Exercices sur la divisibilité et les congruences en maths expertes

CAMPUS XYZ

Exercice 1 — Divisions euclidiennes ●○○

Effectue la division euclidienne de $2\,026$ par 7, puis celle de -17 par 5.

Exercice 2 — Les diviseurs de 60 ●○○

Donne la liste des diviseurs positifs de 60, puis celle de ses diviseurs dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 3 — Calculer avec les congruences ●○○

Détermine le reste de la division par 7 de $2\,026$, de 100, de $2\,026 + 100$ et de $2\,026 \times 100$.

Exercice 4 — Le critère de divisibilité par 9 ●○○

a. Montre que $10^k \equiv 1\ [9]$ pour tout entier $k \geqslant 0$.

b. Déduis-en qu'un entier est congru à la somme de ses chiffres modulo 9.

c. $123\,456\,789$ est-il divisible par 9 ?

Exercice 5 — Le reste de 2^{2026} modulo 7 ●●○

Calcule 2^3 modulo 7, puis détermine le reste de la division de 2^{2026} par 7.

Exercice 6 — Le dernier chiffre de 7^{2026} ●●○

Calcule les restes de 7^1, 7^2, 7^3, 7^4 modulo 10, puis donne le chiffre des unités de 7^{2026}.

Exercice 7 Résoudre une congruence ●●○

Résous dans $\mathbb{Z}$ l'équation $3x \equiv 2\ [7]$.

Exercice 8 Un tableau de congruences ●●○

Pour quels entiers n le nombre $n^2 + n$ est-il divisible par 3 ? (On étudiera les restes de n modulo 3.)

Exercice 9 — Quand n + 1 divise 2n + 7 ●●○

Détermine les entiers relatifs n tels que $n+1$ divise $2n+7$.

Exercice 10 — Une divisibilité par 7 ●●○

Montre que, pour tout entier naturel n, $3^{2n+1}+2^{n+2}$ est divisible par 7.

Exercice 11 — Pas une somme de deux carrés ●●●

a. Quels sont les restes possibles d'un carré modulo 4 ?

b. Déduis-en qu'un entier congru à 3 modulo 4 n'est jamais la somme de deux carrés.

c. Applique à $2\,027$.

Exercice 12 — Toujours divisible ? ●●●

a. Montre que $4^n + 2$ est divisible par 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Montre que $2^{3n} - 1$ est divisible par 7 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. L'entier $n^3 - n$ est-il toujours divisible par 6 ?

Exercice 13 TYPE CONTRÔLE **La clé d'un code ISBN** ●●●

Un ISBN-13 est formé de 13 chiffres $a_1 a_2 \square a_{13}$. Le dernier est une clé, choisie pour que $S = a_1 + 3a_2 + a_3 + 3a_4 + \cdots + 3a_{12} + a_{13} \equiv 0\ [10]$ (coefficients 1 et 3 en alternance).

1. Calcule la clé de l'ISBN qui commence par 978207036822.
2. On se trompe sur un chiffre affecté du coefficient 3 : on écrit b au lieu de a. Montre que l'erreur est détectée.
3. Même question pour un chiffre de coefficient 1.
4. On échange deux chiffres voisins a et b. Montre que l'erreur n'est pas détectée si et seulement si $a - b \equiv 0\ [5]$. Donne un exemple.

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE **Quel jour de la semaine ?** ●●●

Le 20 novembre 2026 est un vendredi.

1. Justifie que $365 \equiv 1\ [7]$ et $366 \equiv 2\ [7]$.
2. Quel jour de la semaine sera le 20 novembre 2027 ? Et le 20 novembre 2028 (2028 est bissextile) ?
3. Quel jour de la semaine sera-t-il $1\,000$ jours après le 20 novembre 2026 ?
4. En numérotant les jours de 0 (lundi) à 6 (dimanche), écris une fonction Python qui renvoie le numéro du jour n jours après un vendredi.

Exercice 15 TYPE BAC **Divisibilité par 11** ●●○

1. Montre que $10 \equiv -1\ [11]$, puis que $10^k \equiv (-1)^k\ [11]$.
2. Déduis-en un critère de divisibilité par 11 utilisant les chiffres d'un nombre.
3. $918\,082$ est-il divisible par 11 ?
4. Montre que $3^5 \equiv 1\ [11]$ et détermine le reste de 3^{2026} modulo 11.

Exercice 16 TYPE BAC Une suite d'entiers et des restes ●●●

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 10u_n + 21$.

1. Calcule u_1, u_2 et u_3.
2. Démontre par récurrence que $3u_n = 10^{n+1} - 7$ pour tout n.
3. Montre que u_n n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.
4. Détermine le reste de u_n dans la division par 4, pour $n \geqslant 1$.

CAMPUS XYZ

Corrigés

Exercices sur la divisibilité et les congruences en maths expertes

Exercices sur la divisibilité et les congruences en maths expertes : corrigés

CAMPUS XYZ

Exercice 1 — Divisions euclidiennes ●○○

- $2\,026 = 7 \times 289 + 3$: quotient 289, reste 3.
- $-17 = 5 \times (-4) + 3$: quotient -4, reste 3 (le reste doit vérifier $0 \leqslant r < 5$).

> Avec un dividende négatif, on prend le quotient « en dessous » pour que le reste reste positif.

Exercice 2 — Les diviseurs de 60 ●○○

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60$ (12 diviseurs positifs, groupés par paires 1×60, 2×30…). Dans $\mathbb{Z}$: ces 12 nombres et leurs opposés, soit 24 diviseurs.

Exercice 3 — Calculer avec les congruences ●○○

$2\,026 \equiv 3\ [7]$ et $100 = 98 + 2 \equiv 2\ [7]$. Donc $2\,126 \equiv 5\ [7]$ et $202\,600 \equiv 6\ [7]$. **Restes : 3 ; 2 ; 5 ; 6.**

> Si $a \equiv b\ [n]$ et $c \equiv d\ [n]$, alors $a + c \equiv b + d$, $ac \equiv bd$ et $a^k \equiv b^k\ [n]$: on peut remplacer un nombre par son reste.

Exercice 4 — Le critère de divisibilité par 9 ●○○

a. $10 \equiv 1\ [9]$, donc $10^k \equiv 1^k = 1\ [9]$.

b. $N = \sum a_k 10^k \equiv \sum a_k\ [9]$.

c. La somme des chiffres vaut 45, divisible par 9 : **oui**.

Exercice 5 — Le reste de 2^{2026} modulo 7 ●●○

$2^3 = 8 \equiv 1\ [7]$. Or $2\,026 = 3 \times 675 + 1$, donc $2^{2026} = \left(2^3\right)^{675} \times 2 \equiv 1 \times 2\ [7]$. **Le reste est 2.**

> On cherche la plus petite puissance congrue à 1, puis on fait la division euclidienne de l'exposant.

Exercice 6 — Le dernier chiffre de 7^{2026} ●●○

$7, 49 \equiv 9, 63 \equiv 3, 21 \equiv 1\ [10]$. $2\,026 = 4 \times 506 + 2$, donc $7^{2026} \equiv 7^2 \equiv 9\ [10]$. **Le chiffre des unités est 9.**

Exercice 7 — Résoudre une congruence ●●○

$3 \times 5 = 15 \equiv 1\ [7]$: 5 est un inverse de 3 modulo 7. On multiplie par 5 : $x \equiv 10 \equiv 3\ [7]$. **Les solutions sont les** $x = 3 + 7k, k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 8 — Un tableau de congruences ●●○

$n \equiv$	0	1	2
$n^2 + n \equiv$	0	2	$6 \equiv 0$

$n^2 + n$ **est divisible par** 3 **si et seulement si** $n \equiv 0$ **ou** $n \equiv 2\ [3]$.

Exercice 9 — Quand n + 1 divise 2n + 7 ●●○

$2n + 7 = 2(n + 1) + 5$. Si $n + 1$ divise $2n + 7$ et $2(n + 1)$, il divise leur différence 5. Donc $n + 1 \in \{-5\,;-1\,;1\,;5\}$. Réciproquement, ces valeurs conviennent : $n \in \{-6\,;-2\,;0\,;4\}$.

Exercice 10 — Une divisibilité par 7 ●●○

$3^{2n+1} = 3 \times 9^n$ et $9 \equiv 2\ [7]$, donc $3^{2n+1} \equiv 3 \times 2^n\ [7]$. De plus $2^{n+2} = 4 \times 2^n$. La somme est congrue à $7 \times 2^n \equiv 0\ [7]$: **elle est divisible par** 7.

Exercice 11 — Pas une somme de deux carrés ●●●

a. $n \equiv 0, 1, 2, 3$ donne $n^2 \equiv 0, 1, 0, 1\ [4]$: 0 **ou** 1.

b. $x^2 + y^2 \equiv 0$, 1 ou $2\ [4]$, jamais 3.

c. $2\,027 = 4 \times 506 + 3$: $2\,027$ **n'est pas une somme de deux carrés**.

Exercice 12 — Toujours divisible ? ●●●

a. $4 \equiv 1\ [3]$, donc $4^n + 2 \equiv 1 + 2 \equiv 0\ [3]$.

b. $2^3 = 8 \equiv 1\ [7]$, donc $2^{3n} - 1 \equiv 1 - 1 = 0\ [7]$.

c. **Oui** : $n^3 - n = (n - 1)n(n + 1)$ est le produit de trois entiers consécutifs ; l'un est pair et l'un est multiple de 3.

Exercice 13 — TYPE CONTRÔLE — La clé d'un code ISBN ●●●

1. $9+21+8+6+0+21+0+9+6+24+2+6=112\equiv 2\ [10]$: il faut ajouter 8. **La clé est** 8.
2. S change de $3(b-a)$, avec $0<|b-a|\leqslant 9$. $3(b-a)\equiv 0\ [10]$ imposerait $10\mid b-a$ (3 et 10 sont premiers entre eux) : impossible. **L'erreur est détectée**.
3. S change de $b-a$, non multiple de 10 : **détectée**.
4. La somme change de $(3a+b)-(a+3b)=2(a-b)$, multiple de 10 si et seulement si $a-b\equiv 0\ [5]$. Exemple : échanger 1 **et** 6 passe inaperçu.

Exercice 14 — TYPE CONTRÔLE — Quel jour de la semaine ? ●●●

1. $365=7\times 52+1$ et $366=7\times 52+2$.
2. 365 jours plus tard, on avance d'un jour : **samedi 20 novembre 2027**. Puis 366 jours (le 29 février 2028 est dans l'intervalle) : **lundi 20 novembre 2028**.
3. $1\,000=7\times 142+6$: on avance de 6 jours, **un jeudi**.
4. Vendredi a le numéro 4 :

```
def jour(n):
    return (4 + n) % 7
```

`jour(1000)` renvoie 3 : jeudi.

Exercice 15 — TYPE BAC — Divisibilité par 11 ●●○

1. $10=11-1$, puis on élève à la puissance k.
2. $N=\sum a_k 10^k\equiv a_0-a_1+a_2-a_3+\square\ [11]$: **N est divisible par 11 si et seulement si la somme alternée de ses chiffres (en partant des unités) l'est**.
3. $2-8+0-8+1-9=-22$, divisible par 11 : **oui** ($918\,082=11\times 83\,462$).
4. $3^5=243=22\times 11+1$. $2\,026=5\times 405+1$, donc $3^{2026}\equiv 3\ [11]$.

Exercice 16 TYPE BAC Une suite d'entiers et des restes ●●●

1. $u_1 = 31, u_2 = 331, u_3 = 3\,331$.
2. $3u_0 = 3 = 10 - 7$. Si $3u_n = 10^{n+1} - 7$, alors
   $3u_{n+1} = 10 \times 3u_n + 63 = 10^{n+2} - 70 + 63 = 10^{n+2} - 7$.
3. u_n s'écrit avec des 3 et un 1 final ($u_n = 33\ldots31$) : il est impair et ne finit ni par 0 ni par 5. La somme de ses chiffres vaut $3n + 1 \equiv 1\ [3]$: **non divisible par 3**.
4. Pour $n \geqslant 1$, u_n se termine par 31 et $100 \equiv 0\ [4]$: $u_n \equiv 31 \equiv 3\ [4]$. **Le reste est 3.**

> Les u_n semblent tous premiers ($31, 331, 3\,331$…) mais $u_8 = 333\,333\,331 = 17 \times 19\,607\,843$: une conjecture se démontre, elle ne se vérifie pas sur quelques cas.

LES FICHES MAGIQUES TERMINALE SPÉ MATHS

Révise la spé maths de terminale avec les fiches magiques



- **41 fiches claires et illustrées** : tout le programme de spécialité maths de terminale, une notion par page.
- **Des vidéos méthode** accessibles par QR code sur les fiches.
- **Des exercices corrigés** après chaque fiche pour vérifier que tout est acquis.

campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

ANNALES BAC MATHS TERMINALE 2027

Prépare le bac avec les vrais sujets



- **75 sujets types** tirés des vrais sujets du bac, classés par chapitre.
- **3 bacs blancs complets** pour s'entraîner en conditions réelles.
- Des **corrigés avec la rédaction attendue**, des conseils et un aide-mémoire.

campusxyz.fr/produit/annales-bac-2027-terminale-spe-maths