

ANNALES CRPE · MATHÉMATIQUES · 2024

Corrigé détaillé

CRPE 2024 – Mathématiques – Groupement 2

Épreuve écrite disciplinaire de mathématiques (2e épreuve d'admissibilité)

Durée : 3 heures

20 points

Exercice 1

Exercice 2

Exercice 3

Exercice 4

Exercice 5

Pour chaque question : **rappel de l'énoncé**, **corrigé** rédigé, puis « **Pour comprendre en détail** » (méthode, rappels de cours, erreurs fréquentes). À utiliser avec le sujet officiel (documents, tableaux et figures).

Sujet : Ministère de l'Éducation nationale – session 2024 (EST MAT 2). Corrigé rédigé par Campus XYZ – campusxyz.fr. Tous droits réservés.

Exercice 1

Partie A

A.1.a Le directeur envisage dans un premier temps de constituer **14** équipes avec un maximum d'élèves des deux niveaux (sans nécessairement sélectionner tous les élèves). Donner la composition de chaque équipe.

Corrigé

CE2 : $72 = 14 \times 5 + 2$, donc **5** élèves de CE2 par équipe.

CM1 : $108 = 14 \times 7 + 10$, donc **7** élèves de CM1 par équipe.

Chaque équipe comprend **5 élèves de CE2 et 7 élèves de CM1**.

Pour comprendre en détail

On cherche le plus grand entier q tel que $14q \leq 72$ (puis ≤ 108) : c'est le quotient de la division euclidienne ($72 \div 14 = 5,14 \dots$ et $108 \div 14 = 7,71 \dots$). On ne peut pas arrondir à **6** ou **8** : il manquerait des élèves.

A.1.b Dans ces conditions, combien d'élèves ne participeront pas au tournoi ?

Corrigé

CE2 : $72 - 14 \times 5 = 2$ élèves ; CM1 : $108 - 14 \times 7 = 10$ élèves.

Au total **12 élèves** ne participent pas.

A.2.a Le directeur change d'avis : il souhaite que tous les élèves puissent participer. Pour cela, il cherche à déterminer le nombre d'équipes adéquat. Peut-il constituer **8** équipes ? Justifier.

Corrigé

$\frac{72}{8} = 9$ convient pour les CE2, mais $\frac{108}{8} = 13,5$ n'est pas un entier : on ne peut pas répartir les 108 élèves de CM1 en **8** équipes identiques.

Le directeur **ne peut pas** constituer **8** équipes.

Pour comprendre en détail

On peut le voir autrement : **8** divise **72** mais ne divise pas **108** ($108 = 8 \times 13 + 4$), donc **8** n'est pas un diviseur commun.

A.2.b Décomposer 72 et 108 en produit de facteurs premiers.

Corrigé

$$72 = 2 \times 36 = 2 \times 2 \times 18 = 2^3 \times 3^2.$$

$$108 = 2 \times 54 = 2 \times 2 \times 27 = 2^2 \times 3^3.$$

Pour comprendre en détail

$$\text{Vérification : } 2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72 \checkmark \text{ et } 2^2 \times 3^3 = 4 \times 27 = 108 \checkmark.$$

A.2.c En déduire la liste des diviseurs communs à 72 et 108.

Corrigé

Facteurs communs : 2^2 et 3^2 . Le PGCD est $2^2 \times 3^2 = 36$.

Les diviseurs communs sont les diviseurs de 36 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36.

Pour comprendre en détail

On vérifie qu'il y en a $(2 + 1) \times (2 + 1) = 9$: exposants possibles 0, 1, 2 pour 2 et pour 3.

A.2.d Quel nombre d'équipes maximal le directeur peut-il constituer ? Préciser alors la composition de chaque équipe.

Corrigé

Le nombre maximal d'équipes est le PGCD : **36 équipes**.

Composition : $\frac{72}{36} = 2$ élèves de CE2 et $\frac{108}{36} = 3$ élèves de CM1 par équipe.

Pour comprendre en détail

$$\text{Vérification : } 36 \times (2 + 3) = 180 \text{ élèves, soit } 72 + 108 \checkmark.$$

Partie B

B.1 Parmi les élèves de l'école Irène Joliot-Curie qui participent au tournoi, quelle est la proportion d'élèves de CE2 ? Donner le résultat en pourcentage arrondi à l'unité.

Corrigé

École Irène Joliot-Curie : $22 + 19 = 41$ élèves dont **22** en CE2.

$$\frac{22}{41} \approx 0,537, \text{ soit environ } 54 \%.$$

Pour comprendre en détail

Attention : on divise par **41** (les élèves de *cette école*), pas par **180** (tous les participants).

B.2 Calculer le nombre moyen d'élèves en classe de CM1 sur l'ensemble des quatre écoles.

Corrigé

Total des CM1 : $24 + 19 + 34 + 31 = 108$. Moyenne : $\frac{108}{4} = 27$ élèves par école.

B.3 On choisit un élève au hasard parmi tous les élèves qui participent au tournoi. Quelle est la probabilité qu'il soit en CM1 ?

Corrigé

$$P = \frac{108}{72 + 108} = \frac{108}{180} = \frac{3}{5}.$$

Pour comprendre en détail

$$\frac{108}{180} = \frac{3 \times 36}{5 \times 36} = \frac{3}{5} = 0,6 : \text{on simplifie par le PGCD } 36 \text{ des deux nombres.}$$

B.4 On choisit un élève au hasard parmi les élèves de CE2 qui participent au tournoi. Quelle est la probabilité qu'il soit scolarisé à l'école Aimé Césaire ? Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

Corrigé

$$P = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}.$$

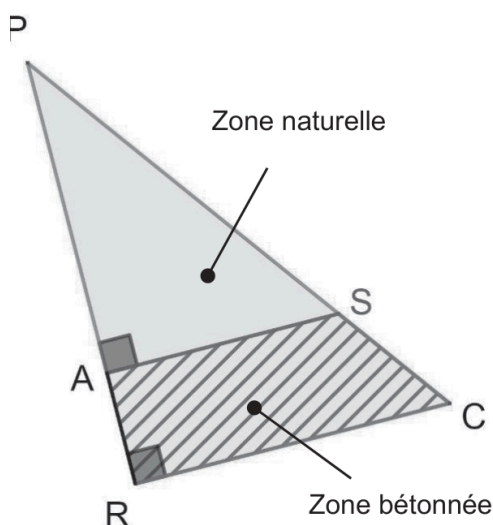
Pour comprendre en détail

Attention à l'univers : on tire parmi les CE2 seulement (**72** élèves), pas parmi les **180** participants.

Exercice 2

Partie A

A.1 Tracer le plan de la cour d'école en choisissant comme échelle 1 cm pour 5 m. Justifier les dimensions utilisées et laisser les traits de construction apparents.

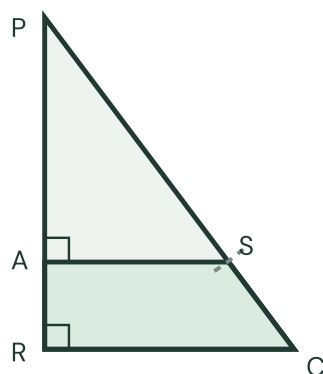


Corrigé

À l'échelle 1 cm pour 5 m : $PA = \frac{28}{5} = 5,6$ cm ; $AR = \frac{10}{5} = 2$ cm donc $PR = 7,6$ cm ; $PS = \frac{35}{5} = 7$ cm.

Construction :

1. tracer le segment $[PR]$ de 7,6 cm et placer A à 5,6 cm de P ;
2. tracer la perpendiculaire à (PR) en A ;
3. tracer l'arc de cercle de centre P et de rayon 7 cm : il coupe cette perpendiculaire en S (avec $AS = 4,2$ cm, voir question 2) ;
4. tracer la perpendiculaire à (PR) en R et la droite (PS) : elles se coupent en C.



Plan de la cour (échelle 1 cm pour 5 m)

Pour comprendre en détail

Les dimensions de la cour réelle sont retrouvées en multipliant par 500 (1 cm sur le plan = 500 cm réels = 5 m) : 7,6 cm → 38 m.

A.2 Montrer que $AS = 21$ m.

Corrigé

PAS est rectangle en A, donc $PS^2 = PA^2 + AS^2$, soit $35^2 = 28^2 + AS^2$.

$AS^2 = 1\,225 - 784 = 441$ et $AS = \sqrt{441} = 21$ m.

Pour comprendre en détail

On reconnaît le triplet (3 ; 4 ; 5) multiplié par 7 : 21, 28, 35.

A.3 Calculer RC.

Corrigé

$(AS) \perp (PR)$ et $(RC) \perp (PR)$, donc $(AS) \parallel (RC)$. Les points P, A, R et P, S, C sont alignés : d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{PA}{PR} = \frac{AS}{RC}, \text{ soit } \frac{28}{38} = \frac{21}{RC} \text{ avec } PR = 28 + 10 = 38 \text{ m.}$$

$$RC = \frac{21 \times 38}{28} = 28,5 \text{ m.}$$

Pour comprendre en détail

Attention : $PR = PA + AR = 38$ m, et non 10 m : le rapport de Thalès utilise la longueur entière [PR].

A.4 Vérifier que l'aire du quadrilatère RASC est égale à $247,5 \text{ m}^2$.

Corrigé

RASC est un trapèze rectangle de bases $AS = 21 \text{ m}$ et $RC = 28,5 \text{ m}$, de hauteur $AR = 10 \text{ m}$:

$$\mathcal{A} = \frac{(21 + 28,5) \times 10}{2} = 247,5 \text{ m}^2.$$

Pour comprendre en détail

$$\text{Autre calcul : } \mathcal{A}_{\text{PRC}} - \mathcal{A}_{\text{PAS}} = \frac{38 \times 28,5}{2} - \frac{28 \times 21}{2} = 541,5 - 294 = 247,5 \checkmark.$$

Partie B

B.1 Calculer le nombre de pots nécessaires pour recouvrir la zone bétonnée.

Corrigé

Surface à recouvrir avec deux couches : $2 \times 247,5 = 495 \text{ m}^2$.

$$\frac{495}{56} \approx 8,84 : \text{il faut } \mathbf{9 \text{ pots}}.$$

Pour comprendre en détail

Arrondi : à l'entier supérieur ($8,84 \rightarrow 9$) : avec 8 pots, on ne couvrirait que 448 m^2 sur les 495 m^2 nécessaires.

B.2.a La commune peut choisir parmi les propositions de deux fournisseurs de résine. Le fournisseur A facture la résine et la pose de la résine à $215,75 \text{ €}$ le pot de résine ; le fournisseur B vend chaque pot de résine $138,50 \text{ €}$ et les frais de pose pour l'ensemble de la commande s'élèvent à 600 € . Soit f la fonction qui au nombre n de pots de résine achetés auprès du fournisseur A associe le prix total à payer en euros. Donner l'expression de $f(n)$.

Corrigé

$$f(n) = 215,75 n.$$

Pour comprendre en détail

Fonction linéaire (pas de frais fixes).

B.2.b Soit g la fonction qui au nombre n de pots de résine achetés auprès du fournisseur B associe le prix total à payer en euros. Donner l'expression de $g(n)$.

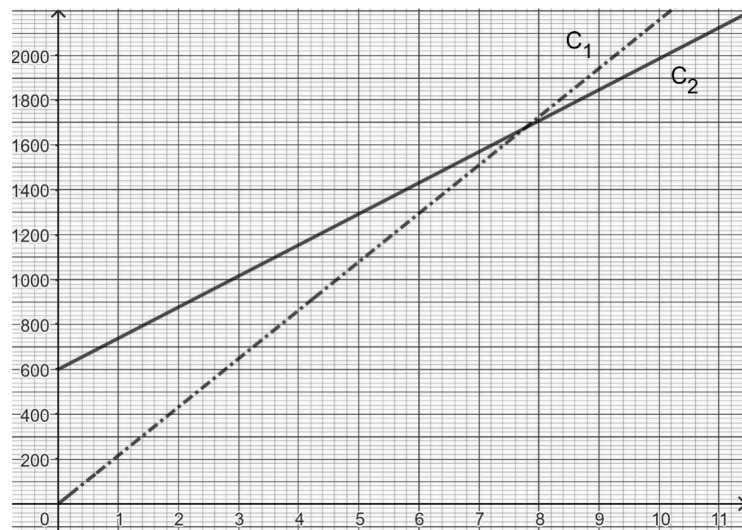
Corrigé

$$g(n) = 138,5n + 600.$$

Pour comprendre en détail

Fonction affine : **138,5** est le coefficient directeur (prix d'un pot), **600** l'ordonnée à l'origine (frais de pose).

B.3.a En exploitant le graphique ci-dessous, déterminer le fournisseur le plus intéressant pour la commune ainsi que le coût approximatif correspondant. Expliquer votre démarche.



Corrigé

C_1 (qui passe par l'origine) représente f (fournisseur A) ; C_2 (qui part de 600) représente g (fournisseur B).

Les deux droites se coupent un peu avant 8 pots, vers 1 700 €. Pour $n = 9$ pots, la droite C_2 est en dessous de C_1 : le fournisseur B est le moins cher, pour un coût d'environ 1 850 €.

Pour comprendre en détail

Calcul de contrôle : $f(9) = 215,75 \times 9 = 1\,941,75$ € et $g(9) = 1\,846,50$ €. Les droites se coupent pour $215,75n = 138,5n + 600$, soit $n = \frac{600}{77,25} \approx 7,77$: B est moins cher dès 8 pots.

B.3.b Calculer le coût exact de ces travaux avec le fournisseur retenu.

Corrigé

$$g(9) = 138,5 \times 9 + 600 = 1\,246,5 + 600 = 1\,846,50 \text{ €}.$$

Partie C

C.1 Quelle formule a été saisie en cellule C2 puis étirée pour compléter la colonne C ?

Corrigé

En C2 : $=104,65 \times A2 + 995,75$

Pour comprendre en détail

Contrôle : pour 1 pot, $104,65 + 995,75 = 1\,100,4$ ✓ (valeur du tableau).

C.2 À l'aide du tableau, déterminer à partir de combien de pots le fournisseur C semble être plus intéressant que le fournisseur B.

Corrigé

Pour 11 pots : B = 2 123,5 et C = 2 146,9 : B est encore moins cher.

Pour 12 pots : B = 2 262 et C = 2 251,55 : C est moins cher.

Le fournisseur C semble plus intéressant **à partir de 12 pots**.

Pour comprendre en détail

« Semble » car le tableau s'arrête à 16 pots : pour s'assurer que C reste moins cher au-delà, il faut résoudre une inéquation (question suivante).

C.3 Écrire et résoudre une inéquation qui permet de retrouver ce résultat.

Corrigé

On cherche n tel que le prix C soit inférieur au prix B :

$$104,65n + 995,75 < 138,5n + 600$$

$$995,75 - 600 < 138,5n - 104,65n, \text{ soit } 395,75 < 33,85n.$$

$$n > \frac{395,75}{33,85} \approx 11,69. n \text{ est entier : le fournisseur C est plus intéressant dès 12 pots.}$$

Pour comprendre en détail

On regroupe les termes en n d'un côté, les constantes de l'autre ; on divise par $33,85 > 0$, donc l'inégalité garde son sens. Le résultat 11,69 n'est pas entier : le seuil est l'entier suivant, 12.

Exercice 3

- 1 Montrer que le résultat du programme de calcul est **36** lorsque le nombre de départ choisi est **5**.

Corrigé

Carré de 5 : 25 . Ajouter le triple de 5 : $25 + 15 = 40$. Soustraire 4 : $40 - 4 = 36$.

- 2 Quel résultat obtient-on avec ce programme de calcul en choisissant $\frac{5}{3}$ pour nombre de départ ?

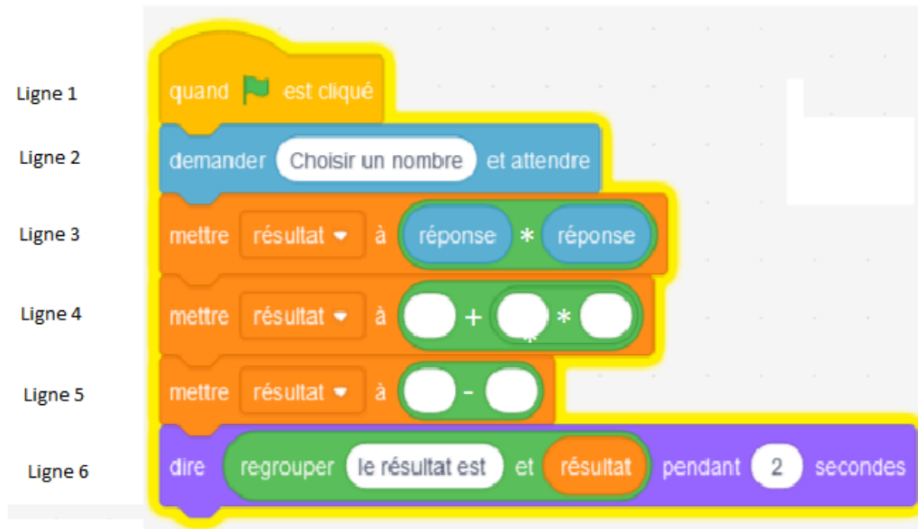
Corrigé

Carré : $\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$. Triple : $3 \times \frac{5}{3} = 5$. Somme : $\frac{25}{9} + 5 = \frac{70}{9}$. Soustraction : $\frac{70}{9} - 4 = \frac{34}{9}$.
Le résultat est $\frac{34}{9}$.

Pour comprendre en détail

Pour additionner, on met au même dénominateur : $5 = \frac{45}{9}$ donc $\frac{25}{9} + \frac{45}{9} = \frac{70}{9}$, puis $4 = \frac{36}{9}$.

3 On considère le script ci-dessous rédigé avec le logiciel Scratch.



Recopier et compléter les lignes 4 et 5 du script pour qu'il exécute le programme de calcul. Aucune justification n'est attendue.

Corrigé

Ligne 4 : mettre résultat à résultat + 3 * réponse

Ligne 5 : mettre résultat à résultat - 4

Pour comprendre en détail

Sur la ligne 4, le bloc « () + () * () » se lit « premier + (deuxième x troisième) » grâce à la priorité de la multiplication : résultat + (3 * réponse).

4.a On appelle x le nombre de départ. Exprimer en fonction de x le résultat final.

Corrigé

Carré : x^2 ; ajout du triple : $x^2 + 3x$; soustraction de 4 : $x^2 + 3x - 4$.

Le résultat final est $x^2 + 3x - 4$.

4.b Vérifier que ce résultat peut aussi s'écrire sous la forme $(x - 1)(x + 4)$.

Corrigé

$$(x - 1)(x + 4) = x^2 + 4x - x - 4 = x^2 + 3x - 4 \checkmark.$$

Pour comprendre en détail

On pouvait aussi factoriser : on cherche deux nombres de produit -4 et de somme 3 : 4 et -1 .

4.c Écrire et résoudre l'équation qui permet de trouver le(s) nombre(s) à choisir au départ pour obtenir zéro comme résultat.

Corrigé

On résout $x^2 + 3x - 4 = 0$, c'est-à-dire $(x - 1)(x + 4) = 0$.

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $x - 1 = 0$ ou $x + 4 = 0$.

$x = 1$ ou $x = -4$: il faut choisir **1 ou -4** au départ.

Pour comprendre en détail

Vérification : pour 1, $1 + 3 - 4 = 0 \checkmark$; pour -4, $16 - 12 - 4 = 0 \checkmark$.

Erreur fréquente : ne garder que $x = 1$. Le programme accepte aussi des nombres négatifs.

Exercice 4

- 1.a** Le cuisinier prépare la pâte et la place dans un saladier en forme de demi-sphère de diamètre **42 cm**. Ce saladier est entièrement rempli. Vérifier que l'arrondi à l'unité du volume de pâte en cm^3 contenu dans le saladier est égal à **19 396 cm^3** .

Corrigé

Rayon : $R = 21$ cm.

$$V = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi \times 21^3 = \frac{2}{3} \pi \times 9\,261 = 6\,174 \pi \approx 19\,396,19 \text{ cm}^3, \text{ soit } 19\,396 \text{ cm}^3 \text{ à l'unité près.}$$

Pour comprendre en détail

$$21^3 = 21 \times 21 \times 21 = 9\,261 \text{ et } \frac{2}{3} \times 9\,261 = 6\,174.$$

- 1.b** Exprimer ce volume en litre et en donner l'arrondi au dixième.

Corrigé

$$19\,396 \text{ cm}^3 = 19,396 \text{ dm}^3 = 19,396 \text{ L, soit environ } 19,4 \text{ L.}$$

- 2** Le cuisinier envisage d'utiliser des moules tous identiques, de forme cylindrique de **3 cm** de rayon et de **5 cm** de hauteur. Le cuisinier les remplira de pâte aux trois quarts de leur hauteur. Quel nombre maximal de moules peut-il remplir en utilisant toute la pâte ?

Corrigé

$$\text{Hauteur de pâte : } \frac{3}{4} \times 5 = 3,75 \text{ cm. Volume par moule : } \pi \times 3^2 \times 3,75 = 33,75 \pi \approx 106,03 \text{ cm}^3.$$

$$\frac{19\,396}{33,75 \pi} \approx 182,9 : \text{ le cuisinier peut remplir } \mathbf{182 \text{ moules.}}$$

Pour comprendre en détail

Arrondi : on garde la partie entière (**182**) : le **183^e** moule ne serait pas rempli.

-
- 3.a** *Le cuisinier change d'avis et choisit d'autres moules. Ces moules ont la forme de pavé droit de dimensions 4 cm de largeur, 6 cm de longueur et 5 cm de hauteur. À quelle hauteur doit-il les remplir pour faire 210 gâteaux identiques en utilisant toute la pâte ? Donner la valeur arrondie au millimètre.*

Corrigé

Volume de pâte par moule : $4 \times 6 \times h = 24h$. Pour 210 gâteaux : $210 \times 24h = 19\,396$, soit 5 040 $h = 19\,396$.

$$h = \frac{19\,396}{5\,040} \approx 3,85 \text{ cm, soit environ } \mathbf{3,8 \text{ cm} (38 \text{ mm})}.$$

Pour comprendre en détail

3,848 cm = 38,48 mm, que l'on arrondit au millimètre : 38 mm. La hauteur 3,8 cm est inférieure à la hauteur du moule (5 cm) : les moules ne débordent pas.

-
- 3.b** *Quand la pâte cuit, la hauteur du gâteau augmente de 15 %. Quelle sera la hauteur, arrondie au millimètre, de chaque gâteau après cuisson ?*

Corrigé

$$3,848 \times 1,15 \approx 4,43 \text{ cm.}$$

La hauteur après cuisson est d'environ **4,4 cm**.

Pour comprendre en détail

Avec la valeur arrondie 3,8 cm : $3,8 \times 1,15 = 4,37$ cm, soit aussi 4,4 cm. Les deux calculs donnent le même arrondi.

4,4 cm < 5 cm : le gâteau ne déborde pas du moule.

Exercice 5

Partie A

A.1 Le nombre 1,63 est un nombre rationnel.

Corrigé

$1,63 = \frac{163}{100}$: quotient de deux entiers, donc rationnel. **Vrai.**

A.2 Tout nombre réel x vérifiant $x < -4$ appartient à l'intervalle $] -\infty ; -6]$.

Corrigé

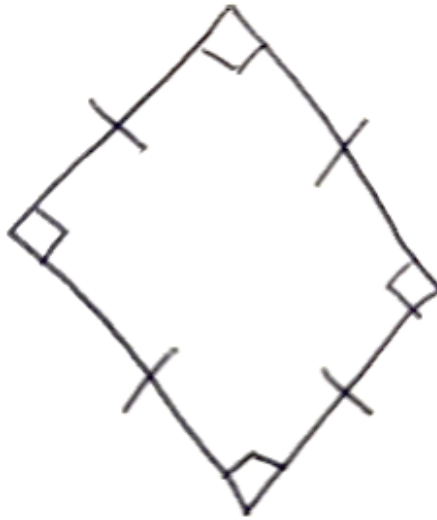
Contre-exemple : $x = -5$ vérifie $x < -4$, mais $-5 > -6$: $-5 \notin] -\infty ; -6]$.

L'affirmation est **fausse**.

Pour comprendre en détail

L'ensemble des réels $x < -4$ est l'intervalle $] -\infty ; -4[$, qui contient $] -\infty ; -6]$ mais est plus grand. Les nombres de $] -6 ; -4[$ manquent.

A.3 Le croquis ci-contre représente un carré.



Corrigé

Le codage indique que le quadrilatère a quatre côtés de même longueur : c'est un losange ; et quatre angles droits : c'est un rectangle.

Un quadrilatère qui est à la fois un losange et un rectangle est un carré. L'affirmation est **vraie**.

Pour comprendre en détail

Un seul de ces codages ne suffit pas : quatre côtés égaux donnent un losange (pas forcément un carré), quatre angles droits donnent un rectangle (pas forcément un carré).

Partie B

B.1 L'équation $7x - 9 = 0$ a pour solution : A 1,29 ; B -1,29 ; C $\frac{9}{7}$; D $\frac{7}{9}$.

Corrigé

$$7x - 9 = 0 \Leftrightarrow 7x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{7}. \text{ Réponse C.}$$

Pour comprendre en détail

$\frac{9}{7} \approx 1,2857$: la réponse A (1,29) n'est qu'une valeur approchée, pas la solution exacte.

B.2 L'inéquation $5 - 4x \geq 0$ a pour solution les nombres x tels que : A $x \geq -1,25$; B $x \geq 1,25$; C $x \leq 0,8$; D $x \leq 1,25$.

Corrigé

$$5 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow -4x \geq -5 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{4} = 1,25 \text{ (on divise par } -4, \text{ le sens s'inverse). Réponse D.}$$

Pour comprendre en détail

Autre méthode : $5 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow 5 \geq 4x \Leftrightarrow \frac{5}{4} \geq x$, sans diviser par un négatif.

- B.3** Zoé a 7 crayons de plus que Léa. À elles deux, elles en ont 31. Soit x le nombre de crayons de Zoé. Une équation qui permet de calculer le nombre de crayons de Zoé est : A $2x - 7 = 31$; B $2x + 7 = 31$; C $31 - 2x = 7$; D $x + 7 = 31$.

Corrigé

Zoé a x crayons, Léa en a 7 de moins : $x - 7$.

Ensemble : $x + (x - 7) = 31$, soit $2x - 7 = 31$. **Réponse A.**

Pour comprendre en détail

Solution : $2x = 38$, $x = 19$; Zoé a 19 crayons, Léa 12, et $19 + 12 = 31$ ✓.

- B.4** Je suis un nombre. Si on me retranche 5, puis on multiplie le résultat par 2, le résultat est strictement supérieur à mon quadruple. Soit x le nombre cherché. Une inéquation qui permet de traduire ce problème est : A $x - 5 \times 2 > 4x$; B $2x - 5 > 4x$; C $x - 5 > 2x$; D $2x - 10 > 4$.

Corrigé

On retranche 5 : $x - 5$; on multiplie par 2 : $(x - 5) \times 2$; strictement supérieur au quadruple : $(x - 5) \times 2 > 4x$.

En divisant les deux membres par 2 : $x - 5 > 2x$. **Réponse C.**

Pour comprendre en détail

L'inéquation $2(x - 5) > 4x$, c'est-à-dire $2x - 10 > 4x$, n'est pas proposée telle quelle. Les propositions A et B ne respectent pas la priorité des opérations (le « $\times 2$ » porte sur toute la différence), et D a 4 à la place de $4x$. Seule C est équivalente.