Exercices sur les équations polynomiales en maths expertes

CAMPUS XYZ

Exercice 1 — Second degré à discriminant négatif ●○○

Résous dans $\mathbb{C}$:

a. $z^2 + 4 = 0$ **b.** $z^2 - 2z + 5 = 0$ **c.** $z^2 + z + 1 = 0$

Exercice 2 — Somme et produit des racines ●○○

Résous $z^2 - 6z + 13 = 0$, puis vérifie que la somme des solutions vaut 6 et leur produit 13.

Exercice 3 Factoriser $z^3 - 8$ ●○○

a. Vérifie que $z^3 - 8 = (z - 2)\left(z^2 + 2z + 4\right)$.

b. Résous $z^3 = 8$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 4 Retrouver l'équation ●○○

Donne une équation du second degré à coefficients réels dont les solutions sont $2 + i$ et $2 - i$.

Exercice 5 — Un polynôme à coefficients complexes ●●○

Soit $P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i$.

a. Montre que i est une racine de P.

b. Vérifie que $P(z) = (z-i)\left(z^2 - 4z + 13\right)$.

c. Résous $P(z) = 0$.

Exercice 6 — Les racines de l'unité ●●○

a. Résous $z^4 = 1$ dans $\mathbb{C}$.

b. Écris les solutions de $z^3 = 1$ sous forme exponentielle, puis calcule leur somme.

Exercice 7 — Résoudre $z^4 = 16$ et $z^6 = 1$ ●●○

Résous dans $\mathbb{C}$ les équations $z^4 = 16$ et $z^6 = 1$ (forme exponentielle pour la seconde).

Exercice 8 — Une équation bicarrée ●●○

Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$.

Exercice 9 — Coefficients réels et conjugué ●●○

Soit $P(z) = z^3 - 3z^2 + 7z - 5$, à coefficients réels.

a. Montre que si $P(a) = 0$, alors $P\left(\overline{a}\right) = 0$.

b. Trouve une racine réelle évidente, factorise P, puis résous $P(z) = 0$.

Exercice 10 — Factoriser $z^n - 1$ ●●○

a. Montre que $z^n - 1 = (z-1)\left(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}\right)$.

b. Déduis-en que si $\omega \neq 1$ vérifie $\omega^n = 1$, alors $1 + \omega + \cdots + \omega^{n-1} = 0$.

Exercice 11 Le cosinus de 2π/5 ●●●

On pose $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}$, $c = \omega + \omega^4$ et $c' = \omega^2 + \omega^3$.

a. Montre que $c = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $c' = 2\cos\dfrac{4\pi}{5}$.

b. Montre que $c + c' = -1$ et $cc' = -1$.

c. Déduis-en que $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Exercice 12 Des racines sur un cercle ●●●

Soit m un réel tel que $-2 < m < 2$. On considère l'équation $z^2 - 2mz + 4 = 0$.

a. Résous cette équation.

b. Montre que les points images des solutions sont sur un cercle qui ne dépend pas de m.

Exercice 13 TYPE CONTRÔLE **Un polynôme de degré 4** ●●●

Soit $P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 4z + 8$.

1. Calcule $P(i)$. Déduis-en une autre racine de P.
2. Détermine les réels a et b tels que $P(z) = \left(z^2 + 1\right)\left(z^2 + az + b\right)$.
3. Résous $P(z) = 0$.
4. On note A, B, C, D les points d'affixes i, $-i$, $2 + 2i$, $2 - 2i$. Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$?

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE **Les racines cubiques de 8i** ●●●

1. Écris $8i$ sous forme exponentielle.
2. On cherche $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ tel que $z^3 = 8i$. Montre que $r = 2$ et $\theta = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. Donne les trois solutions sous forme algébrique.
4. Montre que leurs points images forment un triangle équilatéral et calcule son aire.

Exercice 15 TYPE BAC **Racines et triangle rectangle** ●●○

Soit $P(z) = z^3 - 2z^2 + 4z - 8$.

1. Calcule $P(2)$ et factorise $P(z)$.
2. Résous $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.
3. On note A, B, C les points d'affixes 2, $2i$, $-2i$. Montre que ABC est rectangle isocèle en A.
4. Détermine le centre et le rayon du cercle circonscrit à ABC.

Exercice 16 TYPE BAC **Une équation avec cos θ** ●●●

Soit $\theta \in]0\,;\pi[$. On considère l'équation $(E) : z^2 - 2\cos\theta\, z + 1 = 0$.

1. Calcule le discriminant et montre que les solutions sont $\mathrm{e}^{i\theta}$ et $\mathrm{e}^{-i\theta}$.
2. Vérifie le résultat avec la somme et le produit des solutions.
3. Soit z une solution. Montre que $z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos(n\theta)$ pour tout entier n.
4. Résous (E) pour $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ et vérifie que les solutions sont racines sixièmes de l'unité.

CAMPUS XYZ

Corrigés

Exercices sur les équations polynomiales en maths expertes

Exercices sur les équations polynomiales en maths expertes : corrigés

CAMPUS XYZ

Exercice 1 — Second degré à discriminant négatif ●○○

a. $z^2 = -4 = (2i)^2 : S = \{-2i\,;2i\}$.

b. $\Delta = 4 - 20 = -16 : S = \{1 - 2i\,;1 + 2i\}$.

c. $\Delta = -3 : S = \left\{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\,;-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$.

> Si $\Delta < 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (coefficients réels) a deux solutions complexes conjuguées : $z = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Exercice 2 — Somme et produit des racines ●○○

$\Delta = 36 - 52 = -16 : z = 3 \pm 2i$. Somme : 6 ; produit : $(3 + 2i)(3 - 2i) = 9 + 4 = 13$.

$S = \{3 - 2i\,;3 + 2i\}$; on retrouve $-\dfrac{b}{a}$ et $\dfrac{c}{a}$.

Exercice 3 — Factoriser $z^3 - 8$ ●○○

a. $(z - 2)\left(z^2 + 2z + 4\right) = z^3 + 2z^2 + 4z - 2z^2 - 4z - 8 = z^3 - 8$.

b. $z = 2$ ou $z^2 + 2z + 4 = 0$ $(\Delta = -12) : S = \left\{2\,;-1 + i\sqrt{3}\,;-1 - i\sqrt{3}\right\}$.

Exercice 4 — Retrouver l'équation ●○○

$(z - 2 - i)(z - 2 + i) = (z - 2)^2 - i^2 = z^2 - 4z + 4 + 1 : z^2 - 4z + 5 = 0$.

Exercice 5 — Un polynôme à coefficients complexes ●●○

a. $P(i) = -i - (4 + i)(-1) + (13 + 4i)i - 13i = -i + 4 + i + 13i - 4 - 13i = 0$.

b. $(z - i)\left(z^2 - 4z + 13\right) = z^3 - 4z^2 + 13z - iz^2 + 4iz - 13i = P(z)$.

c. $z^2 - 4z + 13 = 0 : \Delta = -36$, $z = 2 \pm 3i$. $S = \{i\,;2 - 3i\,;2 + 3i\}$.

Exercice 6 Les racines de l'unité ●●○

a. $z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) : S = \{1 ; -1 ; i ; -i\}$.

b. $1, \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}, \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}}$, soit $1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$: **leur somme est nulle**.

> Les solutions de $z^n = 1$ sont les $\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k = 0, \square, n - 1$: les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle unité.

Exercice 7 Résoudre $z^4 = 16$ et $z^6 = 1$ ●●○

- $z^4 = 16 \iff \left(\frac{z}{2}\right)^4 = 1 : S = \{2 ; -2 ; 2i ; -2i\}$.
- $z^6 = 1 \iff z = \mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{3}}, k \in \{0, \square, 5\} : 1, \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}, \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}, -1, \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}}, \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{3}}$ (un hexagone régulier).

Exercice 8 Une équation bicarrée ●●○

On pose $Z = z^2 : Z^2 + 5Z + 4 = 0$, de solutions $Z = -1$ et $Z = -4$. $z^2 = -1 \iff z = \pm i$; $z^2 = -4 \iff z = \pm 2i$. $S = \{-2i ; -i ; i ; 2i\}$.

Exercice 9 Coefficients réels et conjugué ●●○

a. Les coefficients sont réels : $P(\overline{a}) = \overline{P(a)} = \overline{0} = 0$.

b. $P(1) = 1 - 3 + 7 - 5 = 0$ et $P(z) = (z - 1)(z^2 - 2z + 5)$ (par identification).
$S = \{1 ; 1 - 2i ; 1 + 2i\}$.

Exercice 10 Factoriser $z^n - 1$ ●●○

a. En développant, tous les termes intermédiaires s'annulent :
$z + z^2 + \cdots + z^n - 1 - z - \cdots - z^{n-1} = z^n - 1$.

b. $(\omega - 1)(1 + \omega + \cdots + \omega^{n-1}) = \omega^n - 1 = 0$ et $\omega - 1 \neq 0$: **la somme est nulle**.

Exercice 11 — Le cosinus de 2π/5 ●●●

a. $\omega^4 = \mathrm{e}^{\frac{8i\pi}{5}} = \mathrm{e}^{-\frac{2i\pi}{5}} = \overline{\omega}$, donc $c = \omega + \overline{\omega} = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}$. De même pour c'.

b. $c + c' = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = -1$ (exercice 10).
$cc' = \omega^3 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 = \omega^3 + \omega^4 + \omega + \omega^2 = -1$ (car $\omega^5 = 1$).

c. c et c' sont les racines de $X^2 + X - 1 = 0$: $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Comme $c > 0$, $c = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, d'où

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Exercice 12 — Des racines sur un cercle ●●●

a. $\Delta = 4m^2 - 16 = 4\left(m^2 - 4\right) < 0 : z = m \pm i\sqrt{4 - m^2}$.

b. $|z|^2 = m^2 + 4 - m^2 = 4$: **les points sont sur le cercle de centre O et de rayon 2.**

Exercice 13 — TYPE CONTRÔLE — Un polynôme de degré 4 ●●●

1. $P(i) = 1 + 4i - 9 - 4i + 8 = 0$. Coefficients réels : $-i$ **est aussi racine**.

2. En développant : $z^4 + az^3 + (b+1)z^2 + az + b$. Par identification, $a = -4$ **et** $b = 8$.

3. $z^2 - 4z + 8 = 0 : \Delta = -16$, $z = 2 \pm 2i$. $S = \{i\,;-i\,;2+2i\,;2-2i\}$.

4. $[AB]$ et $[CD]$ sont verticaux (même partie réelle), donc parallèles, de longueurs 2 et 4 ; la figure est symétrique par rapport à l'axe des réels. $ABDC$ **est un trapèze isocèle**.

Exercice 14 — TYPE CONTRÔLE — Les racines cubiques de 8i ●●●

1. $8i = 8\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$.

2. $r^3\,\mathrm{e}^{3i\theta} = 8\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} : r^3 = 8$ et $3\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.

3. $k = 0 : 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} = \boldsymbol{\sqrt{3} + i}$; $k = 1 : 2\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}} = \boldsymbol{-\sqrt{3} + i}$; $k = 2 : 2\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{2}} = \boldsymbol{-2i}$.

4. Les côtés mesurent $\left|2\sqrt{3}\right| = 2\sqrt{3}$, $\left|\sqrt{3} + 3i\right| = 2\sqrt{3}$ et de même pour le troisième : **équilatéral**. Aire : $\dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \left(2\sqrt{3}\right)^2 = \boldsymbol{3\sqrt{3}}$.

Exercice 15 — TYPE BAC — Racines et triangle rectangle ●●○

1. $P(2) = 8 - 8 + 8 - 8 = 0$ et $P(z) = (z-2)\left(z^2+4\right)$.
2. $S = \{2\,;2i\,;-2i\}$.
3. $AB = |2i-2| = 2\sqrt{2}$, $AC = |-2i-2| = 2\sqrt{2}$, $BC = 4$, et $AB^2 + AC^2 = 16 = BC^2$: **rectangle isocèle en A.**
4. L'hypoténuse $[BC]$ est un diamètre : **centre O (milieu de $[BC]$), rayon 2.**

Exercice 16 — TYPE BAC — Une équation avec cos θ ●●●

1. $\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = -4\sin^2\theta < 0$: $z = \dfrac{2\cos\theta \pm 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta \pm i\sin\theta$, soit $\mathrm{e}^{\pm i\theta}$.
2. Somme : $\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta} = 2\cos\theta$; produit : $\mathrm{e}^{0} = 1$. Ce sont bien $-\dfrac{b}{a}$ et $\dfrac{c}{a}$.
3. Pour $z = \mathrm{e}^{i\theta}$: $z^n + z^{-n} = \mathrm{e}^{in\theta} + \mathrm{e}^{-in\theta} = 2\cos(n\theta)$ (Euler) ; de même pour $\mathrm{e}^{-i\theta}$.
4. $z = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \mathrm{e}^{\pm i\frac{\pi}{3}}$, et $\left(\mathrm{e}^{\pm i\frac{\pi}{3}}\right)^6 = \mathrm{e}^{\pm 2i\pi} = 1$.

LES FICHES MAGIQUES TERMINALE SPÉ MATHS

Révise la spé maths de terminale avec les fiches magiques



- **41 fiches claires et illustrées** : tout le programme de spécialité maths de terminale, une notion par page.
- **Des vidéos méthode** accessibles par QR code sur les fiches.
- **Des exercices corrigés** après chaque fiche pour vérifier que tout est acquis.

campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

ANNALES BAC MATHS TERMINALE 2027

Prépare le bac avec les vrais sujets



- **75 sujets types** tirés des vrais sujets du bac, classés par chapitre.
- **3 bacs blancs complets** pour s'entraîner en conditions réelles.
- Des **corrigés avec la rédaction attendue**, des conseils et un aide-mémoire.

campusxyz.fr/produit/annales-bac-2027-terminale-spe-maths