

ANNALES CRPE · MATHÉMATIQUES · 2024

Corrigé détaillé

CRPE 2024 – Mathématiques – Groupement 3

Épreuve écrite disciplinaire de mathématiques (2e épreuve d'admissibilité)

Durée : 3 heures

20 points

Exercice 1

Exercice 2

Exercice 3

Exercice 4

Exercice 5

Exercice 6

Pour chaque question : **rappel de l'énoncé**, **corrigé** rédigé, puis « **Pour comprendre en détail** » (méthode, rappels de cours, erreurs fréquentes). À utiliser avec le sujet officiel (documents, tableaux et figures).

Sujet : Ministère de l'Éducation nationale – session 2024 (EST MAT 3). Corrigé rédigé par Campus XYZ – campusxyz.fr. Tous droits réservés.

Exercice 1

Partie A

A.1.a Énoncer tous les résultats possibles lorsque l'on réalise cette expérience.

Corrigé

$3 \times 2 \times 1 = 6$ résultats possibles, équiprobables : **345, 354, 435, 453, 534, 543**.

Pour comprendre en détail

Un arbre à trois niveaux donne les mêmes six chemins. Sans remise, les tirages successifs ne sont pas indépendants : à chaque niveau, il reste une carte de moins.

A.1.b Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

Corrigé

Les nombres pairs sont ceux qui se terminent par **4** : **354** et **534**.

$$P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

A.1.c Quelle est la probabilité de ne pas obtenir un multiple de 5 ?

Corrigé

Les multiples de 5 sont ceux qui se terminent par **5** : **345** et **435**.

$$P(\text{multiple de 5}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \text{ donc } P(\text{pas multiple de 5}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ (soit } \frac{4}{6}\text{)}.$$

A.1.d Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre divisible par 3 ?

Corrigé

Les trois chiffres sont toujours **3, 4** et **5** : la somme des chiffres vaut **$3 + 4 + 5 = 12$** , multiple de **3**, pour chacun des six nombres.

Tous les nombres sont divisibles par **3** : **$P = 1$** (événement certain).

Pour comprendre en détail

Une probabilité égale à **1** correspond à un événement certain, et **0** à un événement impossible.

A.2.a *Question 2 : on souhaite désormais former un nombre à deux chiffres. On tire au hasard une première carte pour obtenir le chiffre des dizaines. On remet cette carte dans le sac et on tire au hasard une seconde carte pour obtenir le chiffre des unités.*

Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre dont les deux chiffres sont identiques ?

Corrigé

Les **9** issues équiprobables sont **33, 34, 35, 43, 44, 45, 53, 54, 55**.

Les nombres à deux chiffres identiques : **33, 44, 55** : $P = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Pour comprendre en détail

Remise : comme la carte est remise, un même chiffre peut être tiré deux fois (**33, 44, 55**) : ces issues n'existaient pas dans la question 1 (sans remise).

A.2.b *Quelle est la probabilité d'obtenir un multiple de 9 ?*

Corrigé

Somme des chiffres multiple de **9** : $4 + 5 = 9$. Les multiples de **9** sont **45** et **54**.

$$P = \frac{2}{9}.$$

A.2.c *Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre inférieur ou égal à 40 ?*

Corrigé

Les nombres ≤ 40 sont ceux dont le chiffre des dizaines est **3** : **33, 34, 35**.

$$P = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Pour comprendre en détail

Le nombre **40** n'est pas dans la liste des issues (il faudrait une carte **0**). Les nombres **43, 44, 45, 53, 54, 55** sont tous strictement supérieurs à **40**.

Partie B

B.1 Quelle est la probabilité que la boule tirée soit de couleur jaune ?

Corrigé

$$P(J) = \frac{1}{2} \times P(R) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

B.2 Quelle est la probabilité que la boule tirée soit de couleur bleue ?

Corrigé

$$P(B) = 1 - P(R) - P(J) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{8 - 2 - 1}{8} = \frac{5}{8}.$$

B.3 Déterminer la composition du sac sachant qu'il y a 7 boules jaunes.

Corrigé

7 boules jaunes représentent $\frac{1}{8}$ du sac : le total est $7 \times 8 = 56$ boules.

Rouges : $\frac{1}{4} \times 56 = 14$. Bleues : $\frac{5}{8} \times 56 = 35$.

Le sac contient **35 boules bleues, 14 rouges et 7 jaunes**.

Pour comprendre en détail

Vérification : $35 + 14 + 7 = 56$ ✓ et il y a bien deux fois moins de jaunes (7) que de rouges (14).

Exercice 2

- 1** L'équipe enseignante d'une première école opte pour l'offre F. Déterminer l'expression de la fonction f qui, au nombre de vidéos téléchargées, associe le coût en euros.

Corrigé

Avec x vidéos téléchargées : $f(x) = 0,7x$.

- 2.a** L'équipe enseignante d'une seconde école opte pour l'offre G. Les enseignants ont téléchargé **142** vidéos pour un montant de **98,20** €. Déterminer le montant fixe par téléchargement avec l'offre G.

Corrigé

$$13 + 142m = 98,2 \text{ donc } 142m = 85,2 \text{ et } m = \frac{85,2}{142} = 0,6.$$

Le montant par téléchargement est de **0,60** €.

Pour comprendre en détail

Vérification : $13 + 142 \times 0,6 = 13 + 85,2 = 98,2 \checkmark$. Cela justifie l'expression $g(x) = \frac{3}{5}x + 13$ de la question suivante ($\frac{3}{5} = 0,6$).

- 2.b** On note g la fonction qui, au nombre de vidéos téléchargées, associe le coût en euros avec l'offre G. On admet que l'expression de g est donnée par $g(x) = \frac{3}{5}x + 13$. Calculer $g(4)$.

Corrigé

$$g(4) = \frac{3}{5} \times 4 + 13 = 2,4 + 13 = 15,4.$$

- 2.c** Dans le contexte de l'exercice, que représente l'image de **10** par la fonction g ?

Corrigé

$g(10)$ est le **coût en euros de 10 vidéos téléchargées avec l'offre G** : $0,6 \times 10 + 13 = 19$ €.

- 2.d** L'équipe enseignante d'une troisième école a opté pour l'offre G et a payé 95,20 €. Combien de vidéos a-t-elle téléchargées ?

Corrigé

$$0,6x + 13 = 95,2 \text{ donc } 0,6x = 82,2 \text{ et } x = \frac{82,2}{0,6} = 137.$$

Cette école a téléchargé **137 vidéos**.

Pour comprendre en détail

Vérification : $0,6 \times 137 = 82,2$ et $82,2 + 13 = 95,2 \checkmark$.

- 3** À partir de combien de vidéos l'offre G devient-elle plus intéressante que l'offre F ? Justifier votre réponse.

Corrigé

On résout $0,6x + 13 < 0,7x$.

L'offre G est plus intéressante **à partir de 131 vidéos**.

Pour comprendre en détail

Pour $x = 130$, les deux offres coûtent la même somme : $0,6 \times 130 + 13 = 91 = 0,7 \times 130$. G devient strictement moins chère dès **131 vidéos (91,6 € contre 91,7 €)**.

- 4.a** La feuille de tableur ci-après détermine le montant de la dépense en fonction du nombre de vidéos téléchargées selon l'offre choisie.

	A	B	C	D	E	F
1	Nombre de vidéos téléchargées	50	100	150	200	250
2	Dépense en € avec l'offre F	43	73	103	133	163
3	Dépense en € avec l'offre G					

Quelle formule peut être saisie dans la cellule B2 et étirée sur toute la ligne pour obtenir le montant de la dépense avec l'offre F ?

Corrigé

En B2 : $=B1*0,7$

Pour comprendre en détail

Erreur dans le sujet : les valeurs affichées en ligne 2 (**43, 73, ...**) correspondent à l'offre G (**$0,6x + 13$**) et non à l'offre F. En pareil cas, on signale l'erreur sur la copie et on traite les questions telles qu'elles sont posées.

4.b

*Un tarif promotionnel permet de bénéficier d'une réduction de **20 %** sur le montant total avec l'offre G. Quelle formule peut être saisie dans la cellule B3 et étirée sur toute la ligne pour obtenir le montant de la dépense avec l'offre G en tenant compte de la réduction ?*

Corrigé

Diminuer de **20 %** revient à multiplier par $1 - \frac{20}{100} = 0,8$.

En B3 : $= (B1 * 0,6 + 13) * 0,8$ (ou $= 0,48 * B1 + 10,4$)

Pour comprendre en détail

Parenthèses : la réduction porte sur le montant total (**$0,6x + 13$**), donc sur toute la parenthèse. Écrire $= B1 * 0,6 + 13 * 0,8$ n'appliquerait la réduction qu'à l'abonnement.

Exercice 3

1 *Toute fraction est un nombre décimal.*

Corrigé

Contre-exemple : $\frac{1}{3} = 0,333 \dots$ est une fraction qui n'est pas un nombre décimal (son écriture décimale est infinie).

L'affirmation est **fausse**.

Pour comprendre en détail

Une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ est décimale si et seulement si les seuls facteurs premiers de b sont 2 et 5 : $\frac{1}{4} = 0,25$ est décimale, $\frac{1}{3}$ ne l'est pas.

2 *Tout nombre entier relatif est un nombre décimal.*

Corrigé

Un entier relatif n s'écrit $\frac{n \times 10^k}{10^k}$, ou simplement $n = n,0$: c'est un nombre décimal.

L'affirmation est **vraie**.

Pour comprendre en détail

Hiérarchie : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

3 *Le carré d'un nombre impair est impair.*

Corrigé

Soit $n = 2k + 1$ un entier impair. $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$.

$2k^2 + 2k$ est un entier : n^2 est de la forme $2K + 1$, donc impair. L'affirmation est **vraie**.

Pour comprendre en détail

Raisonnement équivalent : produit de deux impairs ($n \times n$) est impair, car « impair $\times$ impair » reste impair.

4 *Le produit de deux nombres est supérieur ou égal à chacun de ces deux nombres.*

Corrigé

Contre-exemple : $3 \times 0,1 = 0,3$, qui est inférieur à 3.

L'affirmation est **fausse**.

Pour comprendre en détail

Autre contre-exemple : $-2 \times 3 = -6 < -2$. L'affirmation ne serait vraie que pour des nombres supérieurs ou égaux à 1.

5 *Augmenter un prix de 15 % puis le diminuer de 15 % le ramène à sa valeur initiale.*

Corrigé

Hausse de 15 % : coefficient 1,15 ; baisse de 15 % : coefficient 0,85.

$1,15 \times 0,85 = 0,9775 < 1$: le prix final est 97,75 % du prix initial. L'affirmation est **fausse**.

Pour comprendre en détail

Exemple chiffré : 100 € → 115 € → 97,75 €. La baisse de 15 % s'applique à un prix plus élevé (115 €) que la hausse (100 €), donc elle retire plus de 15 €.

Exercice 4

- 1 Quelle est la nature de la figure obtenue en effectuant le bloc « figure de base » ?

Corrigé

Le bloc trace 4 fois un segment de longueur « longueur », en tournant à chaque fois de 90° : on obtient un **carré** de côté « longueur ».

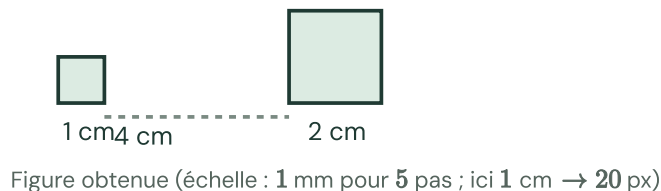
- 2 En prenant 1 mm pour 5 pas, tracer la figure obtenue après avoir cliqué sur le drapeau vert.

Corrigé

Premier passage : **longueur** = 50 pas = 10 mm = 1 cm : carré de 1 cm de côté. Le lutin, stylo relevé, avance de $50 + 200 = 250$ pas = 50 mm = 5 cm.

Deuxième passage : **longueur** = 100 pas = 20 mm = 2 cm : carré de 2 cm de côté, tracé à 5 cm du point de départ du premier.

La distance entre les deux carrés est donc $5 - 1 = 4$ cm.



Pour comprendre en détail

Le lutin est orienté à 90 (vers la droite) au début de chaque passage, grâce au bloc « s'orienter à 90 » dans la boucle. Après un carré, il est revenu à son point de départ avec son orientation initiale. Il avance donc en ligne droite vers la droite et les deux carrés sont posés sur la même ligne de base.

- 3.a On souhaite désormais que la figure de base soit un triangle équilatéral. Quelle(s) modification(s) doit-on effectuer dans le bloc « figure de base » ?

Corrigé

Il faut modifier deux nombres dans le bloc : répéter 3 fois (au lieu de 4) et tourner de 120 degrés (au lieu de 90).

Pour comprendre en détail

L'angle de rotation est l'angle extérieur : $180 - 60 = 120$, et $3 \times 120 = 360$ (tour complet).

3.b *Quel est le rapport entre les aires des deux triangles obtenus ?*

Corrigé

Le second triangle a des côtés **2** fois plus longs : c'est un agrandissement de rapport **2**. Son aire est multipliée par $2^2 = 4$.

Le rapport entre les aires (grand sur petit) est **4**.

Pour comprendre en détail

Les aires sont multipliées par k^2 pour un agrandissement de rapport k . Vérification : $\frac{\sqrt{3}}{4} \times (2c)^2 = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} c^2$.

Exercice 5

- 1 Quels sont les résultats obtenus avec les programmes A et B lorsque l'on choisit -3 comme nombre initial ?

Corrigé

Programme A : $(-3)^2 = 9$, puis $9 - 4 \times (-3) = 9 + 12 = 21$.

Programme B : $-3 - 9 = -12$ et $-3 + 3 = 0$, puis $-12 \times 0 = 0$.

Résultats : **21** avec A, **0** avec B.

Pour comprendre en détail

Signes : $(-3)^2 = +9$ (pas -9) et soustraire -12 revient à ajouter **12**.

- 2 On note x le nombre initial choisi. Montrer que $x^2 - 6x - 27$ correspond à l'expression obtenue en appliquant le programme B.

Corrigé

Le programme B donne $(x - 9)(x + 3) = x^2 + 3x - 9x - 27 = x^2 - 6x - 27$.

Pour comprendre en détail

Contrôle avec $x = -3$: $9 + 18 - 27 = 0$ ✓ (même résultat que la question 1).

- 3 Quels sont le ou les nombres initiaux qui permettent d'obtenir le même résultat avec les deux programmes ? Justifier.

Corrigé

Programme A : $x^2 - 4x$. On résout $x^2 - 6x - 27 = x^2 - 4x$.

Les termes en x^2 s'annulent : $-6x - 27 = -4x$, donc $-27 = 2x$ et $x = -13,5$.

Le seul nombre initial qui convient est $-13,5$.

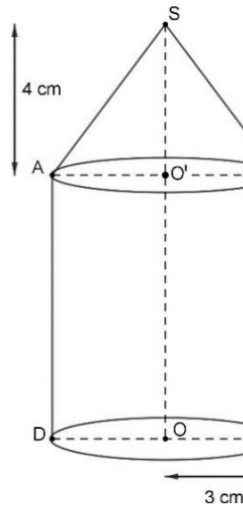
Pour comprendre en détail

Vérification : A : $(-13,5)^2 - 4 \times (-13,5) = 182,25 + 54 = 236,25$; B : $(-22,5) \times (-10,5) = 236,25$ ✓.

Attention au signe : le terme constant est -27 , pas $+27$; avec $+27$ on trouverait $x = 13,5$, qui ne convient pas : A donnerait $182,25 - 54 = 128,25$ et B $4,5 \times 16,5 = 74,25$.

Exercice 6

- 1 Déterminer le volume exact du cône en cm^3 .



Corrigé

$$V_{\text{cône}} = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 4 = 12\pi \text{ cm}^3.$$

- 2 Déterminer le volume exact du cylindre en cm^3 .

Corrigé

$$V_{\text{cylindre}} = \pi \times 3^2 \times 8 = 72\pi \text{ cm}^3.$$

- 3 Démontrer que la génératrice $[SA]$ du cône mesure 5 cm.

Corrigé

$[SO']$ est la hauteur du cône : (SO') est perpendiculaire au plan de la base, donc le triangle $SO'A$ est rectangle en O' .

D'après le théorème de Pythagore : $SA^2 = SO'^2 + O'A^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, donc $SA = 5$ cm.

Pour comprendre en détail

On reconnaît le triplet pythagoricien $(3; 4; 5)$.

4 Quelle quantité de stevia est nécessaire pour l'ensemble de la classe ? Arrondir le résultat au litre.

Corrigé

Volume d'un saupoudreur : $12\pi + 72\pi = 84\pi \approx 263,9 \text{ cm}^3$.

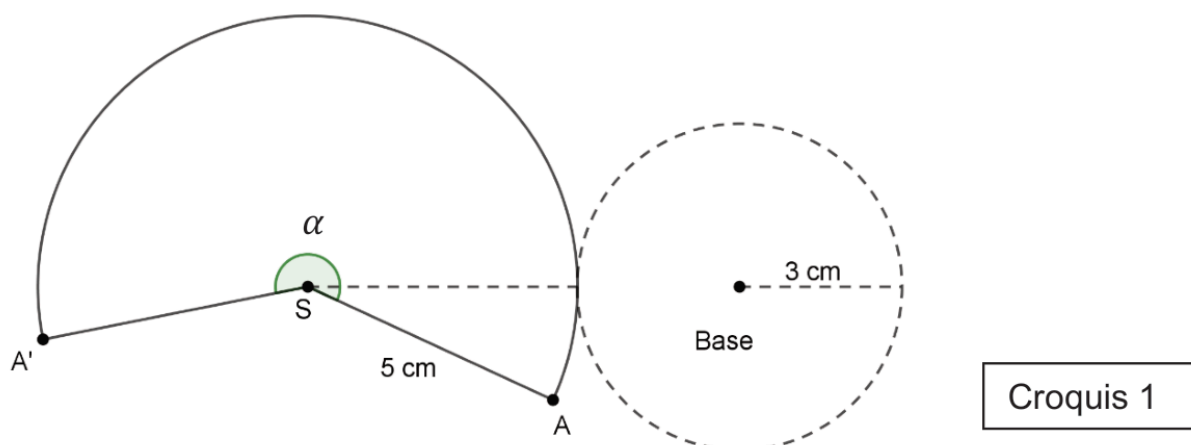
Pour 24 saupoudreurs : $24 \times 84\pi = 2016\pi \approx 6333,5 \text{ cm}^3$, soit 6,33 L (1 L = 1 000 cm^3).

Pour remplir tous les saupoudreurs, il faut au moins 6,33 L : on prévoit 7 L de stevia (arrondi au litre supérieur).

Pour comprendre en détail

Arrondi : l'arrondi au plus proche donnerait 6 L, ce qui ne suffit pas à remplir les 24 saupoudreurs (il manquerait environ 0,33 L). Pour une quantité à fournir, on arrondit vers le haut.

5.a Afin de réaliser un patron de cône, l'enseignant dessine le croquis ci-dessous (croquis 1) où α est l'angle au centre du cercle de centre S et de rayon 5 cm qui intercepte l'arc d'extrémités A et A'.



Déterminer la longueur de l'arc de cercle d'extrémités A et A'. Justifier la réponse.

Corrigé

Quand le patron est refermé, l'arc d'extrémités A et A' vient se superposer au cercle de base du cône, de rayon 3 cm.

Sa longueur est donc égale au périmètre de ce cercle : $2\pi \times 3 = 6\pi \text{ cm}$ ($\approx 18,85 \text{ cm}$).

5.b En déduire la mesure de l'angle α au degré près. On rappelle que la longueur de l'arc de cercle d'extrémités A et A' est proportionnelle à l'angle au centre α et on pourra s'aider du tableau ci-dessous :
angle $\alpha \rightarrow$ longueur de l'arc ; angle 360 $\rightarrow$ longueur de l'arc.

Corrigé

Angle au centre (°)	α	360
Longueur de l'arc (cm)	6π	$2\pi \times 3 = 6\pi$

$$\alpha = \frac{360 \times 6\pi}{10\pi} = \frac{360 \times 6}{10} = 216^\circ.$$

Pour comprendre en détail

Les π se simplifient : $\frac{\alpha}{360} = \frac{6}{10} = 0,6$. Le secteur représente **60 %** du disque de rayon **5** cm, car le cercle de base (rayon **3**) est $\frac{3}{5}$ du cercle de rayon **5**. En général, $\alpha = 360 \times \frac{r}{\text{génératrice}}$.

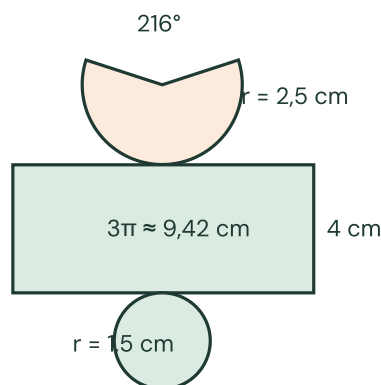
6 Construire, à l'échelle $\frac{1}{2}$, le patron du saupoudreur.

Corrigé

Le saupoudreur est un cylindre (sans couvercle : le cône le ferme) surmonté d'un cône.

Dimensions réelles, puis à l'échelle $\frac{1}{2}$:

Pièce	Dimensions réelles	À l'échelle $\frac{1}{2}$
Disque du fond	rayon 3 cm	rayon 1,5 cm
Rectangle (cylindre)	8 cm sur $6\pi \approx 18,85$ cm	4 cm sur $3\pi \approx 9,42$ cm
Secteur (cône)	rayon 5 cm, angle 216°	rayon 2,5 cm, angle 216°



Patron du saupoudreur à l'échelle $\frac{1}{2}$ (schéma)

Le rectangle se colle au disque du fond (sur son bord) ; l'arc de **3π** cm du secteur se superpose au bord supérieur du rectangle.

Pour comprendre en détail

À l'échelle $\frac{1}{2}$, les *angles* ne changent pas (**216°**) ; seules les longueurs sont divisées par **2**. La longueur de l'arc du secteur ($\frac{1}{2} \times 6\pi = 3\pi$) est bien égale à la longueur du rectangle.