Exercice 1 — Somme et produit par un réel ●○○

On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calcule $A + B$ et $2A - B$.

Exercice 2 — Le produit n'est pas commutatif ●○○

Avec les mêmes matrices A et B, calcule AB et BA. Que constates-tu ?

Exercice 3 L'inverse d'une matrice 2 × 2 ●○○

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calcule MN. Que peut-on en déduire ?

Exercice 4 Résoudre un système avec une matrice ●○○

On considère le système $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 5x + 3y = 11 \end{cases}$.

a. Écris-le sous la forme $AX = B$.

b. Calcule A^{-1} et résous le système.

Exercice 5 Les puissances d'une matrice triangulaire ●●○

Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calcule N^2 et N^3.

b. Conjecture puis démontre par récurrence l'expression de N^n.

Exercice 6 Puissances d'une matrice diagonale ●●○

Soit $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calcule D^2, D^3, puis D^n pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exercice 7 — Un inverse grâce à une relation ●●○

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calcule A^2 et vérifie que $A^2 - 2A = 3I_2$.

b. Déduis-en que A est inversible et donne A^{-1}.

Exercice 8 — La parabole qui passe par trois points ●●○

On cherche la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par $(1\,;2)$, $(2\,;5)$ et $(3\,;10)$.

a. Écris le système vérifié par a, b, c sous forme matricielle.

b. À la calculatrice, résous-le.

Exercice 9 — Les habitants de deux villes ●●○

Chaque année, $10\,\%$ des habitants de la ville A partent vivre en B, et $20\,\%$ de ceux de B partent en A. On note $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ les populations l'année n, avec $U_0 = \begin{pmatrix} 1\,000 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a. Justifie que $U_{n+1} = MU_n$ avec $M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

b. Calcule U_1 et U_2.

c. Détermine l'état stable : U tel que $MU = U$ et $a + b = 1\,000$.

Exercice 10 — Calculer M^n par diagonalisation ●●○

On reprend $M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ et on pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

a. Vérifie que $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et que $M = PDP^{-1}$.

b. Démontre par récurrence que $M^n = PD^nP^{-1}$.

Exercice 11 À long terme, les deux villes ●●●

On reprend les exercices 9 et 10.

a. Montre que $M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+0{,}7^n & 2-2\times 0{,}7^n \\ 1-0{,}7^n & 1+2\times 0{,}7^n \end{pmatrix}$.

b. Déduis-en a_n et b_n en fonction de n, puis leurs limites.

Exercice 12 Deux suites liées ●●●

On pose $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et, pour tout n, $u_{n+1} = 2u_n + v_n$ et $v_{n+1} = u_n + 2v_n$.

a. Écris la relation sous la forme $X_{n+1} = AX_n$.

b. On pose $s_n = u_n + v_n$ et $d_n = u_n - v_n$. Montre que (s_n) est géométrique et que (d_n) est constante.

c. Déduis-en u_n et v_n.

Exercice 13 TYPE CONTRÔLE **Fibonacci et les matrices** ●●●

La suite de Fibonacci est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. On pose $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calcule F_2 à F_6.
2. Démontre par récurrence que $Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ pour $n \geqslant 1$.
3. Calcule Q^5 et vérifie.
4. En calculant le déterminant de Q^n de deux façons (on admet que $\det(Q^n) = (\det Q)^n$), montre que $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE **Le chiffrement de Hill** ●●●

On numérote les lettres de $A = 0$ à $Z = 25$. On code un bloc de deux lettres $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, restes modulo 26 de $C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, avec $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Code le mot OK ($O = 14$, $K = 10$).
2. Vérifie que $C \times \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = I_2$.
3. Explique comment décoder, puis décode le bloc OI ($O = 14$, $I = 8$).
4. Pourquoi faut-il que $3 \times 2 - 5 \times 1$ soit inversible modulo 26 ?

Exercice 15 TYPE BAC **Deux opérateurs téléphoniques** ●●●

Chaque année, $80\,\%$ des clients de l'opérateur A restent chez A et $20\,\%$ passent chez B ; $70\,\%$ des clients de B restent chez B et $30\,\%$ passent chez A. On note a_n et b_n les parts de marché l'année n, $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, avec $a_0 = b_0 = 0{,}5$.

1. Justifie que $U_{n+1} = MU_n$ avec $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.
2. On admet que $M^n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 + 2 \times 0{,}5^n & 3 - 3 \times 0{,}5^n \\ 2 - 2 \times 0{,}5^n & 2 + 3 \times 0{,}5^n \end{pmatrix}$. Vérifie la formule pour $n = 1$.
3. Montre que $a_n = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}5^n$.
4. Détermine la limite de a_n, puis le plus petit n tel que $a_n \geqslant 0{,}59$.

Exercice 16 TYPE BAC **Une suite récurrente d'ordre 2** ●●●

La suite (u_n) vérifie $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. Calcule u_2 à u_5.
2. Détermine A telle que $X_{n+1} = AX_n$, et justifie que $X_n = A^n X_0$.
3. Démontre par récurrence que $u_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$.
4. Détermine la limite de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

CAMPUS XYZ

Corrigés

Exercices sur le calcul matriciel en maths expertes

Exercice 1 Somme et produit par un réel ●○○

On opère terme à terme : $A+B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$ et $2A-B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 7 & 6\end{pmatrix}$.

Exercice 2 Le produit n'est pas commutatif ●○○

Ligne par colonne : $AB=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ -4 & 11\end{pmatrix}$ et $BA=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$. $AB\neq BA$: l'ordre des facteurs compte.

> Le coefficient ligne i, colonne j de AB est la somme des produits de la ligne i de A par la colonne j de B.

Exercice 3 L'inverse d'une matrice 2 × 2 ●○○

$MN=\begin{pmatrix}2-1 & -2+2\\ 1-1 & -1+2\end{pmatrix}=I_2$. M **est inversible et** $M^{-1}=N$.

> Pour $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ avec $ad-bc\neq 0$, l'inverse est $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$.

Exercice 4 Résoudre un système avec une matrice ●○○

a. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4\\ 11\end{pmatrix}$.

b. $ad-bc=1$: $A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$ et $X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}12-11\\ -20+22\end{pmatrix}$. $x=1, y=2$.

Exercice 5 Les puissances d'une matrice triangulaire ●●○

a. $N^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}, N^3=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

b. $N^n=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Vrai pour $n=1$; si c'est vrai au rang n, $N^{n+1}=N^nN=\begin{pmatrix}1 & n+1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Exercice 6 — Puissances d'une matrice diagonale ●●○

$D^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, et $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$: on élève chaque coefficient diagonal à la puissance n.

Exercice 7 — Un inverse grâce à une relation ●●○

a. $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_2$.

b. $A \times \frac{1}{3}(A - 2I_2) = I_2$: $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 — La parabole qui passe par trois points ●●○

a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$.

b. La matrice est inversible : $a = 1, b = 0, c = 1$, soit $y = x^2 + 1$ (on vérifie les trois points).

Exercice 9 — Les habitants de deux villes ●●○

a. $a_{n+1} = 0{,}9\,a_n + 0{,}2\,b_n$ et $b_{n+1} = 0{,}1\,a_n + 0{,}8\,b_n$.

b. $U_1 = \begin{pmatrix} 900 \\ 100 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 830 \\ 170 \end{pmatrix}$.

c. $MU = U \iff 0{,}1\,a = 0{,}2\,b \iff a = 2b$. Avec $a + b = 1\,000$: $a \approx 666{,}7, b \approx 333{,}3$.

Exercice 10 — Calculer Mⁿ par diagonalisation ●●○

a. $P \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = I_2$. Puis $PD = \begin{pmatrix} 2 & 0{,}7 \\ 1 & -0{,}7 \end{pmatrix}$ et

$PDP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2{,}7 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 2{,}4 \end{pmatrix} = M$.

b. Vrai pour $n = 1$. Si $M^n = PD^nP^{-1}$, alors $M^{n+1} = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$ (car $P^{-1}P = I_2$).

Exercice 11 — À long terme, les deux villes ●●●

a. $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}7^n \end{pmatrix}$ et on calcule PD^nP^{-1} comme dans l'exercice 10.

b. $U_n = M^nU_0$: $a_n = \dfrac{1\,000}{3}(2 + 0{,}7^n)$, $b_n = \dfrac{1\,000}{3}(1 - 0{,}7^n)$. Comme $0{,}7^n \to 0$:

$a_n \to \dfrac{2\,000}{3}$ **et** $b_n \to \dfrac{1\,000}{3}$, l'état stable de l'exercice 9.

Exercice 12 — Deux suites liées ●●●

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

b. $s_{n+1} = 3u_n + 3v_n = 3s_n$ et $d_{n+1} = u_n - v_n = d_n$. Donc $s_n = 3^n$ et $d_n = 1$.

c. $u_n = \dfrac{3^n + 1}{2}$ **et** $v_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$.

Exercice 13 — TYPE CONTRÔLE — Fibonacci et les matrices ●●●

1. $1, 2, 3, 5, 8$.

2. $Q^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix}$. Si c'est vrai au rang n :

$$Q^{n+1} = Q^nQ = \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_{n+1} \\ F_n + F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}.$$

3. $Q^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_6 & F_5 \\ F_5 & F_4 \end{pmatrix}$.

4. $\det Q = -1$, donc $\det(Q^n) = (-1)^n$; et $\det(Q^n) = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$ (identité de Cassini).

Exercice 14 — TYPE CONTRÔLE — Le chiffrement de Hill ●●●

1. $C\begin{pmatrix} 14 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 92 \\ 34 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix}$ $[26]$: **OK est codé OI**.

2. $\begin{pmatrix} 6 - 5 & -15 + 15 \\ 2 - 2 & -5 + 6 \end{pmatrix} = I_2$.

3. On multiplie par $C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ modulo 26 : $\begin{pmatrix} 28 - 40 \\ -14 + 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 10 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \end{pmatrix}$: **on retrouve OK**.

4. Le déterminant 1 est inversible modulo 26 ; sinon, deux blocs différents pourraient avoir le même code et le décodage serait impossible.

Exercice 15 — TYPE BAC — Deux opérateurs téléphoniques ●●●

1. $a_{n+1} = 0{,}8\,a_n + 0{,}3\,b_n$ et $b_{n+1} = 0{,}2\,a_n + 0{,}7\,b_n$.

2. $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1{,}5 \\ 1 & 3{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

3. $a_n = \dfrac{1}{5}\left[(3 + 2 \times 0{,}5^n)\,0{,}5 + (3 - 3 \times 0{,}5^n)\,0{,}5\right] = \dfrac{1}{10}\,(6 - 0{,}5^n)$.

4. $a_n \to 0{,}6$. $0{,}1 \times 0{,}5^n \leqslant 0{,}01 \iff 0{,}5^n \leqslant 0{,}1 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}5} \approx 3{,}3$: $n = 4$.

Exercice 16 — TYPE BAC — Une suite récurrente d'ordre 2 ●●●

1. $u_2 = 1, u_3 = 3, u_4 = 5, u_5 = 11$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; par récurrence, $X_n = A^n X_0$.

3. Vrai pour $n = 0$ et $n = 1$. Si c'est vrai aux rangs n et $n+1$:

$$u_{n+2} = \frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1} + 2^{n+1} - 2(-1)^n}{3} = \frac{2^{n+2} - (-1)^n}{3} = \frac{2^{n+2} - (-1)^{n+2}}{3}$$

(récurrence double).

4. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{n+1} + (-1)^n}{2^n - (-1)^n} = \dfrac{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n} \to 2$.

LES FICHES MAGIQUES TERMINALE SPÉ MATHS

Révise la spé maths de terminale avec les fiches magiques



- **41 fiches claires et illustrées** : tout le programme de spécialité maths de terminale, une notion par page.
- **Des vidéos méthode** accessibles par QR code sur les fiches.
- **Des exercices corrigés** après chaque fiche pour vérifier que tout est acquis.

campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

ANNALES BAC MATHS TERMINALE 2027

Prépare le bac avec les vrais sujets



- **75 sujets types** tirés des vrais sujets du bac, classés par chapitre.
- **3 bacs blancs complets** pour s'entraîner en conditions réelles.
- Des **corrigés avec la rédaction attendue**, des conseils et un aide-mémoire.

campusxyz.fr/produit/annales-bac-2027-terminale-spe-maths