Exercices sur les graphes et chaînes de Markov en maths expertes

CAMPUS XYZ

Exercice 1 — Ordre et degrés ●○○

On considère le graphe non orienté $\mathscr{G}$ de sommets A, B, C, D et d'arêtes A–B, A–C, B–C et C–D.

a. Donne l'ordre du graphe et le degré de chaque sommet.

b. Vérifie que la somme des degrés est égale au double du nombre d'arêtes.

Exercice 2 — La matrice d'adjacence ●○○

On considère le graphe non orienté $\mathscr{G}$ de sommets A, B, C, D et d'arêtes A–B, A–C, B–C et C–D.

Écris la matrice d'adjacence M du graphe, dans l'ordre A, B, C, D. Pourquoi est-elle symétrique ?

Exercice 3 — Le graphe complet ●○○

Un graphe complet d'ordre n a une arête entre chaque paire de sommets distincts.

a. Quel est le degré de chaque sommet du graphe complet d'ordre 5 ? Combien a-t-il d'arêtes ?

b. Combien d'arêtes a le graphe complet d'ordre n ?

Exercice 4 — Compter les chaînes de longueur 2 ●○○

On considère le graphe non orienté $\mathscr{G}$ de sommets A, B, C, D et d'arêtes A–B, A–C, B–C et C–D.

On admet que $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Combien de chaînes de longueur 2 relient A à D ? Écris-les.

b. Que représentent les coefficients diagonaux de M^2 ?

Exercice 5 — Un graphe orienté ●●○

Un graphe orienté a pour sommets A, B, C et pour arcs $A \to B$, $A \to C$, $B \to C$ et $C \to A$.

a. Écris sa matrice d'adjacence N.

b. On admet que $N^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Combien de chemins de longueur 3 vont de A à A ? Lesquels ?

Exercice 6 — Une chaîne de Markov à deux états ●●○

S'il fait beau, il fait beau le lendemain avec probabilité $0{,}7$; s'il pleut, il pleut le lendemain avec probabilité $0{,}6$.

a. Donne la matrice de transition P (état 1 : beau, état 2 : pluie).

b. Il fait beau aujourd'hui. Calcule la loi du temps dans 2 jours.

c. Détermine l'état stable.

Exercice 7 — Graphe connexe ? ●●○

On considère le graphe non orienté $\mathscr{G}$ de sommets A, B, C, D et d'arêtes A–B, A–C, B–C et C–D.

a. Le graphe est-il connexe ? Justifie.

b. On supprime l'arête C–D. Le graphe reste-t-il connexe ?

Exercice 8 — Une chaîne à trois états ●●○

Un client achète chaque semaine l'une des marques 1, 2 ou 3 selon la matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$. Cette semaine, il achète la marque 1.

Calcule la loi des marques achetées dans une semaine, puis dans deux semaines.

Exercice 9 L'état stable à trois états ●●○

On reprend la matrice P de l'exercice 8. On cherche $\pi = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ tel que $\pi P = \pi$ et $x + y + z = 1$.

a. Écris le système vérifié par x, y, z.

b. À la calculatrice, résous-le.

Exercice 10 Simuler l'évolution en Python ●●○

Complète la fonction qui calcule la loi π_n de la chaîne de l'exercice 6, en partant de $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

```
def loi(n):
    b, p = 1, 0
    for k in range(n):
        b, p = ........ , ........
    return b, p
```

Exercice 11 Une formule explicite ●●●

Une chaîne à deux états a pour matrice $P = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$. On note $\pi_n = (p_n \;\; 1 - p_n)$, avec $p_0 = 0$.

a. Montre que $p_{n+1} = 0{,}4\, p_n + 0{,}5$.

b. Déduis-en p_n en fonction de n et sa limite.

Exercice 12 Une marche sur un triangle ●●●

Un pion se déplace sur les sommets A, B, C d'un triangle : à chaque étape, il va sur l'un des deux autres sommets, avec la même probabilité. Il part de A ; a_n est la probabilité qu'il soit en A à l'étape n.

a. Donne la matrice de transition et l'état stable.

b. Montre que $a_{n+1} = \dfrac{1 - a_n}{2}$, puis que $a_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Exercice 13 TYPE CONTRÔLE **Un petit réseau social** ●●●

Cinq personnes A, B, C, D, E sont reliées par les amitiés A–B, A–C, B–C, B–D, C–E et D–E.

1. Représente le graphe et donne le degré de chaque sommet. Qui a le plus d'amis ?
2. Écris la matrice d'adjacence M (ordre alphabétique).
3. On admet que $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Combien d'amis communs ont B et E ? Qui sont-ils ?
4. Deux personnes non amies sont « amies d'amis » si elles ont au moins un ami commun. Quelles paires ne sont ni amies, ni amies d'amis ?

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE **Deux plateformes de streaming** ●●●

Chaque mois, $20\,\%$ des abonnés de la plateforme A passent chez B et $10\,\%$ des abonnés de B passent chez A. Au départ, les deux plateformes ont autant d'abonnés.

1. Donne la matrice de transition P (état 1 : A, état 2 : B) et π_0.
2. Calcule π_1.
3. On note $\pi_n = (a_n \;\; 1 - a_n)$. Montre que $a_{n+1} = 0{,}7\,a_n + 0{,}1$.
4. Déduis-en a_n en fonction de n, sa limite, et l'état stable.
5. À partir de quel mois la part de A passe-t-elle sous $34\,\%$?

Exercice 15 TYPE BAC **Les lecteurs de deux journaux** ●●●

Dans une ville, chaque habitant lit chaque jour le journal X ou le journal Y. Un lecteur de X reste fidèle le lendemain avec probabilité $0{,}9$; un lecteur de Y passe à X avec probabilité $0{,}3$. Le premier jour, $40\,\%$ des habitants lisent X.

1. Représente la situation par un graphe probabiliste et donne la matrice de transition P.
2. Calcule la répartition le deuxième jour.
3. Détermine l'état stable et interprète-le.
4. On admet que $x_n = 0{,}75 - 0{,}35 \times 0{,}6^n$, où x_n est la part de X le jour n ($n \geqslant 0$). Vérifie pour $n = 0$ et $n = 1$, puis détermine à partir de quel jour X dépasse $70\,\%$.

Exercice 16 TYPE BAC **Un réseau de routes** ●●●

Quatre villes P, Q, R, S sont reliées par des routes à double sens : P–Q, P–R, Q–R, Q–S, R–S.

1. Écris la matrice d'adjacence M (ordre P, Q, R, S).
2. On admet que $M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Combien de trajets de 3 routes vont de P à S ? Écris-les.
3. Existe-t-il un trajet de 3 routes partant de P et revenant en P ? Combien ?
4. Quelle est la longueur minimale d'un trajet de P à S ?

CAMPUS XYZ

Corrigés

Exercices sur les graphes et chaînes de Markov en maths expertes

Exercices sur les graphes et chaînes de Markov en maths expertes : corrigés

CAMPUS XYZ

Exercice 1 — Ordre et degrés ●○○

a. **Ordre** 4 ; **degrés :** $A : 2, B : 2, C : 3, D : 1$.

b. $2 + 2 + 3 + 1 = 8 = 2 \times 4$: chaque arête compte pour ses deux extrémités.

Exercice 2 — La matrice d'adjacence ●○○

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Le coefficient $(i\,;j)$ vaut 1 s'il y a une arête entre les sommets i et j. Le graphe n'est pas orienté : i–j est aussi j–i, d'où la symétrie.

Exercice 3 — Le graphe complet ●○○

a. Chaque sommet est relié aux 4 autres : **degré** 4. Somme des degrés 20, donc 10 **arêtes**.

b. $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ **arêtes** (une par paire de sommets).

Exercice 4 — Compter les chaînes de longueur 2 ●○○

a. Le coefficient $(A\,;D)$ vaut 1 : **une seule chaîne,** A–C–D.

b. Les chaînes de longueur 2 qui reviennent au point de départ : ce sont **les degrés des sommets** (aller-retour par chaque arête).

> Le coefficient $(i\,;j)$ de M^n est le nombre de chaînes de longueur n reliant i à j.

Exercice 5 — Un graphe orienté ●●○

a. $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (ligne = départ, colonne = arrivée) ; elle n'est pas symétrique.

b. **Un seul** : $A \to B \to C \to A$.

Exercice 6 — Une chaîne de Markov à deux états ●●○

a. $P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ (chaque ligne a pour somme 1).

b. $\pi_0 = (1 \;\; 0)$, $\pi_1 = (0{,}7 \;\; 0{,}3)$, $\pi_2 = (0{,}49 + 0{,}12 \;\; 0{,}21 + 0{,}18) = \mathbf{(0{,}61 \;\; 0{,}39)}$.

c. $\pi = (x \;\; 1 - x)$ avec $0{,}7x + 0{,}4(1 - x) = x : 0{,}4 = 0{,}7x$, $\pi = \left(\frac{4}{7} \;\; \frac{3}{7}\right)$.

> Chaîne de Markov : si π_n est la loi (ligne) à l'étape n et P la matrice de transition, alors $\pi_{n+1} = \pi_n P$ et $\pi_n = \pi_0 P^n$. Un état stable vérifie $\pi P = \pi$, avec des coefficients de somme 1.

Exercice 7 — Graphe connexe ? ●●○

a. **Oui** : A, B, C sont reliés entre eux, et D est relié à C. Toute paire de sommets est reliée par une chaîne.

b. **Non** : D devient isolé (degré 0).

Exercice 8 — Une chaîne à trois états ●●○

$\pi_0 = (1 \;\; 0 \;\; 0)$, $\pi_1 = (0{,}7 \;\; 0{,}2 \;\; 0{,}1)$ (première ligne de P),
$\pi_2 = \pi_1 P = (0{,}49 + 0{,}06 + 0{,}02 \quad 0{,}14 + 0{,}1 + 0{,}03 \quad 0{,}07 + 0{,}04 + 0{,}05) = \mathbf{(0{,}57 \;\; 0{,}27 \;\; 0{,}16)}$.

Exercice 9 — L'état stable à trois états ●●○

a. $\begin{cases} 0{,}7x + 0{,}3y + 0{,}2z = x \\ 0{,}2x + 0{,}5y + 0{,}3z = y \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ (la troisième équation de $\pi P = \pi$ est redondante).

b. $\pi = \left(\frac{19}{41} \;\; \frac{13}{41} \;\; \frac{9}{41}\right) \approx (0{,}46 \;\; 0{,}32 \;\; 0{,}22)$.

Exercice 10 — Simuler l'évolution en Python ●●○

$\pi_{n+1} = \pi_n P$: $b' = 0{,}7\,b + 0{,}4\,p$ et $p' = 0{,}3\,b + 0{,}6\,p$.

```
b, p = 0.7*b + 0.4*p, 0.3*b + 0.6*p
```

L'affectation simultanée évite d'utiliser la nouvelle valeur de `b` dans le calcul de `p`. Pour n grand, on obtient $(0{,}571 \;\; 0{,}429)$, l'état stable.

Exercice 11 — Une formule explicite ●●●

a. $p_{n+1} = 0{,}9\,p_n + 0{,}5(1 - p_n) = 0{,}4\,p_n + 0{,}5$.

b. Point fixe $\ell = \dfrac{5}{6}$. $p_n - \dfrac{5}{6}$ est géométrique de raison $0{,}4$: $p_n = \dfrac{5}{6} - \dfrac{5}{6} \times 0{,}4^n$ et $p_n \to \dfrac{5}{6}$.

Exercice 12 — Une marche sur un triangle ●●●

a. $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Par symétrie, **l'état stable est** $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

b. Pour être en A à l'étape $n+1$, il faut ne pas y être à l'étape n (probabilité $1 - a_n$) puis choisir A ($\frac{1}{2}$).

$a_n - \dfrac{1}{3}$ est géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$ et vaut $\dfrac{2}{3}$ au départ : on obtient la formule. $a_n \to \dfrac{1}{3}$.

Exercice 13 — TYPE CONTRÔLE — Un petit réseau social ●●●

1. $A : 2, B : 3, C : 3, D : 2, E : 2$. B **et** C ont le plus d'amis.

2. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Coefficient $(B\,;E) : 2$ **amis communs,** C **et** D.

4. Les paires non amies sont $(A\,;D)$, $(A\,;E)$, $(B\,;E)$ et $(C\,;D)$. Leurs coefficients dans M^2 valent 1, 1, 2 et 2, tous non nuls : **aucune paire n'est ni amie, ni amie d'amis**.

Exercice 14 — TYPE CONTRÔLE — Deux plateformes de streaming ●●●

1. $P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$, $\pi_0 = (0{,}5 \;\; 0{,}5)$.

2. $\pi_1 = (0{,}4 + 0{,}05 \;\; 0{,}1 + 0{,}45) = (0{,}45 \;\; 0{,}55)$.

3. $a_{n+1} = 0{,}8\,a_n + 0{,}1(1 - a_n) = 0{,}7\,a_n + 0{,}1$.

4. Point fixe $\dfrac{1}{3}$: $a_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} \times 0{,}7^n$, $a_n \to \dfrac{1}{3}$, état stable $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

5. $\dfrac{1}{6} \times 0{,}7^n < 0{,}34 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{150} \iff 0{,}7^n < 0{,}04 \iff n > \dfrac{\ln 0{,}04}{\ln 0{,}7} \approx 9{,}02$: **au** 10^{e} **mois**.

Exercice 15 — TYPE BAC — Les lecteurs de deux journaux ●●●

1. Deux sommets X et Y, arcs pondérés $0{,}9$ ($X \to X$), $0{,}1$ ($X \to Y$), $0{,}3$ ($Y \to X$), $0{,}7$ ($Y \to Y$). $P = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.
2. $(0{,}4 \;\; 0{,}6)P = (0{,}36 + 0{,}18 \;\; 0{,}04 + 0{,}42) = \mathbf{(0{,}54 \;\; 0{,}46)}$.
3. $0{,}9x + 0{,}3(1-x) = x \iff 0{,}3 = 0{,}4x$: $(0{,}75 \;\; 0{,}25)$. À long terme, $75\,\%$ des habitants lisent X.
4. $x_0 = 0{,}4$ et $x_1 = 0{,}75 - 0{,}21 = 0{,}54$.

   $0{,}35 \times 0{,}6^n < 0{,}05 \iff 0{,}6^n < \dfrac{1}{7} \iff n > \dfrac{\ln 7}{\ln(1/0{,}6)} \approx 3{,}8$: **à partir de** $n = 4$, soit le cinquième jour.

Exercice 16 — TYPE BAC — Un réseau de routes ●●●

1. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Coefficient $(P\,;S)$: 2 **trajets**, P–Q–R–S et P–R–Q–S.
3. Coefficient $(P\,;P)$: 2 **trajets**, les deux sens du triangle P–Q–R–P et P–R–Q–P.
4. P et S ne sont pas voisins ($M_{PS} = 0$), mais P–Q–S existe : **longueur** 2.

LES FICHES MAGIQUES TERMINALE SPÉ MATHS

Révise la spé maths de terminale avec les fiches magiques



- **41 fiches claires et illustrées** : tout le programme de spécialité maths de terminale, une notion par page.
- **Des vidéos méthode** accessibles par QR code sur les fiches.
- **Des exercices corrigés** après chaque fiche pour vérifier que tout est acquis.

campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

ANNALES BAC MATHS TERMINALE 2027

Prépare le bac avec les vrais sujets



- **75 sujets types** tirés des vrais sujets du bac, classés par chapitre.
- **3 bacs blancs complets** pour s'entraîner en conditions réelles.
- Des **corrigés avec la rédaction attendue**, des conseils et un aide-mémoire.

campusxyz.fr/produit/annales-bac-2027-terminale-spe-maths