Exercices sur le module, l'argument et la forme exponentielle en maths expertes

CAMPUS XYZ

Exercice 1 — Module et argument ●○○

Donne le module et un argument de chaque nombre, puis sa forme exponentielle.

a. $z_1 = 1 + i$

b. $z_2 = -2i$

c. $z_3 = -\sqrt{3} + i$

d. $z_4 = -5$

Exercice 2 — De la forme exponentielle à la forme algébrique ●○○

Écris sous forme algébrique :

a. $2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$

b. $3\,\mathrm{e}^{i\pi}$

c. $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$

d. $4\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}}$

Exercice 3 — Produits, quotients, puissances ●○○

On pose $z = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$ et $w = 3\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$. Écris sous forme exponentielle zw, $\dfrac{z}{w}$ et z^3, puis donne zw et z^3 sous forme algébrique.

Exercice 4 — Distances et cercles ●○○

a. Calcule la distance AB, où A et B ont pour affixes $1 + 2i$ et $4 - 2i$.

b. Décris l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 1| = 2$.

Exercice 5 De grandes puissances ●●○

Calcule $(1+i)^{20}$ et $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{6}$ en passant par la forme exponentielle.

Exercice 6 Deux ensembles de points ●●○

Décris l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

a. $|z-2i| = |z+1|$;

b. $z \neq 0$ et $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4}$ (à 2π près).

Exercice 7 Linéariser avec Euler ●●○

À l'aide de $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, montre que :

a. $\cos^2\theta = \dfrac{1 + \cos(2\theta)}{2}$;

b. $\cos^3\theta = \dfrac{\cos(3\theta) + 3\cos\theta}{4}$.

Exercice 8 La formule de Moivre ●●○

À partir de $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$:

a. retrouve les formules de $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$;

b. montre que $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

Exercice 9 — Calculer cos(π/12) ●●○

On pose $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$.

a. Écris z sous forme algébrique.

b. Écris z sous forme exponentielle.

c. Déduis-en la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 10 — Construire un triangle équilatéral ●●○

A et B ont pour affixes 0 et 2. Le point C vérifie $z_C - z_A = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$.

Calcule z_C et justifie que ABC est équilatéral.

Exercice 11 Une suite de nombres complexes ●●●

On pose $z_0 = 4$ et $z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} z_n$ pour tout entier n.

a. Écris $\dfrac{1+i}{2}$ sous forme exponentielle.

b. Exprime z_n sous forme exponentielle en fonction de n.

c. Détermine la limite de $|z_n|$. Pour quelles valeurs de n le nombre z_n est-il un réel positif ?

Exercice 12 La technique de l'angle moitié ●●●

Soit $\theta \in]-\pi\,;\pi[$.

a. Montre que $1 + \mathrm{e}^{i\theta} = 2\cos\dfrac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$.

b. Déduis-en le module et un argument de $1 + \mathrm{e}^{i\theta}$.

Exercice 13 TYPE CONTRÔLE **Trois points sur un cercle** ●●●

On considère $z_A = 2$, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$, $z_C = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_D = -2$.

1. Écris z_B et z_C sous forme exponentielle. Justifie que A, B, C, D sont sur un même cercle de centre O.
2. Calcule AB, AC et BC. Quelle est la nature du triangle ABC ?
3. Calcule z_B^3 et z_C^3. Déduis-en trois solutions de l'équation $z^3 = -8$.
4. Montre que BDC est équilatéral.

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE Quand une puissance est-elle réelle ? ●●●

On pose $z = 1 + i$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$, $Z_n = z^n$.

1. Écris Z_n sous forme exponentielle.
2. Pour quelles valeurs de n le nombre Z_n est-il réel ? réel positif ? imaginaire pur ?
3. Calcule Z_{12}.
4. Détermine le plus petit entier n tel que $|Z_n| > 1\,000$.

Exercice 15 TYPE BAC **Une spirale de points** ●●●

On définit $z_0 = 8$ et $z_{n+1} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{4} z_n$. On note M_n le point d'affixe z_n et $r_n = |z_n|$.

1. Écris $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}$ sous forme exponentielle.
2. Montre que (r_n) est géométrique et exprime r_n en fonction de n.
3. Donne un argument de z_n. Pour quelles valeurs de n le point M_n est-il sur l'axe des réels ?
4. À partir de quel rang M_n est-il dans le disque de centre O et de rayon $0{,}01$?

Exercice 16 TYPE BAC Vrai ou faux sur la forme exponentielle ●●●

Pour chaque affirmation, indique si elle est vraie ou fausse, en justifiant.

1. $\mathrm{e}^{i\pi} + 1 = 0$.
2. Pour tout réel θ, $\left|\mathrm{e}^{i\theta} - 1\right| = 2\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|$.
3. Si $|z| = 1$, alors $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$.
4. $(1-i)^{2026}$ est un nombre réel.

CAMPUS XYZ

Corrigés

Exercices sur le module, l'argument et la forme exponentielle en maths expertes

Exercices sur le module, l'argument et la forme exponentielle en maths expertes : corrigés

CAMPUS XYZ

Exercice 1 Module et argument ●○○

$|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$, et θ vérifie $\cos\theta = \dfrac{a}{|z|}$, $\sin\theta = \dfrac{b}{|z|}$.

a. $|z_1| = \sqrt{2}$, $\cos\theta = \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$: $z_1 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$.

b. $z_2 = 2\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$.

c. $|z_3| = 2$, $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$: $z_3 = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}}$.

d. $z_4 = 5\,\mathrm{e}^{i\pi}$.

Exercice 2 De la forme exponentielle à la forme algébrique ●○○

$r\,\mathrm{e}^{i\theta} = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$.

a. $1 + i\sqrt{3}$

b. -3

c. $1 - i$

d. $-2\sqrt{3} + 2i$

Exercice 3 Produits, quotients, puissances ●○○

On multiplie les modules et on ajoute les arguments.

- $zw = 6\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = 6i$.
- $\dfrac{z}{w} = \dfrac{2}{3}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}$.
- $z^3 = 8\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = 8i$.

Exercice 4 Distances et cercles ●○○

a. $AB = |z_B - z_A| = |3 - 4i| = \sqrt{9+16} = \mathbf{5}$.

b. $|z-1|$ est la distance de M au point d'affixe 1 : **cercle de centre** $(1\,;0)$ **et de rayon** 2.

Exercice 5 De grandes puissances ●●○

- $(1+i)^{20} = \left(\sqrt{2}\right)^{20} \mathrm{e}^{i\frac{20\pi}{4}} = 2^{10}\,\mathrm{e}^{5i\pi} = \mathbf{-1\,024}$.
- $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{6} = \left(2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{6} = 64\,\mathrm{e}^{2i\pi} = \mathbf{64}$.

Exercice 6 Deux ensembles de points ●●○

a. M est à égale distance de $A(2i)$ et $B(-1)$: **la médiatrice de** $[AB]$.

b. **La demi-droite d'origine** O **(exclue) dirigée par** $\vec{u}+\vec{v}$, c'est-à-dire les points $(t\,;t)$ avec $t>0$.

Exercice 7 Linéariser avec Euler ●●○

a. $\cos^2\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{2i\theta}+2+\mathrm{e}^{-2i\theta}}{4} = \dfrac{2\cos(2\theta)+2}{4}$.

b. $\cos^3\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{3i\theta}+3\mathrm{e}^{i\theta}+3\mathrm{e}^{-i\theta}+\mathrm{e}^{-3i\theta}}{8} = \dfrac{2\cos(3\theta)+6\cos\theta}{8}$.

> Linéariser sert à trouver des primitives : $\cos^2$ n'a pas de primitive évidente, $\dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$ si.

Exercice 8 La formule de Moivre ●●○

a. $(\cos\theta+i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta-\sin^2\theta+2i\sin\theta\cos\theta$: $\cos(2\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta$ **et** $\sin(2\theta)=2\sin\theta\cos\theta$.

b. La partie réelle de $(c+is)^3$ vaut $c^3-3cs^2 = c^3-3c\left(1-c^2\right) = 4c^3-3c$, avec $c=\cos\theta$, $s=\sin\theta$.

Exercice 9 Calculer cos(π/12) ●●○

a. $z = \dfrac{(1+i)\left(\sqrt{3}-i\right)}{4} = \dfrac{\boldsymbol{\sqrt{3}+1}}{\boldsymbol{4}} + \dfrac{\boldsymbol{\sqrt{3}-1}}{\boldsymbol{4}}\boldsymbol{i}$.

b. $z = \dfrac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}}{2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}} = \dfrac{\boldsymbol{\sqrt{2}}}{\boldsymbol{2}}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{i}\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{12}}}$.

c. En identifiant les parties réelles : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$, donc $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 10 — Construire un triangle équilatéral ●●○

$z_C = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}$. $AC = |z_C| = 2 = AB$ et l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ vaut $\dfrac{\pi}{3}$: un triangle isocèle avec un angle de 60° au sommet est **équilatéral**.

Exercice 11 — Une suite de nombres complexes ●●●

a. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$.

b. Suite géométrique : $z_n = 4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{4}}$.

c. $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$, donc $|z_n| \to 0$: les points tournent en spirale vers O. z_n réel positif

$\iff \dfrac{n\pi}{4} = 2k\pi \iff$ **n multiple de 8.**

Exercice 12 — La technique de l'angle moitié ●●●

a. On factorise par $\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$: $1 + \mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}} + \mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\dfrac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$ (Euler).

b. Pour $\theta \in]-\pi\,;\pi[$, $\cos\dfrac{\theta}{2} > 0$: **module $2\cos\dfrac{\theta}{2}$, argument $\dfrac{\theta}{2}$.**

Exercice 13 — TYPE CONTRÔLE — Trois points sur un cercle ●●●

1. $z_B = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_C = 2\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$. Les quatre affixes ont pour module 2 : **cercle de centre O et de rayon 2.**

2. $AB = \left|-1 + i\sqrt{3}\right| = 2$, $AC = 2$, $BC = \left|2i\sqrt{3}\right| = 2\sqrt{3}$: **ABC est isocèle en A.**

3. $z_B^3 = 8\,\mathrm{e}^{i\pi} = -8$ et $z_C^3 = 8\,\mathrm{e}^{-i\pi} = -8$. Avec $(-2)^3 = -8$: **-2, $1 + i\sqrt{3}$ et $1 - i\sqrt{3}$ sont solutions.**

4. $DB = \left|3 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, de même $DC = 2\sqrt{3}$, et $BC = 2\sqrt{3}$: **équilatéral.**

Exercice 14 — TYPE CONTRÔLE — Quand une puissance est-elle réelle ? ●●●

1. $Z_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{4}}$.

2. Réel $\iff \dfrac{n\pi}{4} = k\pi \iff$ n **multiple de** 4. Réel positif $\iff$ n **multiple de** 8. Imaginaire pur $\iff \dfrac{n\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \iff n = 4k+2$.

3. $Z_{12} = 2^6\,\mathrm{e}^{3i\pi} = \mathbf{-64}$.

4. $2^{\frac{n}{2}} > 1\,000 \iff \dfrac{n}{2}\ln 2 > \ln 1\,000 \iff n > \dfrac{2\ln 1\,000}{\ln 2} \approx 19{,}9$: $n = 20$.

Exercice 15 — TYPE BAC — Une spirale de points ●●●

1. $\left|\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}\right| = \dfrac{2}{4} : \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$.

2. $r_{n+1} = \dfrac{1}{2}r_n$: géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, $r_n = 8 \times 0{,}5^n$.

3. $\arg(z_n) = \dfrac{n\pi}{3}$; M_n est sur l'axe des réels $\iff \dfrac{n\pi}{3} = k\pi \iff$ n **multiple de** 3.

4. $8 \times 0{,}5^n < 0{,}01 \iff 0{,}5^n < \dfrac{1}{800} \iff n > \dfrac{\ln 800}{\ln 2} \approx 9{,}6$: **à partir de** $n = 10$.

Exercice 16 — TYPE BAC — Vrai ou faux sur la forme exponentielle ●●●

1. **Vrai** : $\mathrm{e}^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$.

2. **Vrai** : $\mathrm{e}^{i\theta} - 1 = \mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = \mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} \times 2i\sin\dfrac{\theta}{2}$, de module $2\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|$.

3. **Vrai** : $z\overline{z} = |z|^2 = 1$.

4. **Faux** : $(1-i)^{2026} = 2^{1013}\,\mathrm{e}^{-i\frac{2026\pi}{4}}$ et $\dfrac{2026\pi}{4} = 506\pi + \dfrac{\pi}{2}$: c'est $-2^{1013}\,i$, un imaginaire pur.

LES FICHES MAGIQUES TERMINALE SPÉ MATHS

Révise la spé maths de terminale avec les fiches magiques



- **41 fiches claires et illustrées** : tout le programme de spécialité maths de terminale, une notion par page.
- **Des vidéos méthode** accessibles par QR code sur les fiches.
- **Des exercices corrigés** après chaque fiche pour vérifier que tout est acquis.

campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

ANNALES BAC MATHS TERMINALE 2027

Prépare le bac avec les vrais sujets



- **75 sujets types** tirés des vrais sujets du bac, classés par chapitre.
- **3 bacs blancs complets** pour s'entraîner en conditions réelles.
- Des **corrigés avec la rédaction attendue**, des conseils et un aide-mémoire.

campusxyz.fr/produit/annales-bac-2027-terminale-spe-maths