Exercices sur les nombres premiers en maths expertes

CAMPUS XYZ

Exercice 1 — Premier ou pas ? ●○○

Les nombres 91, 97, 221 et $2\,027$ sont-ils premiers ?

Exercice 2 — Décomposer en facteurs premiers ●○○

Décompose en produit de facteurs premiers 360, $2\,026$ et $1\,001$.

Exercice 3 — Compter les diviseurs ●○○

À l'aide de $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$, détermine le nombre de diviseurs positifs de 360.

Exercice 4 — PGCD et PPCM par décomposition ●○○

Avec $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ et $84 = 2^2 \times 3 \times 7$, calcule $\text{PGCD}(360\,;84)$ et $\text{PPCM}(360\,;84)$.

Exercice 5 Le crible d'Ératosthène ●●○

a. À l'aide du crible d'Ératosthène, donne les nombres premiers inférieurs à 50.

b. Pourquoi suffit-il de barrer les multiples de 2, 3, 5 et 7 ?

Exercice 6 Une infinité de nombres premiers ●●○

On suppose qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers p_1, p_2, ..., p_k, et on pose $N = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k + 1$.

a. Justifie que $N \geqslant 2$ admet un diviseur premier p.

b. Montre que p ne peut être aucun des p_i, et conclus.

Exercice 7 — Fermat pour une grande puissance ●●○

À l'aide du petit théorème de Fermat, détermine le reste de 2^{2026} dans la division par 11.

Exercice 8 — Toujours divisible par 7 ●●○

Montre que $n^7 - n$ est divisible par 7 pour tout entier naturel n.

Exercice 9 — Rendre un nombre carré ●●○

Quel est le plus petit entier $k \geqslant 1$ tel que $360k$ soit un carré parfait ?

Exercice 10 — Le carré d'un nombre premier ●●○

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5. Montre que $p^2 - 1$ est divisible par 24.

Exercice 11 Les nombres de Mersenne ●●●

a. Montre que si $n = ab$ avec $a \geqslant 2$, alors $2^a - 1$ divise $2^n - 1$ (utilise $2^a \equiv 1 \ [2^a - 1]$).

b. Déduis-en que si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.

c. La réciproque est-elle vraie ? Teste avec $2^{11} - 1 = 2\,047$.

Exercice 12 Les zéros de 100! ●●●

Par combien de zéros se termine l'écriture de $100! = 1 \times 2 \times \cdots \times 100$?

Exercice 13 TYPE CONTRÔLE **Un chiffrement RSA miniature** ●●●

On choisit $p = 5$, $q = 11$, $n = pq = 55$ et $\varphi = (p-1)(q-1) = 40$. La clé publique est $e = 3$.

1. Vérifie que $\text{PGCD}(3\,;40) = 1$ et trouve d entre 1 et 40 tel que $3d \equiv 1\ [40]$.
2. Pour chiffrer un message m, on calcule le reste c de m^e modulo 55. Chiffre $m = 7$.
3. Pour déchiffrer, on calcule le reste de c^d modulo 55. Vérifie à la calculatrice (ou en Python avec `pow(13, 27, 55)`) qu'on retrouve 7.
4. Pourquoi la sécurité repose-t-elle sur la difficulté à décomposer n en facteurs premiers ?

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE **Les nombres parfaits** ●●●

Un entier est parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs positifs autres que lui-même. On note $\sigma(n)$ la somme de tous ses diviseurs positifs : n est parfait si $\sigma(n) = 2n$.

1. Vérifie que 6 et 28 sont parfaits.
2. Soit p premier impair et $a \geqslant 1$. Montre que $\sigma\left(2^a p\right) = \left(2^{a+1} - 1\right)(p + 1)$.
3. Déduis-en que si $p = 2^{a+1} - 1$ est premier, alors $2^a p$ est parfait.
4. Trouve ainsi un nombre parfait supérieur à 28.

Exercice 15 TYPE BAC $n^5 - n$ est divisible par 30 ●●●

1. Montre que $n^5 - n = n(n-1)(n+1)\left(n^2+1\right)$ et déduis-en que $n^5 - n$ est pair.
2. Montre que 3 divise $n^5 - n$.
3. À l'aide du petit théorème de Fermat, montre que 5 divise $n^5 - n$.
4. Conclus que 30 divise $n^5 - n$ pour tout entier n.

Exercice 16 TYPE BAC **Différences de deux carrés** ●●●

On cherche les entiers naturels x et y tels que $x^2 - y^2 = N$.

1. On prend $N = 2\,027$, qui est premier. Montre que $x - y = 1$ et $x + y = 2\,027$, puis donne la solution.
2. On prend $N = 2\,026$. Montre que $x - y$ et $x + y$ ont la même parité.
3. Déduis-en que l'équation $x^2 - y^2 = 2\,026$ n'a pas de solution.
4. Résous $x^2 - y^2 = 45$ dans $\mathbb{N}^2$.

CAMPUS XYZ

Corrigés

Exercices sur les nombres premiers en maths expertes

Exercices sur les nombres premiers en maths expertes : corrigés

CAMPUS XYZ

Exercice 1 — Premier ou pas ? ●○○

On teste les diviseurs premiers p tels que $p^2 \leqslant n$.

- $91 = 7 \times 13$: pas premier.
- 97 : pas divisible par $2, 3, 5, 7$ ($11^2 > 97$) : **premier**.
- $221 = 13 \times 17$: pas premier.
- $2\,027$: aucun premier jusqu'à 43 ne le divise ($47^2 > 2\,027$) : **premier**.

Exercice 2 — Décomposer en facteurs premiers ●○○

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$; $2\,026 = 2 \times 1\,013$ ($1\,013$ est premier) ; $1\,001 = 7 \times 11 \times 13$.

Exercice 3 — Compter les diviseurs ●○○

Un diviseur s'écrit $2^a\,3^b\,5^c$ avec $0 \leqslant a \leqslant 3, 0 \leqslant b \leqslant 2, 0 \leqslant c \leqslant 1$: $4 \times 3 \times 2 = 24$ **diviseurs**.

Exercice 4 — PGCD et PPCM par décomposition ●○○

PGCD : plus petits exposants communs, $2^2 \times 3 = 12$. PPCM : plus grands exposants, $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2\,520$.

Exercice 5 — Le crible d'Ératosthène ●●○

a. $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47$ (15 nombres).

b. Un nombre composé $n < 50$ a un diviseur premier p avec $p^2 \leqslant n < 50$, donc $p \leqslant 7$.

Exercice 6 — Une infinité de nombres premiers ●●○

a. Tout entier supérieur ou égal à 2 a au moins un diviseur premier (son plus petit diviseur différent de 1).

b. Si $p = p_i$, alors p divise N et le produit $p_1 \times \cdots \times p_k$, donc leur différence 1 : impossible. p est un nombre premier qui n'est pas dans la liste : contradiction. **Il y a une infinité de nombres premiers** (Euclide).

Exercice 7 — Fermat pour une grande puissance ●●○

11 est premier et ne divise pas 2 : $2^{10} \equiv 1\ [11]$. $2\,026 = 10 \times 202 + 6$, donc $2^{2026} \equiv 2^6 = 64 = 5 \times 11 + 9$. **Le reste est** 9.

> Petit théorème de Fermat : si p est premier et ne divise pas a, alors $a^{p-1} \equiv 1\ [p]$. Pour tout entier a, $a^p \equiv a\ [p]$.

Exercice 8 — Toujours divisible par 7 ●●○

7 est premier : d'après le petit théorème de Fermat, $n^7 \equiv n\ [7]$, donc $7 \mid n^7 - n$.

Exercice 9 — Rendre un nombre carré ●●○

Un carré a tous ses exposants pairs. $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$: il manque un 2 et un 5. $k = 10$, et $3\,600 = 60^2$.

Exercice 10 — Le carré d'un nombre premier ●●○

$p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$. p est impair : $p-1$ et $p+1$ sont deux pairs consécutifs, l'un est multiple de 4 : $8 \mid p^2 - 1$. Parmi $p-1$, p, $p+1$, l'un est multiple de 3, et ce n'est pas p : $3 \mid p^2 - 1$. 3 et 8 sont premiers entre eux : $24 \mid p^2 - 1$.

Exercice 11 — Les nombres de Mersenne ●●●

a. $2^n = (2^a)^b \equiv 1^b = 1\ [2^a - 1]$, donc $2^a - 1 \mid 2^n - 1$.

b. Si n n'est pas premier, $n = ab$ avec $2 \leqslant a < n$, et $2^a - 1$ est un diviseur de $2^n - 1$ différent de 1 et de $2^n - 1$: contraposée.

c. **Non** : 11 est premier mais $2\,047 = 23 \times 89$.

Exercice 12 — Les zéros de 100! ●●●

Chaque zéro final vient d'un facteur $10 = 2 \times 5$, et il y a plus de facteurs 2 que de facteurs 5. On compte les facteurs 5 : 20 multiples de 5, dont 4 multiples de 25 qui en apportent un de plus. 24 **zéros**.

Exercice 13 TYPE CONTRÔLE Un chiffrement RSA miniature ●●●

1. $40 = 13 \times 3 + 1$: PGCD 1. $3 \times 27 = 81 = 2 \times 40 + 1$: $d = 27$.
2. $7^3 = 343 = 6 \times 55 + 13$: $c = 13$.
3. `pow(13, 27, 55)` renvoie bien 7.
4. Connaissant p et q, on calcule φ puis d : il faut donc que n soit si grand (plusieurs centaines de chiffres) que personne ne sache le décomposer.

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE Les nombres parfaits ●●●

1. $1 + 2 + 3 = 6$ et $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.
2. Les diviseurs sont les 2^k et les $2^k p$, $0 \leqslant k \leqslant a$:
   $\sigma = (1 + 2 + \cdots + 2^a)(1 + p) = \left(2^{a+1} - 1\right)(p + 1)$.
3. Avec $p = 2^{a+1} - 1$: $\sigma = p \times 2^{a+1} = 2 \times 2^a p$. $2^a p$ **est parfait**.
4. $a = 4$: $p = 31$ est premier, $2^4 \times 31 = 496$ **est parfait**.

Exercice 15 TYPE BAC n⁵ – n est divisible par 30 ●●●

1. $n^5 - n = n\left(n^4 - 1\right) = n\left(n^2 - 1\right)\left(n^2 + 1\right)$. n et $n - 1$ sont consécutifs : l'un est pair.
2. $(n - 1)n(n + 1)$: trois entiers consécutifs, l'un est multiple de 3.
3. 5 est premier : $n^5 \equiv n\ [5]$.
4. 2, 3 et 5 sont premiers entre eux deux à deux et divisent $n^5 - n$: 30 **divise** $n^5 - n$.

Exercice 16 TYPE BAC Différences de deux carrés ●●●

1. $(x - y)(x + y) = 2\,027$ premier, avec $0 \leqslant x - y \leqslant x + y$: $x - y = 1$ et $x + y = 2\,027$.
   $x = 1\,014$, $y = 1\,013$.
2. $(x + y) - (x - y) = 2y$ est pair.
3. $2\,026$ est pair, donc les deux facteurs sont pairs et leur produit est multiple de 4. Or
   $2\,026 = 4 \times 506 + 2$: **impossible**.
4. $45 = 1 \times 45 = 3 \times 15 = 5 \times 9$ (facteurs impairs). On obtient $(23\,;22)$, $(9\,;6)$ **et** $(7\,;2)$.

LES FICHES MAGIQUES TERMINALE SPÉ MATHS

Révise la spé maths de terminale avec les fiches magiques



- **41 fiches claires et illustrées** : tout le programme de spécialité maths de terminale, une notion par page.
- **Des vidéos méthode** accessibles par QR code sur les fiches.
- **Des exercices corrigés** après chaque fiche pour vérifier que tout est acquis.

campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

ANNALES BAC MATHS TERMINALE 2027

Prépare le bac avec les vrais sujets



- **75 sujets types** tirés des vrais sujets du bac, classés par chapitre.
- **3 bacs blancs complets** pour s'entraîner en conditions réelles.
- Des **corrigés avec la rédaction attendue**, des conseils et un aide-mémoire.

campusxyz.fr/produit/annales-bac-2027-terminale-spe-maths