Exercices sur les nombres complexes sous forme algébrique en maths expertes

CAMPUS XYZ

Exercice 1 — Calculer avec i ●○○

Écris chaque nombre sous forme algébrique $a + ib$.

a. $(2 + 3i) + (1 - 4i)$

b. $(2 + 3i)(1 - 4i)$

c. $(1 + i)^2$

d. i^{2026}

Exercice 2 — Écrire un quotient sous forme algébrique ●○○

Écris sous forme algébrique :

a. $\dfrac{3 + i}{1 - 2i}$

b. $\dfrac{1}{2 - i}$

c. $\dfrac{1 - i}{1 + i}$

Exercice 3 — Partie réelle, partie imaginaire ●○○

Donne la partie réelle et la partie imaginaire de $z = \dfrac{1+2i}{3-i}$ et de $w = (1-i)^3$.

Exercice 4 — Équations du premier degré ●○○

Résous dans $\mathbb{C}$:

a. $(1+i)z = 3 - i$

b. $2z + i = \overline{z} + 3$ (on posera $z = x + iy$)

Exercice 5 — Propriétés du conjugué ●●○

Soit $z = x + iy$, avec x et y réels.

a. Calcule $z + \overline{z}$, $z - \overline{z}$ et $z\overline{z}$.

b. Déduis-en que z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$, et imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.

c. Sans calcul, justifie que $Z = (2+i)^5 + (2-i)^5$ est un réel.

Exercice 6 — Quand z^2 est-il réel ? ●●○

Dans le plan complexe, on cherche les points M d'affixe $z = x + iy$ tels que z^2 soit réel, puis tels que z^2 soit imaginaire pur.

Exercice 7 — Les puissances de 1 + i ●●○

Calcule $(1+i)^2$, $(1+i)^4$, $(1+i)^5$ et $(1+i)^8$.

Exercice 8 — Une équation avec le conjugué ●●○

Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z + 2\overline{z} = 6 - 2i$.

Exercice 9 L'inverse d'un nombre complexe ●●○

Écris sous forme algébrique l'inverse de $1 + i\sqrt{3}$, puis celui de $z = a + ib$ (avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$).

Exercice 10 Un système d'équations ●●○

Résous le système $\begin{cases} z + w = 3 + i \\ z - w = 1 + 3i \end{cases}$ d'inconnues complexes z et w.

Exercice 11 Le nombre j ●●●

On pose $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

a. Calcule j^2 et compare-le à $\overline{j}$.

b. Montre que $j^3 = 1$ et que $1 + j + j^2 = 0$.

Exercice 12 Un quotient imaginaire pur ●●●

Pour $z \neq -1$, on pose $Z = \frac{z - 2i}{z + 1}$, et $z = x + iy$.

a. Montre que $\mathrm{Re}(Z) = \frac{x^2 + x + y^2 - 2y}{(x+1)^2 + y^2}$.

b. Déduis-en l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

Exercice 13 TYPE CONTRÔLE **Un carré dans le plan complexe** ●●●

On considère les points A, B, C d'affixes $z_A = 1 + i$, $z_B = 3 + 2i$ et $z_C = 3i$.

1. Calcule $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ sous forme algébrique.
2. Déduis-en que $AB = AC$ et que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
3. Détermine l'affixe de D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme. Quelle est la nature de $ABDC$?
4. Calcule l'affixe du centre Ω de $ABDC$ et la longueur AB.

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE **Les racines carrées d'un complexe** ●●●

On cherche les nombres complexes $z = x + iy$ tels que $z^2 = 3 + 4i$.

1. Montre que $x^2 - y^2 = 3$ et $xy = 2$.
2. En utilisant $|z|^2 = |z^2|$, montre que $x^2 + y^2 = 5$.
3. Déduis-en les deux solutions.
4. Avec la même méthode, résous $z^2 = -8 + 6i$.

Exercice 15 TYPE BAC Quatre affirmations sur les complexes ●●○

Pour chaque affirmation, indique si elle est vraie ou fausse, en justifiant.

1. $(1+i)^4 = -4$.
2. Le nombre $\dfrac{1-i}{1+i}$ est imaginaire pur.
3. L'équation $\overline{z} = 2z - 3i$ a pour unique solution $z = i$.
4. Pour tout complexe z non nul, $z + \dfrac{1}{z}$ est un réel.

Exercice 16 TYPE BAC **Un polynôme et un triangle** ●●●

On considère $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2$.

1. Vérifie que $P(1) = 0$ et montre que $P(z) = (z-1)\left(z^2 - 2z + 2\right)$.
2. Vérifie que $1 + i$ est solution de $z^2 - 2z + 2 = 0$. Justifie que $1 - i$ l'est aussi.
3. Déduis-en les solutions de $P(z) = 0$.
4. On note B et C les points d'affixes $1 + i$ et $1 - i$. Montre que le triangle OBC est rectangle isocèle.

CAMPUS XYZ

Corrigés

Exercices sur les nombres complexes sous forme algébrique en maths expertes

Exercices sur les nombres complexes sous forme algébrique en maths expertes : corrigés

CAMPUS XYZ

Exercice 1 — Calculer avec i ●○○

On calcule comme avec des réels, en remplaçant i^2 par -1.

a. $3 - i$

b. $2 - 8i + 3i - 12i^2 = \mathbf{14 - 5i}$

c. $1 + 2i + i^2 = \mathbf{2i}$

d. $i^4 = 1$ et $2026 = 4 \times 506 + 2$, donc $i^{2026} = i^2 = \mathbf{-1}$.

Exercice 2 — Écrire un quotient sous forme algébrique ●○○

On multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur : $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.

a. $\dfrac{(3+i)(1+2i)}{1+4} = \dfrac{3 + 6i + i - 2}{5} = \mathbf{\dfrac{1}{5} + \dfrac{7}{5}i}$

b. $\dfrac{2+i}{5} = \mathbf{\dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}i}$

c. $\dfrac{(1-i)^2}{2} = \dfrac{-2i}{2} = \mathbf{-i}$

Exercice 3 — Partie réelle, partie imaginaire ●○○

- $z = \dfrac{(1+2i)(3+i)}{10} = \dfrac{1+7i}{10}$: $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{10}, \mathrm{Im}(z) = \dfrac{7}{10}$.
- $(1-i)^2 = -2i$, donc $w = -2i(1-i) = -2i - 2$: $\mathrm{Re}(w) = -2, \mathrm{Im}(w) = -2$.

Exercice 4 — Équations du premier degré ●○○

a. $z = \dfrac{3-i}{1+i} = \dfrac{(3-i)(1-i)}{2} = \dfrac{2-4i}{2} = \mathbf{1 - 2i}$.

b. $2x + 2iy + i = x - iy + 3$. On identifie : $2x = x + 3$ et $2y + 1 = -y$, d'où $x = 3$, $y = -\dfrac{1}{3}$. $z = 3 - \dfrac{1}{3}i$.

> Dès qu'un $\overline{z}$ apparaît, on pose $z = x + iy$ et on identifie parties réelles et parties imaginaires.

Exercice 5 — Propriétés du conjugué ●●○

a. $z+\overline{z}=2x$, $z-\overline{z}=2iy$, $z\overline{z}=x^2+y^2$.

b. $\overline{z}=z \iff 2iy=0 \iff y=0$; $\overline{z}=-z \iff 2x=0 \iff x=0$.

c. $\overline{(2+i)^5}=(2-i)^5$: Z est de la forme $w+\overline{w}=2\,\mathrm{Re}(w)$, **c'est un réel**.

Exercice 6 — Quand z^2 est-il réel ? ●●○

$z^2=x^2-y^2+2ixy$.

- z^2 réel $\iff xy=0$: M **est sur l'un des deux axes**.
- z^2 imaginaire pur $\iff x^2=y^2 \iff y=x$ ou $y=-x$: M **est sur l'une des deux bissectrices**.

Exercice 7 — Les puissances de 1 + i ●●○

$(1+i)^2=2i$, $(1+i)^4=(2i)^2=-4$, $(1+i)^5=-4(1+i)=-4-4i$,
$(1+i)^8=(-4)^2=16$.

> On calcule de proche en proche à partir du carré : c'est beaucoup plus court que de développer.

Exercice 8 — Une équation avec le conjugué ●●○

Avec $z=x+iy$: $x+iy+2x-2iy=3x-iy=6-2i$. Donc $3x=6$ et $-y=-2$: $z=2+2i$.

Exercice 9 — L'inverse d'un nombre complexe ●●○

- $\dfrac{1}{1+i\sqrt{3}}=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{4}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}i$.
- $\dfrac{1}{a+ib}=\dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$.

Exercice 10 — Un système d'équations ●●○

En additionnant : $2z=4+4i$, donc $z=2+2i$; puis $w=3+i-z=1-i$.

Exercice 11 Le nombre j ●●●

a. $j^2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$: $j^2 = \overline{j}$.

b. $j^3 = j \times \overline{j} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \mathbf{1}$. $1 + j + j^2 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i = \mathbf{0}$.

Exercice 12 Un quotient imaginaire pur ●●●

a. On multiplie par le conjugué du dénominateur, $(x+1) - iy$. La partie réelle du numérateur $\big(x + i(y-2)\big)\big((x+1) - iy\big)$ vaut $x(x+1) + y(y-2) = x^2 + x + y^2 - 2y$.

b. $x^2 + x + y^2 - 2y = 0 \iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4}$: **cercle de centre** $\left(-\frac{1}{2}\,;1\right)$ **et de rayon** $\frac{\sqrt{5}}{2}$**, privé du point d'affixe** -1.

Exercice 13 TYPE CONTRÔLE Un carré dans le plan complexe ●●●

1. $\frac{-1+2i}{2+i} = \frac{(-1+2i)(2-i)}{5} = \frac{-2+i+4i+2}{5} = \boldsymbol{i}$.

2. $z_C - z_A = i\,(z_B - z_A)$: le vecteur $\overrightarrow{AC}$ s'obtient en tournant $\overrightarrow{AB}$ d'un quart de tour. $AB = AC$ **et** $(AB) \perp (AC)$.

3. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$: $z_D = z_B + z_C - z_A = \mathbf{2 + 4i}$. Parallélogramme avec un angle droit et deux côtés consécutifs égaux : $ABDC$ **est un carré**.

4. $z_\Omega = \frac{z_A + z_D}{2} = \mathbf{\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i}$; $AB = |2+i| = \sqrt{\mathbf{5}}$.

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE Les racines carrées d'un complexe ●●●

1. $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = 3 + 4i$: on identifie, $x^2 - y^2 = 3$ **et** $2xy = 4$.

2. $|z^2| = |3+4i| = 5$ et $|z|^2 = x^2 + y^2$: $x^2 + y^2 = 5$.

3. En additionnant et soustrayant : $x^2 = 4$, $y^2 = 1$, et $xy > 0$: $z = 2 + i$ **ou** $z = -2 - i$.

4. $x^2 - y^2 = -8$, $xy = 3$, $x^2 + y^2 = 10$: $x^2 = 1$, $y^2 = 9$, même signe : $z = 1 + 3i$ **ou** $z = -1 - 3i$.

Exercice 15 — TYPE BAC — Quatre affirmations sur les complexes ●●○

1. **Vrai** : $(1+i)^2 = 2i$, donc $(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$.
2. **Vrai** : il vaut $-i$.
3. **Vrai** : avec $z = x+iy$, $x - iy = 2x + 2iy - 3i$ donne $x = 0$ et $3y = 3$, soit $z = i$, et c'est la seule solution.
4. **Faux** : pour $z = 2i$, $z + \dfrac{1}{z} = 2i - \dfrac{i}{2} = \dfrac{3}{2}i$.

> Pour montrer qu'une affirmation générale est fausse, un seul contre-exemple suffit.

Exercice 16 — TYPE BAC — Un polynôme et un triangle ●●●

1. $P(1) = 1 - 3 + 4 - 2 = 0$. En développant :
   $(z-1)\left(z^2 - 2z + 2\right) = z^3 - 2z^2 + 2z - z^2 + 2z - 2 = P(z)$.
2. $(1+i)^2 - 2(1+i) + 2 = 2i - 2 - 2i + 2 = 0$. Les coefficients sont réels : en conjuguant, $\overline{1+i} = 1 - i$ est aussi solution.
3. $S = \{1\,;1+i\,;1-i\}$.
4. $OB = OC = \sqrt{2}$ et $BC = |2i| = 2$. $OB^2 + OC^2 = 4 = BC^2$: OBC **est rectangle isocèle en** O.

LES FICHES MAGIQUES TERMINALE SPÉ MATHS

Révise la spé maths de terminale avec les fiches magiques



- **41 fiches claires et illustrées** : tout le programme de spécialité maths de terminale, une notion par page.
- **Des vidéos méthode** accessibles par QR code sur les fiches.
- **Des exercices corrigés** après chaque fiche pour vérifier que tout est acquis.

campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

ANNALES BAC MATHS TERMINALE 2027

Prépare le bac avec les vrais sujets



- **75 sujets types** tirés des vrais sujets du bac, classés par chapitre.
- **3 bacs blancs complets** pour s'entraîner en conditions réelles.
- Des **corrigés avec la rédaction attendue**, des conseils et un aide-mémoire.

campusxyz.fr/produit/annales-bac-2027-terminale-spe-maths