$).

Pour comprendre en détail

Le corrigé officiel de cette annale comporte une coquille : il conclut avec « 423 » au lieu de « 413 » ; le calcul et le nombre étudié correspondent bien à **413**.

Attention : Ne pas confondre le *chiffre* des dizaines (ici **1**) et le *nombre* de dizaines (ici **41**) : le critère de divisibilité par **7** utilise le nombre de dizaines.

3.b *Le nombre **5 292** est-il divisible par 7 ? Répondre en appliquant, plusieurs fois si nécessaire, le critère précédent.*

Corrigé

Pour **5 292**, le nombre de dizaines est **529** et le chiffre des unités est **2**.

$$529 - 2 \times 2 = 529 - 4 = 525.$$

On applique le critère à **525** : son nombre de dizaines est **52** et son chiffre des unités est **5**.

$$52 - 2 \times 5 = 52 - 10 = 42.$$

Or $42 = 6 \times 7$, donc **42** est un multiple de 7.

D'après le critère, **525** est divisible par 7, donc **5 292** est divisible par 7.

En effet, $5\,292 = 7 \times 756$.

Pour comprendre en détail

Le critère donné est une équivalence : si la différence calculée est un multiple de 7, alors le nombre de départ est divisible par 7. On peut donc l'appliquer plusieurs fois de suite, en remplaçant à chaque étape le nombre par la différence obtenue, jusqu'à aboutir à un multiple de 7 connu.

Attention : le « nombre de dizaines » d'un entier est la partie entière de sa division par 10 : pour **5 292**, c'est **529**, pas **529,2**.

On peut aussi vérifier directement par division euclidienne : $5\,292 = 7 \times 756$, le reste est 0.

3.c Pour déterminer si **1 138 984** est divisible par 7, on utilise le critère précédent à l'aide d'un tableur. On rappelle que la fonction ENT renvoie la partie entière d'un nombre. Dans la cellule B1 on a saisi la formule « =ENT(A1/10) ».

	A	B	C	D
1	1138984	113898	4	113890
2	113890	11389	0	11389
3	11389	1138	9	1120
4	1120	112	0	112
5	112	11	2	7

Observer la feuille de calcul puis indiquer des formules ayant pu être saisies dans les cellules C1 et D1 qui, étirées vers le bas, permettent d'obtenir directement la feuille de calcul ci-dessus.

Corrigé

La cellule **B1** contient le nombre de dizaines du nombre placé en **A1** : =ENT(A1/10).

La cellule **C1** doit contenir le chiffre des unités du nombre placé en **A1**. Comme $A1 = 10 \times B1 + \text{chiffre des unités}$, on peut saisir en C1 : =A1-10*B1.

La cellule **D1** applique le critère de divisibilité par 7 : nombre de dizaines moins le double du chiffre des unités, soit : =B1-2*C1.

Pour réutiliser le résultat de D1 comme nouveau nombre de départ, on saisit en **A2** : =D1, puis on étire vers le bas.

Vérification sur la ligne 1 : $B1 = 113\,898$, $C1 = 4$, $D1 = 113\,898 - 2 \times 4 = 113\,890$, ce qui correspond bien à la feuille de calcul.

Pour comprendre en détail

À retenir : La fonction ENT renvoie la partie entière, donc =ENT(A1/10) donne le quotient de la division euclidienne de A1 par 10, c'est-à-dire le nombre de dizaines. Le chiffre des unités peut aussi s'obtenir avec =MOD(A1;10) ; la formule proposée en C1 en est une équivalence.

Attention : Les références de cellules doivent rester *relatives* (sans symbole \$) pour que l'étirement vers le bas adapte automatiquement les numéros de ligne. Une erreur fréquente est d'oublier la formule **A2 = D1** : c'est elle qui permet de réinjecter le résultat intermédiaire comme nouveau nombre de départ de l'algorithme.

La feuille aboutit à **D5 = 7**, qui est un multiple de 7, donc **1 138 984** est divisible par 7, mais ce n'était pas demandé dans cette question.

3.d Le nombre **1 138 984** est-il divisible par 7 ? Justifier en interprétant les résultats fournis par la feuille de calcul.

Corrigé

Le critère utilisé est : *un nombre est divisible par 7 si et seulement si la différence entre son nombre de dizaines et le double de son chiffre des unités est un multiple de 7.*

Dans la feuille de calcul, la colonne D calcule cette différence pour le nombre de la colonne A de la même ligne.

- Pour A5 = 112, D5 = 7. Comme $7 = 7 \times 1$ est un multiple de 7, on en déduit que **112** est divisible par 7.
- Pour A4 = 1120, D4 = 112, qui est divisible par 7 d'après l'étape précédente, donc **1120** est divisible par 7.
- Pour A3 = 11389, D3 = 1120, qui est divisible par 7, donc **11389** est divisible par 7.
- Pour A2 = 113890, D2 = 11389, qui est divisible par 7, donc **113890** est divisible par 7.
- Pour A1 = 1138984, D1 = 113890, qui est divisible par 7, donc **1 138 984** est divisible par 7.

On peut vérifier que $1\ 138\ 984 = 7 \times 162\ 712$.

Le nombre **1 138 984** est donc divisible par 7.

Pour comprendre en détail

À retenir : Le critère est une équivalence (« si et seulement si ») : si la différence « nombre de dizaines moins double du chiffre des unités » est un multiple de 7, alors le nombre testé est divisible par 7. C'est ce qui permet de remonter les lignes du tableur.

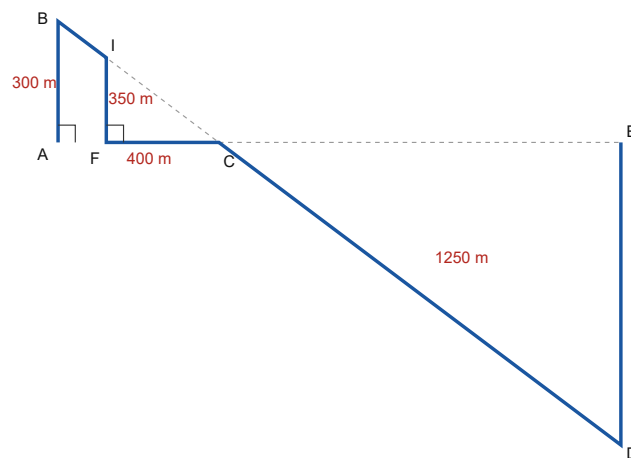
Attention : Il ne suffit pas de constater que D5 = 7 est divisible par 7 pour conclure directement sur **1 138 984**. Il faut justifier la remontée ligne par ligne, car chaque résultat de la colonne D est précisément le nombre testé à la ligne précédente.

Une autre vérification possible est de poser la division $1\ 138\ 984 \div 7$ ou de vérifier l'égalité $1\ 138\ 984 = 7 \times 162\ 712$.

Exercice 2

Partie 1 – Le cross de Nadia

1.a Déterminer la longueur BC.



Corrigé

ABC est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

$$BC^2 = 300^2 + 400^2 = 90\,000 + 160\,000 = 250\,000.$$

$$\text{Donc } BC = \sqrt{250\,000} = 500.$$

La longueur BC est 500 m.

Pour comprendre en détail

À retenir : Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Attention : L'angle droit est en A, donc BC est l'hypoténuse. Les longueurs IC = 350 m et CD = 1 250 m ne servent pas dans cette question.

Vérification possible : les longueurs 300, 400 et la valeur trouvée sont proportionnelles à 3, 4 et 5, ce qui confirme le résultat.

1.b Déterminer les longueurs IF et CF .

Corrigé

Dans le triangle ABC , on sait que $F \in [AC]$, $I \in [BC]$ et que $(FI) \parallel (AB)$.

Les points C, F, A et C, I, B sont alignés dans le même ordre, donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{CF}{CA} = \frac{CI}{CB} = \frac{IF}{AB}.$$

On en déduit :

$$CF = \frac{CA \times CI}{CB} = \frac{400 \times 350}{500} = 280 \text{ m.}$$

$$IF = \frac{AB \times CI}{CB} = \frac{300 \times 350}{500} = 210 \text{ m.}$$

Les longueurs demandées sont donc $CF = 280$ m et $IF = 210$ m.

Pour comprendre en détail

À retenir : Pour utiliser le théorème de Thalès, il faut deux droites sécantes et deux droites parallèles, puis des points alignés dans le bon ordre. Ici, les droites sécantes sont (CA) et (CB) , et les parallèles sont (AB) et (FI) .

Le calcul s'appuie sur $BC = 500$ m obtenu à la question 1.a. Une erreur fréquente est d'écrire des rapports avec FA et IB au lieu de CA et CB ; or les rapports utilisés partent tous du sommet C .

Autre façon de faire : le triangle CIF est une réduction du triangle CAB de coefficient $k = \frac{CI}{CB} = \frac{350}{500} = 0,7$, donc $CF = 0,7 \times CA$ et $IF = 0,7 \times AB$.

On peut vérifier la cohérence : $CF < CA$ et $IF < AB$, car F et I sont à l'intérieur des segments.

1.c Déterminer la longueur ED .

Corrigé

Les points C, B, D et C, A, E sont alignés, avec C entre B et D et entre A et E , et $(AB) \parallel (DE)$. D'après le théorème de Thalès appliqué aux triangles CBA et CDE , on a :

$$\frac{ED}{AB} = \frac{CD}{CB}.$$

Or $CB = BC = 500$ m, $CD = 1\,250$ m et $AB = 300$ m, donc :

$$ED = \frac{300 \times 1\,250}{500} = 750.$$

La longueur ED vaut donc **750** m.

Pour comprendre en détail

À retenir : Le théorème de Thalès s'applique dès que deux droites sécantes sont coupées par deux droites parallèles. Ici, la configuration est « en papillon » car le point C est entre A et E ainsi qu'entre B et D . Les côtés correspondants sont ED et AB , CD et CB .

Attention : Une erreur fréquente est d'inverser les rapports. Pour l'éviter, on peut vérifier la cohérence : $CD = 1\,250$ m est supérieur à $CB = 500$ m, donc le rapport CD/CB est supérieur à 1 et ED doit être supérieur à $AB = 300$ m, ce qui est bien le cas.

La donnée $IC = 350$ m n'intervient pas dans cette question ; elle servait à la question 1.b. On peut aussi raisonner avec un coefficient d'agrandissement CD/CB appliqué à AB , ce qui évite d'écrire une fraction complexe.

1.d Calculer la longueur du parcours ABIFCDE.

Corrigé

D'après les questions précédentes : $BC = 500$ m, $IF = 210$ m, $CF = 280$ m et $ED = 750$ m.

Comme $I \in [BC]$, on a :

$$BI = BC - IC = 500 - 350 = 150 \text{ m.}$$

La longueur du parcours est donc :

$$AB + BI + IF + FC + CD + DE = 300 + 150 + 210 + 280 + 1\,250 + 750 = 2\,940 \text{ m.}$$

La longueur du parcours ABIFCDE est **2 940** m.

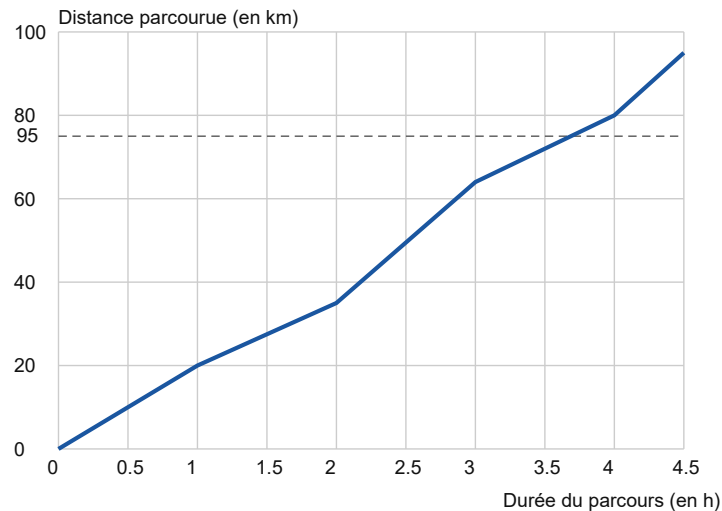
Pour comprendre en détail

Attention : Le parcours ne suit pas tout le segment $[BC]$: il emprunte seulement $B \rightarrow I$ puis $F \rightarrow C$. Il faut donc additionner BI et FC , et non BC .

Sur un schéma à main levée, cocher chaque segment du trajet aide à ne pas en oublier.

Partie 2 – La sortie à vélo de Quentin

2.a La durée du parcours en heure est-elle proportionnelle à la distance parcourue en kilomètre ? Justifier.



Corrigé

Non, la durée du parcours n'est pas proportionnelle à la distance parcourue. En effet, une situation de proportionnalité est représentée par une droite passant par l'origine. Or la courbe obtenue est une ligne brisée, ce n'est pas une droite. De plus, pour 1 h la distance est 20 km ; s'il y avait proportionnalité, pour 2 h on aurait parcouru $2 \times 20 = 40$ km, or le graphique indique 35 km. Donc la durée du parcours n'est pas proportionnelle à la distance parcourue.

Pour comprendre en détail

La courbe passe par l'origine mais elle n'est pas une droite : elle est formée de segments de pentes différentes, ce qui traduit une vitesse qui change au cours du parcours. On peut aussi justifier par les quotients distance/durée : $\frac{20}{1} = 20$, $\frac{35}{2} = 17,5$, $\frac{64}{3} \approx 21,3$; ces quotients ne sont pas constants.

À retenir : pour une situation de proportionnalité, la représentation graphique est une droite passant par l'origine.

Attention : passer par l'origine ne suffit pas ; il faut que la courbe soit une droite unique, pas une ligne brisée.

2.b Les réponses aux questions suivantes seront données avec la précision permise par le graphique. Quelle distance Quentin a-t-il parcourue en 1 h ?

Corrigé

Sur le graphique, le point de la courbe d'abscisse 1 h a pour ordonnée 20 km.

Quentin a donc parcouru 20 km en 1 h.

Pour comprendre en détail

En abscisse figure la durée en heures, en ordonnée la distance en kilomètres. Le point d'abscisse **1 h** est un point de la courbe dont l'ordonnée se lit directement sur l'axe des distances ; ici, aucune interpolation n'est nécessaire. Attention à ne pas confondre abscisse et ordonnée.

- 2.c** Déterminer la vitesse moyenne de Quentin durant la première heure, en mètre par seconde, avec un arrondi au centième.

Corrigé

Le graphique indique qu'en **1 h**, Quentin a parcouru **20 km**.

On convertit : **20 km = 20 000 m** et **1 h = 3 600 s**.

La vitesse moyenne est donc :

$$v = \frac{d}{t} = \frac{20\,000}{3\,600} = \frac{50}{9} \approx 5,56 \text{ m/s.}$$

La vitesse moyenne de Quentin durant la première heure est d'environ **5,56 m/s**.

Pour comprendre en détail

On peut aussi obtenir ce résultat en laissant la vitesse en km/h puis en la convertissant : **20 km/h**
 $= \frac{20}{3,6} \text{ m/s.}$

À retenir : **1 m/s = 3,6 km/h**, donc pour passer des km/h aux m/s on divise par **3,6**.

Attention : La valeur exacte $\frac{50}{9}$ vaut **5,555 ...** ; l'arrondi au centième est **5,56**, pas une troncature à **5,55**.

- 2.d** Quelle distance Quentin a-t-il parcourue en 1 h 45 ?

Corrigé

1 h 45 = 1,75 h.

Sur le graphique, à l'abscisse **1,75 h**, on lit une distance comprise entre **31** et **32** km. En effet, entre **(1 ; 20)** et **(2 ; 35)**, la distance varie de façon linéaire ; en interpolant : **20 + 15 × 0,75 = 31,25 km**, ce qui confirme la lecture.

Quentin a donc parcouru environ **31,25 km**, soit **31 à 32 km**, en 1 h 45.

Pour comprendre en détail

À retenir : **45 min = $\frac{45}{60}$ h = 0,75 h.**

Attention : la distance et la durée ne sont pas proportionnelles sur l'ensemble du trajet, car la courbe n'est pas une droite passant par l'origine. L'interpolation linéaire n'est valable que sur un segment rectiligne, ici entre 1 h et 2 h.

La question demande une lecture graphique avec la précision permise : une réponse entre 31 km et 32 km est donc acceptée. Une confusion fréquente est d'écrire $1\text{ h }45 = 1,45\text{ h}$.

2.e Estimer la vitesse de Quentin durant la troisième heure de son parcours, en kilomètre par heure.

Corrigé

La troisième heure s'étend de $t = 2\text{ h}$ à $t = 3\text{ h}$.

À $t = 2\text{ h}$, la distance parcourue est **35 km** ; à $t = 3\text{ h}$, elle est **64 km**.

Distance parcourue pendant cette heure : $64 - 35 = 29\text{ km}$.

Durée : $3 - 2 = 1\text{ h}$.

Vitesse moyenne : $v = \frac{29\text{ km}}{1\text{ h}} = 29\text{ km/h}$.

La vitesse de Quentin durant la troisième heure est donc d'environ **29 km/h**.

Pour comprendre en détail

À retenir : Sur un graphique distance-durée, la vitesse moyenne sur un intervalle est la pente du segment reliant les deux points correspondants : $v = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{durée}}$.

Attention : La « troisième heure » est l'intervalle de 2 h à 3 h, pas de 3 h à 4 h. Ne pas utiliser la distance totale à 3 h divisée par 3, ce qui donnerait une vitesse moyenne depuis le départ, et non durant cette heure seulement.

Les valeurs sont données par les points du graphique ; ici elles sont exactes, donc l'estimation correspond au calcul exact pour ce segment.

2.f Peut-on affirmer que sa vitesse moyenne lors de la troisième heure est supérieure de plus de **40 %** à sa vitesse moyenne lors de la première heure ? Justifier.

Corrigé

D'après le graphique, Quentin parcourt 20 km pendant la première heure (de 0 h à 1 h) donc sa vitesse moyenne est $v_1 = \frac{20}{1} = 20\text{ km/h}$.

Pendant la troisième heure (de 2 h à 3 h), il parcourt $64 - 35 = 29\text{ km}$, donc sa vitesse moyenne est $v_2 = \frac{29}{1} = 29\text{ km/h}$.

Le taux d'augmentation entre ces deux vitesses est $\frac{29 - 20}{20} \times 100 = \frac{9}{20} \times 100 = 45\%$.

Comme $45\% > 40\%$, on peut affirmer que sa vitesse moyenne lors de la troisième heure est supérieure de plus de **40 %** à sa vitesse moyenne lors de la première heure.

Pour comprendre en détail

À retenir : La vitesse moyenne sur un intervalle de temps est le quotient de la distance parcourue pendant cet intervalle par la durée de l'intervalle. Un taux d'évolution en pourcentage se calcule par $\frac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}} \times 100$.

Attention : Pour la troisième heure, il ne faut pas prendre la distance totale à $t = 3$ (64 km), mais la distance parcourue entre $t = 2$ et $t = 3$, soit $64 - 35$ km. De même, la première heure correspond bien à la distance à $t = 1$ car on part de 0 km.

Ici, les deux intervalles ayant la même durée (1 h), comparer les vitesses moyennes revient à comparer directement les distances parcourues sur ces intervalles, sans avoir besoin de les convertir en m/s.

2.g

Quelle est la vitesse moyenne de Quentin lors de cette sortie, en kilomètre par heure, avec un arrondi au centième ?

Corrigé

La distance totale parcourue est **95** km. La durée totale de la sortie est **4,5** h.

La vitesse moyenne v est donnée par :

$$v = \frac{95}{4,5} = \frac{950}{45} = \frac{190}{9} \approx 21,11 \text{ km/h (arrondi au centième).}$$

La vitesse moyenne de Quentin lors de cette sortie est donc d'environ **21,11** km/h.

Pour comprendre en détail

À retenir : La vitesse moyenne sur un trajet est le quotient de la distance totale parcourue par la durée totale du parcours, et non la moyenne des vitesses sur chaque portion.

Attention : Le corrigé officiel indique par erreur **2,11** km/h ; la valeur exacte arrondie au centième est bien **21,11** km/h.

On peut aussi remarquer que **95** km en **4,5** h revient à **190** km en **9** h, soit $\frac{190}{9} \approx 21,11$ km/h.

Exercice 3

Partie 1 – La guirlande

- 1 En utilisant le script et les propriétés des quadrilatères, dire si chaque affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

Corrigé

Le script trace une figure fermée de 4 côtés, donc c'est un quadrilatère : **Karim a raison.**

Les 4 côtés mesurent 100 pas car on répète 4 fois « avancer de 100 pas » : la figure a 4 côtés de même longueur, c'est un losange. **Pierre a raison.**

À chaque sommet, le lutin tourne de 90° , donc l'angle intérieur du quadrilatère est $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. La figure a 4 angles droits, et avec 4 côtés égaux, c'est un carré. **Lucie a raison.**

Or un carré est aussi un rectangle car il possède 4 angles droits. L'affirmation d'Ana « ce n'est pas un rectangle » est donc **fausse**.

Conclusion : seule l'affirmation d'Ana est fausse.

Pour comprendre en détail

À retenir :

- Un quadrilatère a 4 côtés.
- Un losange a 4 côtés de même longueur.
- Un rectangle a 4 angles droits.
- Un carré a 4 côtés de même longueur et 4 angles droits ; c'est donc à la fois un losange et un rectangle.

Attention : Beaucoup d'élèves pensent qu'un carré n'est pas un rectangle ou qu'un losange ne peut pas être un carré. Or « carré » est un cas particulier de rectangle et de losange.

La position de départ inclinée à 45° donne une figure « sur la pointe », mais cela ne change pas sa nature : un carré incliné reste un carré.

Partie 2 – Les étoiles

- 2.a** Montrer que pour obtenir un pentagone dont les côtés mesurent 7 cm, il faut commencer par construire un segment [RS] mesurant environ 11,9 cm.

Corrigé

La longueur des côtés du pentagone est proportionnelle à la longueur du segment [RS].

Pour $RS = 4$ cm, le côté mesure $\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ cm.

Pour $RS = x$ cm, le côté mesure 7 cm.

Par proportionnalité : $\frac{x}{4} = \frac{7}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$.

Donc $x = \frac{4 \times 7}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} = \frac{28}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$.

Or $\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \approx 2,351$, donc $x \approx \frac{28}{2,351} \approx 11,9$.

Il faut donc commencer par construire un segment [RS] mesurant environ 11,9 cm.

Pour comprendre en détail

À retenir : Deux grandeurs sont proportionnelles lorsqu'on passe de l'une à l'autre en multipliant toujours par le même coefficient. Ici, le coefficient de proportionnalité côté/RS est $\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$; pour passer du côté à RS, on utilise son inverse $\frac{4}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$.

Attention : Une erreur courante est d'inverser le rapport. On peut vérifier le résultat en retrouvant le facteur d'agrandissement du segment [RS] : $\frac{11,9}{4} \approx 2,98$ et $2,98 \times 2,351 \approx 7$.

- 2.b** En utilisant le programme de construction précédent, construire un pentagone régulier LMNPQ dont les côtés mesurent 7 cm. (Décrire les étapes de la construction ; on prendra $RS = 12$ cm.)

Corrigé

1. Tracer un segment [RS] de 12 cm puis placer son milieu O : $RO = OS = 6$ cm.
2. Tracer le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [RS].
3. Placer un point L sur $\mathcal{C}$ tel que $(OL) \perp (RS)$; alors $OL = 6$ cm.
4. Placer I milieu de [OS] ; donc $OI = 3$ cm.
5. Dans le triangle OIL rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore :
 $IL^2 = OI^2 + OL^2 = 3^2 + 6^2 = 45$, donc $IL = \sqrt{45} \approx 6,7$ cm.
6. Tracer le cercle de centre I et de rayon IL ; il coupe le segment [RO] en D.
7. On obtient $OD \approx 3,7$ cm. La longueur LD est la longueur d'un côté du pentagone ; par proportionnalité avec le cas $RS = 4$ cm, $LD = 3\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \approx 7,05$ cm, soit environ 7 cm.
8. Reporter la longueur LD au compas sur le cercle $\mathcal{C}$ à partir de L : placer successivement les points M, N, P, Q.

9. Tracer les côtés $[LM]$, $[MN]$, $[NP]$, $[PQ]$ et $[QL]$.

Le pentagone $LMNPQ$ ainsi construit a des côtés d'environ 7 cm.

Pour comprendre en détail

À retenir : Un polygone régulier inscrit dans un cercle a tous ses sommets sur ce cercle et des côtés de même longueur. Reporter une même corde au compas cinq fois de suite permet de construire le pentagone régulier.

Le choix $RS = 12$ cm ne donne pas exactement des côtés de 7 cm, mais 7,05 cm environ, ce qui est compatible avec la consigne « environ 7 cm » et avec la prise $RS = 12$ cm imposée.

Attention : Ne pas placer D directement à 3,7 cm de O : c'est le cercle de centre I et de rayon IL qui détermine D . Une fois D obtenu, les cinq sommets se reportent sur le cercle de diamètre $[RS]$, pas sur le petit cercle de centre I .

2.c

Puis il leur montre l'étoile à cinq branches obtenue en utilisant le logiciel Scratch (le point de départ de la construction est un point rentrant de l'étoile ; chaque segment mesure 80 pas). Recopier et compléter les lignes 7 et 9 du script utilisé pour construire l'étoile. On rappelle que lorsque le lutin est orienté à 90° cela signifie qu'il va se déplacer vers la droite.

```
1 quand  est cliqué
2 cacher
3 aller à x : 0 y : 0
4 s'orienter à 90
5 effacer tout
6 stylo en position d'écriture
7 répéter ... fois
8   avancer de 80 pas
9   tourner ⤵ de ... degrés
10  avancer de 80 pas
11  tourner ⤴ de 72 degrés
12 relever le stylo
```

Corrigé

Ligne 7 : **répéter 5 fois** (l'étoile possède 5 branches).

Ligne 9 : **tourner ⤵ de 144 degrés.**

Justification : à chaque motif, le lutin avance, tourne à gauche d'un angle a , avance, puis tourne à droite de 72° . La rotation nette par motif est donc $a - 72^\circ$ vers la gauche. Pour que la figure se referme après 5 motifs, on doit avoir $5 \times (a - 72^\circ) = 360^\circ$, d'où $a - 72^\circ = 72^\circ$, soit $a = 144^\circ$.

Pour comprendre en détail

À retenir : Dans Scratch, les blocs « tourner ⤵ » et « tourner ⤴ » modifient l'orientation du lutin par rapport à sa direction actuelle. Pour fermer une figure, la somme des rotations nettes doit être un multiple de 360° .

Attention : On confond souvent l'angle aigu de l'étoile (36°) avec l'angle de rotation du lutin (144°). Le lutin ne dessine pas l'angle intérieur : il tourne d'un angle supplémentaire pour changer de direction.

La ligne 11 contient déjà une rotation vers la droite de 72° . La ligne 9 doit donc être plus grande pour que la rotation nette par branche soit de 72° vers la gauche, ce qui correspond à $360^\circ \div 5$.

Une erreur fréquente serait d'écrire 72° ligne 9 : le lutin irait alors tout droit après les deux rotations et ne dessinerait pas de branche. Écrire 144° vers la droite inverserait le sens de construction.

2.d *Quel est le périmètre, en pas, de cette étoile ?*

Corrigé

Dans le script, chaque répétition trace deux segments de 80 pas : un premier « avancer de 80 pas » puis un second « avancer de 80 pas ». Pour une étoile à cinq branches, la boucle est répétée 5 fois.

L'étoile est donc formée de $5 \times 2 = 10$ segments de 80 pas.

Son périmètre est :

$$10 \times 80 = 800 \text{ pas.}$$

Conclusion : le périmètre de cette étoile est 800 pas.

Pour comprendre en détail

Attention : Il ne faut pas compter seulement 5 segments (un par branche). Chaque branche de l'étoile est constituée de deux segments qui se rejoignent à la pointe, d'où un total de 10 segments.

Le périmètre d'une figure est la longueur totale de son contour ; ici, chaque segment tracé par le lutin correspond à un côté de l'étoile. Le script contient deux instructions « avancer » dans la boucle, donc le nombre de segments est le double du nombre de répétitions. Pour une étoile à cinq branches, ce nombre de répétitions est 5, ce qui donne bien 10 segments.

2.e *L'enseignant souhaite doubler le périmètre de son étoile. Recopier les quatre lignes à l'intérieur du bloc « répéter », lignes 8 à 11, en apportant les modifications nécessaires pour obtenir cette nouvelle étoile.*

Corrigé

Le périmètre de l'étoile est la somme des longueurs de ses 10 segments (2 par branche $\times$ 5 branches). Pour doubler ce périmètre sans changer la forme, on double la longueur de chaque segment : $80 \times 2 = 160$ pas. Les angles restent inchangés, car ils déterminent la forme de l'étoile et non son périmètre.

On obtient donc :

- ligne 8 : avancer de 160 pas ;
- ligne 9 : tourner $\curvearrowright$ de 144 degrés ;
- ligne 10 : avancer de 160 pas ;
- ligne 11 : tourner $\curvearrowleft$ de 72 degrés.

Ainsi, le nouveau périmètre est $10 \times 160 = 1\,600$ pas, soit le double de $10 \times 80 = 800$ pas.

Pour comprendre en détail

À retenir : Dans un agrandissement de rapport k , toutes les longueurs sont multipliées par k , donc le périmètre est multiplié par k . Les angles, eux, ne changent pas.

Ici, doubler toutes les longueurs revient à faire un agrandissement de rapport 2. Chaque répétition du script trace deux segments de 80 pas, soit 10 segments au total pour les 5 branches. Il suffit donc de remplacer chaque « avancer de 80 pas » par « avancer de 160 pas ».

Attention : Modifier un seul des deux « avancer » ou changer les angles créerait une étoile déformée et ne doublerait pas correctement le périmètre. De plus, doubler les longueurs ne double pas l'aire (elle serait multipliée par 4), mais ce n'est pas demandé ici.

Exercice 4

- 1 Un élève lance les deux dés ; il obtient un 3 et un 2. Combien de jetons peut-il prendre ? Donner tous les cas possibles.

Corrigé

Les deux nombres sont distincts (3 et 2).

Dans ce cas, l'élève peut :

- prendre autant de jetons que le plus grand des deux nombres : 3 ;
- ou prendre le double de jetons du plus petit : $2 \times 2 = 4$.

Il peut aussi passer son tour et ne prendre aucun jeton : 0.

Les cas possibles sont donc : 0, 3 ou 4 jetons.

Pour comprendre en détail

Attention : On peut être tenté de proposer 5 (somme), 6 (produit) ou 2 (plus petit nombre), mais aucune de ces options n'est prévue par la règle. La possibilité de passer son tour (0 jeton) est aussi souvent oubliée.

Pour deux dés différents, les seules options de gain sont le plus grand nombre ou le double du plus petit ; inutile d'envisager une addition ou une multiplication des deux dés.

- 2 Dresser la liste des tirages permettant d'obtenir 3 jetons.

Corrigé

On distingue les deux dés et on note les tirages sous forme de couples (dé 1 ; dé 2).

Pour obtenir 3 jetons :

- si les deux dés sont identiques, il faut deux 3 : (3 ; 3) ;
- si les deux dés sont différents, le double du plus petit est un nombre pair, donc ne peut pas être 3 ; il reste la possibilité de prendre le plus grand, qui doit donc être 3. L'autre dé est alors 1 ou 2, ce qui donne les couples (1 ; 3), (2 ; 3), (3 ; 1), (3 ; 2).

Les tirages permettant d'obtenir 3 jetons sont donc : (1 ; 3), (2 ; 3), (3 ; 3), (3 ; 1), (3 ; 2). Il y a 5 tirages.

Pour comprendre en détail

Ce dénombrement distingue les deux dés car chaque dé est une issue équiprobable : (1 ; 3) et (3 ; 1) correspondent à deux lancers différents.

Attention : ne pas oublier le double $(3; 3)$, ni les couples symétriques comme $(3; 1)$ et $(3; 2)$.

L'option « double du plus petit » donne toujours un nombre pair, donc elle ne peut pas produire 3 jetons ; c'est pourquoi on l'écarte ici.

3.a Un élève lance les deux dés. Montrer que la probabilité de l'événement « les nombres obtenus sont un 3 et un 2 » est $\frac{1}{18}$.

Corrigé

Les deux dés sont équilibrés, donc les issues sont équiprobables.

En distinguant les deux dés, l'univers est l'ensemble des couples $(a; b)$ où a est le résultat du premier dé et b celui du second : il y a $6 \times 6 = 36$ issues possibles.

L'événement « les nombres obtenus sont un 3 et un 2 » est réalisé par les deux issues $(2; 3)$ et $(3; 2)$. Il y a donc 2 issues favorables.

D'après la formule $P(\text{événement}) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}}$, on obtient :

$$P = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

La probabilité cherchée est donc bien $\frac{1}{18}$.

Pour comprendre en détail

À retenir : Lorsque les issues sont équiprobables, la probabilité d'un événement est $\frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}}$.

Le choix de distinguer les deux dés (par exemple « premier dé » et « second dé ») est essentiel pour disposer d'un univers de 36 couples équiprobables, même si physiquement les dés sont identiques.

Attention : Si l'on oublie l'ordre, les issues non ordonnées ne sont pas équiprobables : obtenir deux nombres différents est plus fréquent qu'obtenir un double.

Autre méthode : additionner les probabilités des deux issues ordonnées : $P((2; 3)) + P((3; 2)) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$.

3.b Quelle est la probabilité de l'événement « au moins un des nombres obtenus est 3 » ?

Corrigé

Les 36 issues possibles sont les couples $(a; b)$ où a et b sont des entiers de 1 à 6. Les dés étant équilibrés, ces issues sont équiprobables.

Les issues favorables à l'événement « au moins un des nombres obtenus est 3 » sont :

$(3; 1), (3; 2), (3; 3), (3; 4), (3; 5), (3; 6),$
 $(1; 3), (2; 3), (4; 3), (5; 3), (6; 3).$

On compte donc 11 issues favorables sur 36 issues possibles.

$$P = \frac{11}{36}.$$

La probabilité d'obtenir au moins un 3 est $\frac{11}{36}$.

Pour comprendre en détail

À retenir : Pour dénombrer des lancers de deux dés, on distingue les deux dés : on liste les couples ordonnés $(d_1; d_2)$. Les 36 couples sont équiprobables lorsque les dés sont équilibrés.

Attention : Le tirage $(3; 3)$ ne doit être compté qu'une seule fois. Une erreur fréquente consiste à le compter deux fois, ce qui donnerait 12 issues favorables au lieu de 11.

Une autre méthode consiste à utiliser l'événement contraire « aucun des deux nombres n'est 3 » : chaque dé doit alors donner une face parmi cinq, d'où une probabilité de $\left(\frac{5}{6}\right)^2$. Cette méthode évite de lister toutes les issues et peut servir de vérification.

3.c Quelle est la probabilité de l'événement « les nombres obtenus permettent de prendre 4 jetons » ?

Corrigé

Il y a $6 \times 6 = 36$ lancers possibles, tous équiprobables.

- Dés distincts et plus grand nombre égal à 4 : $(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)$ soit 6 tirages.
- Dés égaux à 4 : $(4, 4)$ soit 1 tirage.
- Dés distincts et double du plus petit égal à 4 : le plus petit nombre est donc 2. Tirages possibles : $(2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2)$, soit 8 tirages. Parmi eux, $(2, 4)$ et $(4, 2)$ ont déjà été comptés dans le premier cas.

Nombre d'issues favorables : $6 + 1 + 8 - 2 = 13$.

La probabilité cherchée est donc $\frac{13}{36}$.

Pour comprendre en détail

L'événement « permettre de prendre 4 jetons » réunit trois situations : le plus grand nombre est 4, les dés sont égaux à 4, ou le double du plus petit nombre est 4 (ce qui impose un plus petit nombre égal à 2 et des dés distincts).

Attention : les tirages $(2, 4)$ et $(4, 2)$ vérifient à la fois « plus grand nombre = 4 » et « double du plus petit = 4 » ; il ne faut pas les compter deux fois.

À retenir : lorsque les issues sont équiprobables, $P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre total d'issues}}$.

On peut aussi vérifier ce résultat en dressant la liste complète des 13 tirages favorables et en constatant qu'ils sont bien au nombre de 13.

- 4 Après un nouveau lancer des deux dés, un élève a pris 3 jetons. Au lancer suivant, la probabilité qu'il prenne de nouveau 3 jetons augmente-t-elle, reste-t-elle identique ou diminue-t-elle par rapport à la probabilité d'avoir pris 3 jetons au tirage précédent ? Justifier.

Corrigé

La probabilité reste identique. En effet, les lancers des deux dés sont indépendants : le résultat d'un lancer n'influence pas le résultat du lancer suivant. La probabilité d'obtenir un tirage permettant de prendre 3 jetons est la même à chaque lancer (question 2). Ainsi, avoir pris 3 jetons au lancer précédent ne change pas la probabilité d'en prendre de nouveau 3 au lancer suivant. Elle est donc encore de $\frac{5}{36}$.

Pour comprendre en détail

La justification repose sur l'indépendance des lancers successifs.

À retenir : Deux événements A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Si $P(B) \neq 0$, cela équivaut à $P(A|B) = P(A)$.

Ici, A = « prendre 3 jetons au lancer suivant » et B = « avoir pris 3 jetons au lancer précédent ». Comme les dés sont relancés à l'identique, A et B sont indépendants, donc $P(A|B) = P(A)$.

Attention : Ce n'est pas parce que l'événement s'est produit une fois qu'il a moins de chances de se reproduire (sophisme du joueur). Chaque lancer repart de zéro.

Une vérification possible consiste à expliciter le calcul conditionnel : $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
 $= \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} = P(A)$, en utilisant l'indépendance.

- 5 En fin de partie, un élève possède 12 jetons. Lors de son lancer de dés, il obtient un 1 et un 4. Pourquoi est-il préférable pour lui de passer son tour ?

Corrigé

Avec les dés 1 et 4, l'élève n'a pas un double. Il peut donc prendre le plus grand nombre, soit 4, ou le double du plus petit, soit $2 \times 1 = 2$.

S'il prend 4 jetons, il en aurait $12 + 4 = 16$, ce qui dépasse 15 ; or pour gagner, il doit avoir exactement 15 jetons. Il ne peut donc pas choisir cette option.

S'il prend 2 jetons, il arrive à 14 jetons ; il lui faudrait ensuite exactement 1 jeton. Le seul tirage donnant 1 jeton est (1; 1), soit une probabilité de $\frac{1}{36}$.

S'il passe son tour, il reste à 12 jetons ; il lui faudra exactement 3 jetons. Les tirages donnant 3 jetons sont (1; 3), (2; 3), (3; 1), (3; 2) et (3; 3), soit 5 tirages sur 36, donc une probabilité de $\frac{5}{36}$.

Comme $\frac{5}{36} > \frac{1}{36}$, il est préférable de passer son tour.

Pour comprendre en détail

À retenir : Avec deux dés à 6 faces, on dénombre les issues comme des couples ordonnés ; il y a $6 \times 6 = 36$ issues équiprobables.

Attention : Le but est d'obtenir exactement 15 jetons ; dépasser ce total ne permet pas de gagner.

On peut se tromper en oubliant qu'avec **1** et **4**, l'élève a deux choix : prendre **4** ou prendre le double du plus petit, c'est-à-dire **2**. Le seul tirage qui donne **1** jeton est bien **(1; 1)**, car si les dés diffèrent, la plus petite valeur est au moins **1**, donc son double vaut au moins **2** et ne peut pas donner **1**.

Exercice 5

1 Affirmation 1 : « 257 est un nombre décimal. »

Corrigé

L'affirmation est vraie. En effet, $257 = 257,0 = \frac{25\,700}{100}$. Or $\frac{25\,700}{100}$ est une fraction décimale car son dénominateur 100 est une puissance de 10 ($100 = 10^2$). Donc 257 est un nombre décimal.

Pour comprendre en détail

À retenir : Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire sous forme de fraction décimale (dénominateur puissance de 10). Tout entier est donc décimal.

Attention : L'absence de virgule ne signifie pas qu'un nombre n'est pas décimal ; et certains nombres à virgule (comme $\frac{1}{3}$) ne sont pas décimaux.

2 Affirmation 2 : « $\frac{7}{3} - 8$ est un nombre rationnel. »

Corrigé

$$\frac{7}{3} - 8 = \frac{7}{3} - \frac{24}{3} = -\frac{17}{3}.$$

$-\frac{17}{3}$ est le quotient de deux entiers (-17 et 3), donc c'est un nombre rationnel.

L'affirmation est vraie.

Pour comprendre en détail

À retenir : Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a un entier et b un entier non nul. Ici, $-\frac{17}{3}$ est bien de cette forme.

Attention : Ne pas confondre « nombre rationnel » et « nombre décimal ». Un nombre décimal est un cas particulier de nombre rationnel, mais un rationnel n'est pas toujours décimal : par exemple $-\frac{17}{3}$ n'est pas décimal alors qu'il est rationnel.

Autre méthode : 8 est un entier donc un rationnel, et $\frac{7}{3}$ est un rationnel ; or la différence de deux nombres rationnels est toujours un nombre rationnel.

3

Affirmation 3 : « la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3. »

Corrigé

Soit n un entier. Les trois entiers consécutifs sont n , $n + 1$ et $n + 2$. Leur somme vaut $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$. Comme $n + 1$ est un entier, $3(n + 1)$ est un multiple de 3. Donc l'affirmation est vraie.

Pour comprendre en détail

Une erreur fréquente est de vérifier sur quelques exemples puis de conclure : cela ne prouve pas que la propriété est vraie pour tous les entiers.

À retenir : Un multiple de 3 est un nombre de la forme $3k$, avec k entier.

Autre méthode : en notant m l'entier moyen, la somme s'écrit $(m - 1) + m + (m + 1) = 3m$.

4

Affirmation 4 : « l'équation $(x + 1)(x - 2) = (x - 3)(x + 4)$ admet un nombre entier comme solution. »

Corrigé

Développons chaque membre de l'équation.

$$(x + 1)(x - 2) = x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - x - 2.$$

$$(x - 3)(x + 4) = x^2 + 4x - 3x - 12 = x^2 + x - 12.$$

L'équation s'écrit donc $x^2 - x - 2 = x^2 + x - 12$.

En retranchant x^2 de chaque côté : $-x - 2 = x - 12$.

D'où $-x - x = -12 + 2$, soit $-2x = -10$, donc $x = \frac{-10}{-2} = 5$.

Le nombre 5 est un entier. L'affirmation est donc **vraie**.

Vérification : pour $x = 5$, $(5 + 1)(5 - 2) = 6 \times 3 = 18$ et $(5 - 3)(5 + 4) = 2 \times 9 = 18$.

Pour comprendre en détail

La méthode attendue est de développer chaque membre pour obtenir une équation du premier degré, car les termes en x^2 se simplifient.

À retenir : Pour développer un produit $(a + b)(c + d)$, on utilise la double distributivité : $ac + ad + bc + bd$. Ici, elle permet d'écrire les deux membres sous forme développée réduite.

Attention : Le corrigé officiel de cette annale contient une erreur de signe dans le développement du second membre et conclut à tort que l'équation n'a pas de solution entière (en trouvant $x = \frac{11}{2}$). Le développement correct montre que la solution est bien un entier.

5 Affirmation 5 : « augmenter une quantité de 15 % puis de 10 % revient à l'augmenter de son quart. »

Corrigé

Soit x la quantité de départ. Après une hausse de 15 %, elle devient $x \times 1,15$. Après une nouvelle hausse de 10 %, elle devient $x \times 1,15 \times 1,1 = x \times 1,265$.

Le coefficient multiplicateur global est donc 1,265, ce qui correspond à une augmentation de $(1,265 - 1) \times 100 = 26,5$ %.

Augmenter une quantité de son quart revient à multiplier par $1 + \frac{1}{4} = 1,25$, soit une augmentation de 25 %.

Or $1,265 \neq 1,25$, donc l'affirmation est **fausse**.

Pour comprendre en détail

Attention : pour des hausses successives, on n'additionne pas les pourcentages : 15 % + 10 % = 25 % serait un piège. La seconde hausse s'applique à une valeur déjà augmentée.

À retenir : à une hausse de t % correspond le coefficient multiplicateur $1 + \frac{t}{100}$. Pour des hausses successives, on multiplie les coefficients entre eux.

6 Affirmation 6 : « un quadrilatère ayant un angle droit est un rectangle. »

Corrigé

L'affirmation est **fausse**.

Un rectangle est un quadrilatère ayant **quatre angles droits**. Or, un quadrilatère peut avoir un angle droit sans que ses trois autres angles le soient.

Contre-exemple : un trapèze rectangle possède un angle droit (en réalité deux), mais ce n'est pas un rectangle car il n'a pas quatre angles droits.

Donc avoir un angle droit ne suffit pas pour être un rectangle.

Pour comprendre en détail

À retenir : Un rectangle est un quadrilatère dont les quatre angles sont droits. Si un quadrilatère a trois angles droits, le quatrième l'est aussi car la somme des angles d'un quadrilatère vaut 360°.

Ici, un seul angle droit ne contraint pas les trois autres. On peut par exemple imaginer un quadrilatère avec des angles de 90°, 60°, 100° et 110° : il possède un seul angle droit et n'est pas un rectangle.

Attention : Ne confonds pas condition nécessaire et suffisante : « être un rectangle » implique « avoir un angle droit », mais la réciproque est fausse.

7 Affirmation 7 : « un triangle rectangle peut être équilatéral. »

Corrigé

Faux. Un triangle rectangle possède un angle droit, donc un angle de 90° . Un triangle équilatéral possède trois angles de même mesure. Comme la somme des mesures des angles d'un triangle vaut 180° , chaque angle d'un triangle équilatéral mesure $\frac{180}{3} = 60^\circ$. Un triangle ne peut donc pas avoir à la fois un angle de 90° et tous ses angles de 60° . L'affirmation est fausse.

Pour comprendre en détail

On utilise ici la somme des angles car elle permet de relier les deux propriétés.

À retenir : la somme des angles d'un triangle est 180° .

Attention : ne pas confondre avec un triangle rectangle isocèle, qui est possible et a pour angles $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$.

Autre vérification possible : dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le côté le plus long, donc les trois côtés ne peuvent pas être égaux comme dans un triangle équilatéral.

8 Affirmation 8 : « par la fonction f définie par $f(x) = -3x + 1$, l'antécédent de 4 est -11 . »

Corrigé

L'affirmation est fausse.

On calcule $f(-11) = -3 \times (-11) + 1 = 33 + 1 = 34$.

Comme $34 \neq 4$, -11 n'est pas un antécédent de 4.

Pour trouver l'antécédent de 4, on résout $f(x) = 4$, soit $-3x + 1 = 4$, donc $-3x = 3$, d'où $x = -1$.

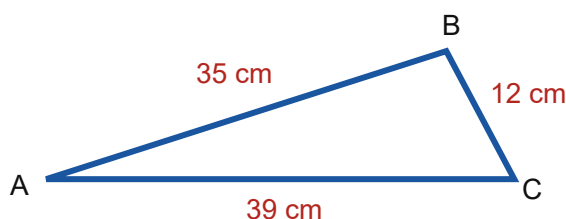
L'antécédent de 4 par f est -1 , et non -11 .

Pour comprendre en détail

Attention : -11 est en réalité l'image de 4 par f (car $f(4) = -11$), pas son antécédent. Il ne faut pas confondre « calculer $f(4)$ » et « résoudre $f(x) = 4$ ».

À retenir : Dire que a est un antécédent de b par f signifie que $f(a) = b$. Pour trouver un antécédent, on résout l'équation $f(x) = b$.

9 Affirmation 9 : « le triangle ABC, schématisé ci-dessous, est rectangle. »



Corrigé

Le plus grand côté est $[AC]$ avec $AC = 39$ cm.

On calcule $AB^2 + BC^2 = 35^2 + 12^2 = 1\,225 + 144 = 1\,369$.

On calcule $AC^2 = 39^2 = 1\,521$.

Puisque $AC^2 \neq AB^2 + BC^2$, d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle ABC n'est pas rectangle.

L'affirmation 9 est fausse.

Pour comprendre en détail

À retenir : Pour prouver qu'un triangle n'est pas rectangle, on utilise la contraposée du théorème de Pythagore : si le carré du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres, alors le triangle n'est pas rectangle.

Attention : Ici le plus grand côté est AC , donc s'il était rectangle, l'angle droit serait en B . Inutile de tester une autre somme comme $AB^2 + AC^2$ ou $BC^2 + AC^2$.

Le corrigé officiel comporte une coquille : il écrit « 1329 » au lieu de « 1369 » pour $35^2 + 12^2$, mais la conclusion reste inchangée.

- 10** Affirmation 10 : « si on multiplie par 3 les longueurs des côtés d'un rectangle, alors son aire est également multipliée par 3. »

Corrigé

Un rectangle de longueur L et de largeur ℓ a pour aire $A = L \times \ell$.

Si l'on multiplie chaque côté par 3, la longueur devient $3L$ et la largeur devient 3ℓ . La nouvelle aire est alors $A' = 3L \times 3\ell = 9 \times L \times \ell = 9A$.

L'aire est donc multipliée par 9, et non par 3. Par exemple, un rectangle de dimensions 2 cm et 3 cm a une aire de 6 cm^2 ; après multiplication par 3, ses dimensions sont 6 cm et 9 cm et son aire vaut 54 cm^2 , soit $9 \times 6 \text{ cm}^2$.

Conclusion : l'affirmation 10 est fausse.

Pour comprendre en détail

L'aire d'une figure dépend du produit de deux longueurs. Lors d'un agrandissement de rapport k , les longueurs sont multipliées par k et les aires par k^2 .

Attention : ne pas confondre le coefficient appliqué aux longueurs et celui appliqué à l'aire. Comme les deux dimensions du rectangle sont multipliées par **3**, le facteur multiplicatif de l'aire est **3×3** , c'est-à-dire le carré du rapport de multiplication.