

ANNALES CRPE · MATHÉMATIQUES · 2024

Corrigé détaillé

CRPE 2024 – Mathématiques – Groupement 1

Épreuve écrite disciplinaire de mathématiques (2e épreuve d'admissibilité)

Durée : 3 heures

20 points

Exercice 1

Exercice 2

Exercice 3

Exercice 4

Exercice 5

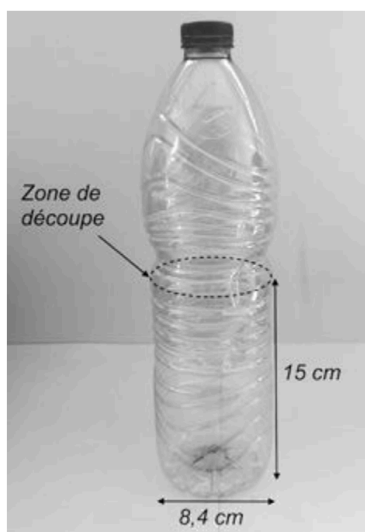
Pour chaque question : **rappel de l'énoncé**, **corrigé** rédigé, puis « **Pour comprendre en détail** » (méthode, rappels de cours, erreurs fréquentes). À utiliser avec le sujet officiel (documents, tableaux et figures).

Sujet : Ministère de l'Éducation nationale – session 2024 (EST MAT 1). Corrigé rédigé par Campus XYZ – campusxyz.fr. Tous droits réservés.

Exercice 1

Partie A

- A.1** Jules souhaite découper une étiquette rectangulaire de largeur **2 cm** qui fasse le tour du pluviomètre pour écrire son prénom. Déterminer une valeur approchée par excès au millimètre près de la longueur minimale de cette étiquette.



Corrigé

Le tour du pluviomètre est le périmètre du cercle de diamètre **8,4 cm** :

$$P = \pi \times 8,4 \approx 26,389 \text{ cm.}$$

Valeur approchée par excès au millimètre : **26,4 cm**.

Pour comprendre en détail

Par excès : on arrondit vers le haut (**26,389** → **26,4**). Ici l'arrondi habituel donne le même résultat, mais pour **26,31** l'excès donnerait **26,4** et l'arrondi usuel **26,3**. Une étiquette trop courte ne ferait pas le tour du pluviomètre.

- A.2** Déterminer la valeur exacte, puis une valeur arrondie au centilitre du volume en litres du pluviomètre.

Corrigé

$$V = \pi \times 4,2^2 \times 15 = 264,6\pi \text{ cm}^3 \text{ (valeur exacte).}$$

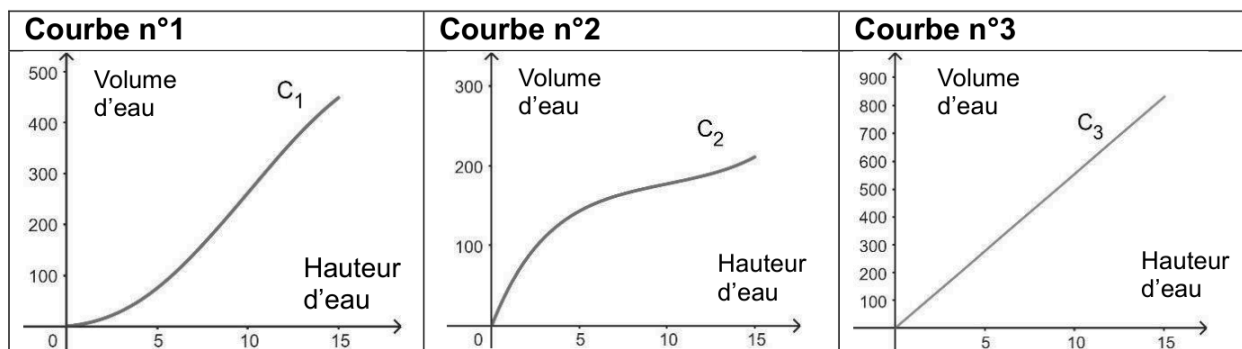
$$1 \text{ L} = 1\,000 \text{ cm}^3 \text{ donc } V = 0,2646\pi \text{ L} \approx 0,831 \text{ L, soit environ } 0,83 \text{ L au centilitre.}$$

Pour comprendre en détail

Un centilitre est **0,01 L** : on garde deux décimales en litres. Contrôle d'ordre de grandeur : 55 cm^2 de base $\times 15 \text{ cm} \approx 830 \text{ cm}^3$.

A.3 Inès a oublié sa bouteille. Jules lui propose de lui donner la partie haute de sa bouteille, en plaçant le bouchon en bas pour former son pluviomètre.

Les trois courbes ci-dessous représentent le volume d'eau recueilli en cm^3 en fonction de la hauteur d'eau mesurée en cm. Identifier la courbe qui correspond au pluviomètre de Jules et celle qui correspond au pluviomètre d'Inès. Aucune justification n'est attendue.



Corrigé

Jules : courbe n°3 (cylindre : volume proportionnel à la hauteur, courbe droite passant par l'origine).

Inès : courbe n°1 (la section est étroite au bouchon puis s'élargit : le volume croît d'abord lentement puis de plus en plus vite).

Pour comprendre en détail

Pour Jules, $V = B \times h$ avec $B \approx 55,4 \text{ cm}^2$ constant : droite de pente **55,4**, qui atteint environ **830 cm^3** à **15 cm** (cohérent avec la courbe 3 et avec la question A.2).

La pente de la courbe représente l'aire de la section à la hauteur considérée : une section qui grandit donne une courbe de plus en plus pentue.

Partie B

B.1 Parmi ces deux villes, déterminer celle qui a connu les plus fortes précipitations mensuelles en moyenne durant les dix mois de l'année scolaire 2022-2023.

Corrigé

$$\text{Rennes : } \frac{65 + 103 + 24 + 122 + 53 + 44 + 19 + 27 + 57 + 134}{10} = \frac{648}{10} = 64,8 \text{ mm.}$$

Lyon : **70,6 mm** (donnée du document 2).

70,6 > 64,8 : c'est à **Lyon** que les précipitations mensuelles moyennes ont été les plus fortes.

B.2 Calculer et comparer les étendues des précipitations mensuelles à Rennes et à Lyon durant cette période.

Corrigé

Rennes : $134 - 19 = 115$ mm. Lyon : $179 - 18 = 161$ mm.

L'étendue est plus grande à Lyon ($161 > 115$) : les précipitations y varient davantage d'un mois à l'autre.

Pour comprendre en détail

L'étendue ne dépend que des deux valeurs extrêmes : elle mesure la dispersion, pas le niveau moyen.

B.3 L'affirmation suivante est-elle exacte ? Justifier. « Dans la commune de Lyon, il y a 5 mois de l'année scolaire 2022-2023 pendant lesquels les précipitations mensuelles ont été supérieures ou égales à 70,6 mm. »

Corrigé

La médiane de Lyon est 58 mm : au moins la moitié des mois, c'est-à-dire 5 mois, ont eu des précipitations supérieures ou égales à 58 mm.

Cela ne dit rien pour la valeur 70,6 mm (la moyenne), qui est supérieure à la médiane : certains de ces 5 mois peuvent être entre 58 et 70,6 mm. L'affirmation n'est donc pas justifiée : elle est **fausse** en général.

Pour comprendre en détail

Une série compatible avec le document 2 qui contredit l'affirmation

18 ; 20 ; 30 ; 40 ; 55 ; 61 ; 100 ; 101 ; 102 ; 179 : les 10 valeurs sont différentes, le minimum est 18, le maximum 179, la médiane $\frac{55 + 61}{2} = 58$, la moyenne $\frac{706}{10} = 70,6$. Pourtant seuls 4 mois dépassent 70,6 mm.

À retenir : la médiane partage la série en deux moitiés ; la moyenne, influencée par les valeurs extrêmes, ne se compare pas à la médiane pour compter des effectifs.

Exercice 2

1 *Affirmation 1 : le nombre 0,28 est un nombre rationnel.*

Corrigé

$$0,28 = \frac{28}{100} = \frac{7}{25} : \text{quotient de deux entiers, donc rationnel.}$$

L'affirmation est **vraie**.

Pour comprendre en détail

Tout nombre décimal est rationnel : c'est une fraction de dénominateur 10, 100, 1 000...

2 *On considère deux nombres réels strictement positifs a et b . Affirmation 2 : le quotient de a par b est strictement inférieur au nombre a .*

Corrigé

$$\text{Contre-exemple : } a = 1 \text{ et } b = 0,5. \frac{a}{b} = \frac{1}{0,5} = 2 > 1 = a.$$

L'affirmation est **fausse**.

Pour comprendre en détail

$\frac{a}{b} < a$ (pour $a > 0$). L'affirmation n'est vraie que si $b > 1$.

3 *Affirmation 3 : le produit de deux entiers naturels impairs est un entier naturel impair.*

Corrigé

Soient $a = 2k + 1$ et $b = 2k' + 1$ deux entiers impairs (k, k' entiers naturels).

$$ab = (2k + 1)(2k' + 1) = 4kk' + 2k + 2k' + 1 = 2(2kk' + k + k') + 1.$$

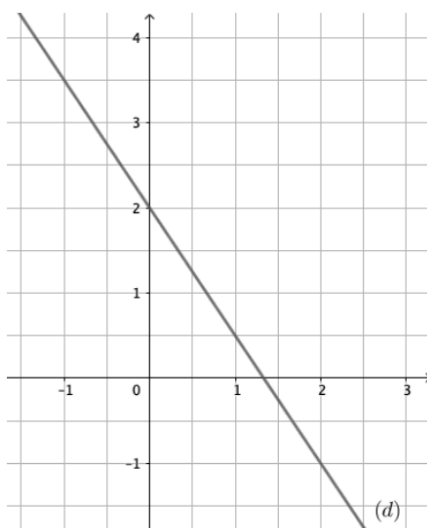
$2kk' + k + k'$ est un entier : ab est de la forme $2K + 1$, donc impair. L'affirmation est **vraie**.

Pour comprendre en détail

Tester quelques exemples ($3 \times 5 = 15$, $7 \times 9 = 63$) ne prouve rien ; la lettre k permet de traiter tous les entiers impairs d'un coup.

4

Dans le repère ci-contre, la droite (d) est la représentation graphique d'une fonction affine f . La droite (d) passe par les points de coordonnées $(1; 0,5)$ et $(0; 2)$.



Affirmation 4 : pour tout nombre réel x , $f(x) = 2x - 1,5$.

Corrigé

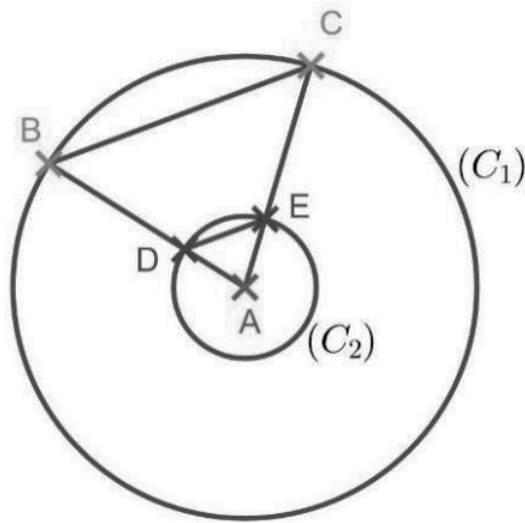
f est affine : $f(x) = ax + b$. La droite passe par $(0; 2)$, donc $f(0) = b = 2$.

Avec $2x - 1,5$, on aurait $f(0) = -1,5 \neq 2$: l'affirmation est **fausse**.

Pour comprendre en détail

Autres raisons : la droite est décroissante, son coefficient directeur est négatif alors que celui de $2x - 1,5$ est $+2$. Le vrai coefficient est $a = \frac{0,5 - 2}{1 - 0} = -1,5$, d'où $f(x) = -1,5x + 2$.

- 5 La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur. On a tracé deux cercles de centre A : le cercle (C_1) de rayon 7,8 cm et le cercle (C_2) de rayon 2,4 cm. Le segment $[DE]$ mesure 2,9 cm. A, D et B sont alignés. A, E et C sont alignés.



Affirmation 5 : la longueur BC arrondie au millimètre est égale à 9,4 cm.

Corrigé

$AB = AC = 7,8$ cm (rayon de (C_1)) et $AD = AE = 2,4$ cm (rayon de (C_2)).

D est sur $[AB]$ et E sur $[AC]$, avec $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{2,4}{7,8}$: d'après la réciproque du théorème de Thalès, $(DE) \parallel (BC)$, et le triangle ABC est un agrandissement de ADE de coefficient $k = \frac{7,8}{2,4} = 3,25$.

$BC = k \times DE = 3,25 \times 2,9 = 9,425$, soit 9,4 cm au millimètre. L'affirmation est **vraie**.

Pour comprendre en détail

Le coefficient $\frac{13}{4} = 3,25$ est le rapport des rayons : les deux triangles sont isocèles de même angle au sommet A, donc semblables.

Attention : 9,425 s'arrondit au millimètre (1 décimale en cm) à 9,4, le chiffre des centièmes (2) étant inférieur à 5.

Exercice 3

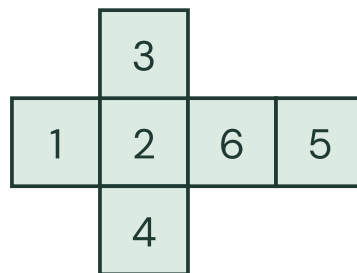
Partie A

- A** Construire un agrandissement de coefficient **2** d'un patron d'un tel dé en attribuant un numéro à chacune des faces.

Corrigé

Le côté du dé est **19** mm : dans l'agrandissement de coefficient **2**, chaque face est un carré de côté $2 \times 19 = 38$ mm.

On dessine un patron de cube (six carrés de **38** mm, par exemple en croix) et on numérote les faces de façon que les faces opposées totalisent **7** : **1** et **6**, **2** et **5**, **3** et **4**.



Patron du dé (carrés de **38** mm de côté)

Pour comprendre en détail

Dans une bande de quatre carrés, deux carrés séparés par un seul carré sont opposés : ici **1** et **6**, **2** et **5**. Les carrés au-dessus et au-dessous de la bande sont opposés entre eux : **3** et **4**. D'autres patrons et d'autres numérotations sont possibles tant que les paires $\{1, 6\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$ sont opposées.

Partie B

- B.1** Donner tous les résultats possibles de cette expérience aléatoire.

Corrigé

Les résultats possibles sont les entiers de **2** ($1 + 1$) à **12** ($6 + 6$) :
2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12.

Pour comprendre en détail

Tableau à double entrée (sommes)

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Les **36** cases sont équiprobables ; le tableau sert aux questions suivantes.

B.2 Déterminer la probabilité de l'événement : « La somme obtenue est égale à 4 ».

Corrigé

La somme 4 s'obtient avec (1 ; 3), (2 ; 2), (3 ; 1) : **3** issues sur **36**.

$$P = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Pour comprendre en détail

Erreur fréquente : compter **11** issues (les sommes de **2** à **12**) : elles ne sont pas équiprobables. Les **36** couples le sont.

B.3.a Quelle somme a la plus grande probabilité d'apparaître ?

Corrigé

La somme **7** apparaît **6** fois (la plus longue diagonale), plus que toute autre : c'est la somme la plus probable.

B.3.b Quelle est cette probabilité ?

Corrigé

$$P(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Pour comprendre en détail

Ses « voisines » **6** et **8** apparaissent **5** fois chacune : les probabilités décroissent de part et d'autre de **7**.

Partie C

- C** Dans le contexte de cette variante du jeu, proposer un exemple d'événement dont la probabilité est égale à $\frac{1}{6}$.

Corrigé

Événement : « l'écart est égal à 0 », c'est-à-dire « les deux dés donnent le même nombre ». Il y a 6 issues favorables (1; 1), ..., (6; 6) sur 36 : $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Autre exemple : « l'écart est égal à 3 » : (1; 4), (4; 1), (2; 5), (5; 2), (3; 6), (6; 3) : 6 issues sur 36, $P = \frac{1}{6}$.

Pour comprendre en détail

Répartition de tous les écarts

Écart	0	1	2	3	4	5
Issues sur 36	6	10	8	6	4	2

Total $6 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2 = 36$ ✓. Seuls les écarts 0 et 3 ont la probabilité $\frac{1}{6}$.

Exercice 4

Partie A

A.1.a Justifier que Lola a bien parcouru la distance affichée dans le tableau.



Corrigé

Huit plots équidistants sur une piste de 200 m : $\frac{200}{8} = 25$ m entre deux plots consécutifs.

Lola a fait 4 tours complets et franchi 1 plot : $4 \times 200 + 1 \times 25 = 825$ m.

A.1.b Déterminer sa vitesse moyenne en m/min.

Corrigé

$$v = \frac{825}{5} = 165 \text{ m/min.}$$

A.2 Déterminer la vitesse moyenne de Joris en km/h.

Corrigé

Joris : 700 m = 0,7 km en 5 min = $\frac{1}{12}$ h.

$$v = \frac{0,7}{\frac{1}{12}} = 0,7 \times 12 = 8,4 \text{ km/h.}$$

Pour comprendre en détail

Autre méthode : $\frac{700}{5} = 140$ m/min, puis $140 \times 60 = 8\,400$ m/h = 8,4 km/h (1 m/min = 0,06 km/h).

- A.3** Exprimer, en pourcentage arrondi à l'unité, la distance supplémentaire parcourue par Lola par rapport à celle parcourue par Joris.

Corrigé

$$\frac{825 - 700}{700} = \frac{125}{700} = \frac{5}{28} \approx 0,179, \text{ soit environ } 18 \%.$$

Pour comprendre en détail

Attention à la référence : « par rapport à celle de Joris » : on divise par 700, pas par 825 (qui donnerait 15 %).

Partie B

- B.1** Donner une formule qui peut être saisie dans la cellule D2 puis recopiée vers le bas pour obtenir le tableau complété.

Corrigé

En D2 : =B2*200+C2*25

- B.2** Donner une formule qui peut être saisie dans la cellule E2 puis recopiée vers le bas pour obtenir le tableau complété.

Corrigé

En E2 : =D2/1000*12 ou =D2*0,012

Pour comprendre en détail

D mètres en 5 min, c'est $\frac{D}{1\,000}$ km en $\frac{1}{12}$ h, soit $\frac{D}{1\,000} \times 12 = 0,012 D$ km/h. Pour Lola : $825 \times 0,012 = 9,9 \checkmark$.

B.3 L'enseignante rassemble les résultats des distances parcourues par les élèves dans le tableau ci-dessous.

Distance parcourue (m)	550	575	625	650	675	700	750	775	825	850
Effectif	2	1	4	2	3	6	1	3	2	1

Déterminer la distance moyenne parcourue par les élèves de cette classe.

Corrigé

Effectif total : $2 + 1 + 4 + 2 + 3 + 6 + 1 + 3 + 2 + 1 = 25$.

Somme : $2 \times 550 + 575 + 4 \times 625 + 2 \times 650 + 3 \times 675 + 6 \times 700 + 750 + 3 \times 775 + 2 \times 825 + 850 = 17\,275$.

Moyenne : $\frac{17\,275}{25} = 691$ m.

Pour comprendre en détail

Erreur fréquente : faire la moyenne des dix distances sans tenir compte des effectifs.

Partie C

C.1.a Dans cette question, on suppose que la longueur du rectangle est de 20 m. Montrer que la largeur du rectangle est alors de 12 m.



Corrigé

$$\frac{20}{\ell} = \frac{5}{3} \text{ donc } \ell = 20 \times \frac{3}{5} = 12 \text{ m.}$$

C.1.b Déterminer un arrondi au mètre de la longueur de la piste.

Corrigé

Longueur de la piste = $2 \times 20 + \pi \times 12 = 40 + 12\pi \approx 77,7$ m, soit environ **78 m**.

Pour comprendre en détail

Deux demi-cercles de diamètre **12 m** ont ensemble pour longueur la circonférence d'un cercle de diamètre **12 m** : $\pi \times 12$.

C.2 Déterminer la longueur et la largeur du rectangle afin que la piste ait une longueur totale de **200 m**. Arrondir au centimètre chaque dimension.

Corrigé

Soit ℓ la largeur : la longueur est $\frac{5}{3}\ell$. La piste mesure $2 \times \frac{5}{3}\ell + \pi\ell = \left(\frac{10}{3} + \pi\right)\ell$.

$\left(\frac{10}{3} + \pi\right)\ell = 200$ donc $\ell = \frac{200}{\frac{10}{3} + \pi} = \frac{600}{10 + 3\pi} \approx 30,89$ m.

Longueur : $\frac{5}{3} \times 30,8885 \approx 51,48$ m.

Le rectangle mesure environ **51,48 m sur 30,89 m**.

Pour comprendre en détail

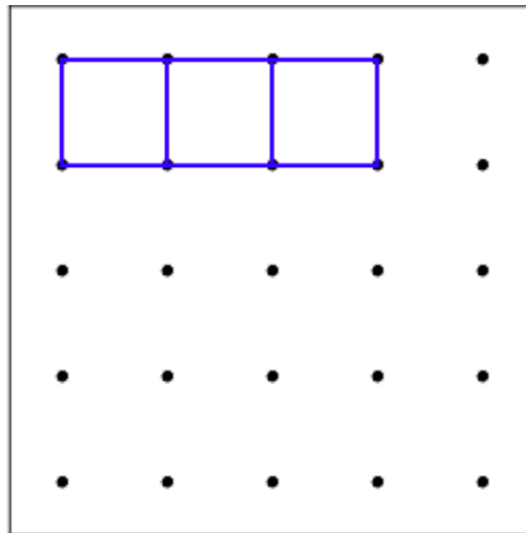
Vérification : $2 \times 51,48 + \pi \times 30,89 \approx 102,96 + 97,04 = 200,0$ ✓.

Arrondi : on calcule la longueur à partir de la largeur non arrondie (**30,8885**), pas de **30,89**, pour ne pas cumuler les erreurs d'arrondi.

Exercice 5

Partie A

A.1 Montrer que l'élève doit construire **12** carrés pour réaliser le tour d'un géoplan de **25** picots.



Corrigé

Un géoplan de **25** picots a **5** lignes de **5** picots : sur un côté, on construit **4** carrés.

Le tour comprend **4** côtés de **4** carrés, mais les **4** carrés des coins sont comptés deux fois :

$$4 \times 4 - 4 = 12 \text{ carrés.}$$

Pour comprendre en détail

Autre décompte : le géoplan contient $4 \times 4 = 16$ carrés unité ; ceux du bord sont les **16** carrés moins les $2 \times 2 = 4$ carrés du centre : $16 - 4 = 12 \checkmark$.

A.2 Déterminer le nombre de carrés nécessaires pour réaliser le tour d'un géoplan de **81** picots.

Corrigé

81 picots : **9** lignes de **9** picots, donc **8** carrés par côté.

$$4 \times 8 - 4 = 28 \text{ carrés.}$$

Pour comprendre en détail

Contrôle par l'autre décompte : $8 \times 8 = 64$ carrés unité au total, dont $6 \times 6 = 36$ à l'intérieur : $64 - 36 = 28 \checkmark$.

A.3 On note n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Justifier que le nombre de carrés nécessaires pour réaliser le tour d'un géoplan de n^2 picots est donné par l'expression $4n - 8$.

Corrigé

Un géoplan de n^2 picots a n lignes de n picots, donc $n - 1$ carrés par côté.

Les 4 côtés comptent $4(n - 1)$ carrés, dont les 4 carrés des coins comptés deux fois :

$$4(n - 1) - 4 = 4n - 4 - 4 = 4n - 8.$$

Pour comprendre en détail

Vérifications : $n = 5$ donne $4 \times 5 - 8 = 12 \checkmark$; $n = 9$ donne $28 \checkmark$.

Attention : la formule s'applique dès $n = 3$ (4 carrés autour du carré central). Pour $n = 2$ (4 picots), il n'y a qu'un seul carré et les quatre « coins » se confondent : le raisonnement par côtés ne s'applique plus tel quel.

A.4 On dispose d'un nombre d'élastiques permettant de construire 107 carrés pour réaliser le tour d'un géoplan. Déterminer le nombre maximal de picots de ce géoplan. Justifier la réponse.

Corrigé

Il faut $4n - 8 \leq 107$, soit $4n \leq 115$ et $n \leq 28,75$.

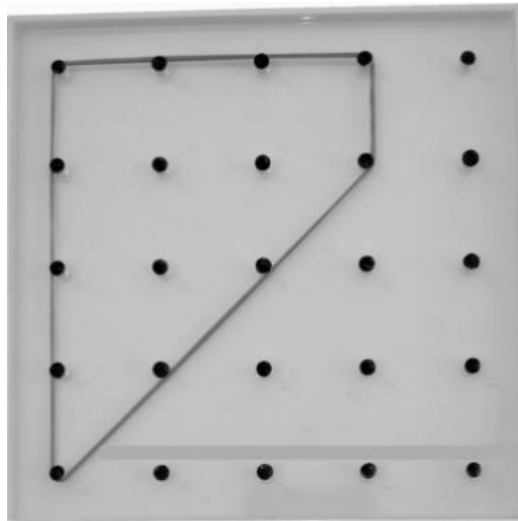
n est entier : $n_{\max} = 28$. Le nombre maximal de picots est $28^2 = 784$ (le tour demande alors $4 \times 28 - 8 = 104$ carrés).

Pour comprendre en détail

Piège : $n = 29$ donnerait $4 \times 29 - 8 = 108 > 107$ carrés : trop. Et $4n - 8 = 107$ n'a pas de solution entière (le nombre de carrés est toujours un multiple de 4).

Partie B

B.1 Construire la figure réalisée par l'élève en vraie grandeur.



Corrigé

La figure est un trapèze rectangle de sommets (en unités de **3 cm**, depuis le coin supérieur gauche) : $(0;0)$, $(3;0)$, $(3;1)$, $(0;4)$. En cm : côté supérieur **9 cm**, côté droit **3 cm**, côté gauche **12 cm**.

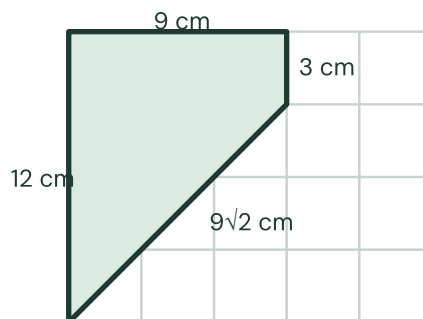


Figure de l'élève (schéma réduit, **1 carreau = 3 cm**)

Pour comprendre en détail

Pour la tracer en vraie grandeur : marquer **A**($0;0$), **B** à **9 cm** à droite, **C** à **3 cm** sous B, **E** à **12 cm** sous A, puis relier A–B–C–D–E–A en ayant placé D en bas du côté gauche. L'oblique joint C et le bas du côté gauche.

B.2.a Déterminer l'aire en cm^2 de cette figure.

Corrigé

Bases : **3 cm** et **12 cm** ; hauteur : **9 cm**.

$$\mathcal{A} = \frac{(3 + 12) \times 9}{2} = 67,5 \text{ cm}^2.$$

Pour comprendre en détail

Autre calcul : rectangle $9 \times 3 = 27 \text{ cm}^2$ + triangle rectangle de côtés 9 et 9 cm : $\frac{9 \times 9}{2} = 40,5 \text{ cm}^2$;
 $27 + 40,5 = 67,5 \checkmark$.

B.2.b Déterminer la valeur exacte du périmètre de cette figure.

Corrigé

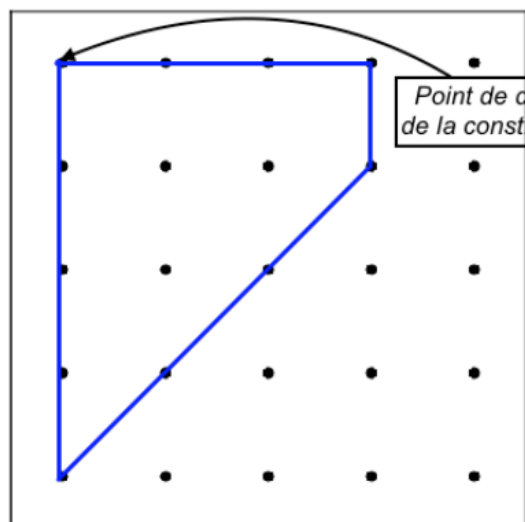
Le côté oblique est l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle de côté 9 cm : $\ell^2 = 9^2 + 9^2$
 $= 162$, donc $\ell = 9\sqrt{2}$ cm.

Périmètre : $9 + 3 + 9\sqrt{2} + 12 = 24 + 9\sqrt{2}$ cm ($\approx 36,7$ cm).

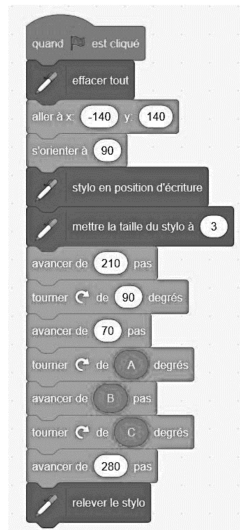
Pour comprendre en détail

On garde la valeur exacte $9\sqrt{2}$ comme demandé, sans la remplacer par une valeur approchée.

B.3 Un programme réalisé sur le logiciel « Scratch » permet de construire la figure ci-dessous :



En prenant 3 cm pour 70 pas, déterminer les valeurs à attribuer aux lettres A, B et C pour que le script proposé ci-dessous permette de construire cette figure. On prendra une valeur approchée à l'unité pour B. Le point de départ de la figure a pour coordonnées $(-140 ; 140)$. On rappelle que « s'orienter à 90 » permet de s'orienter vers la droite.



Corrigé

A = 45 : le lutin, orienté vers le bas, doit pivoter vers le bas à gauche (la diagonale à 45°) : angle extérieur de 45° , vers la droite du lutin.

B = 297 : l'oblique mesure $9\sqrt{2}$ cm ; 3 cm $\leftrightarrow$ 70 pas, donc $\frac{9\sqrt{2} \times 70}{3} = 210\sqrt{2} \approx 297$ pas.

C = 135 : à l'arrivée en bas, orienté à 225° , le lutin doit être orienté vers le haut : rotation de 135° (angle extérieur du trapèze au sommet).

Pour comprendre en détail

Le côté de 280 pas final correspond bien au côté gauche de 12 cm ($\frac{12}{3} \times 70 = 280$), et 210 pas au côté supérieur de 9 cm.

Contrôle des rotations : $90 + A + C + (\text{angle au départ}) = 360$ pour un polygone parcouru dans un sens : 90° (haut du côté droit) $+ 45^\circ + 135^\circ + 90^\circ$ (retour au point de départ) = 360° ✓.