Exercices sur le PGCD et les théorèmes de Bézout et de Gauss en maths expertes

CAMPUS XYZ

Exercice 1 L'algorithme d'Euclide ●○○

À l'aide de l'algorithme d'Euclide, calcule $\mathrm{PGCD}(1\,071\,;462)$.

Exercice 2 Premiers entre eux ? ●○○

Calcule $\mathrm{PGCD}(35\,;18)$ et $\mathrm{PGCD}(84\,;126)$. Quels nombres sont premiers entre eux ?

Exercice 3 — Des coefficients de Bézout ●○○

En remontant l'algorithme d'Euclide de l'exercice 2, trouve deux entiers u et v tels que $35u + 18v = 1$.

Exercice 4 — Le théorème de Gauss ●○○

a. On sait que 7 divise $4n$. Montre que 7 divise n.

b. Si 6 divise $4n$, 6 divise-t-il forcément n ?

Exercice 5 L'équation 5x + 3y = 1 ●●○

Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $5x + 3y = 1$.

Exercice 6 Des solutions ou pas ? ●●○

a. L'équation $12x + 18y = 7$ a-t-elle des solutions entières ?

b. Résous $12x + 18y = 30$ dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice 7 — Un inverse modulo 26 ●●○

Trouve un entier u tel que $7u \equiv 1\ [26]$, à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

Exercice 8 — Un PGCD qui dépend de n ●●○

a. Montre que $\text{PGCD}(n\,;n+1) = 1$ pour tout entier n.

b. Montre que $\text{PGCD}(2n+1\,;n+3)$ divise 5, puis donne les valeurs de n pour lesquelles il vaut 5.

Exercice 9 — Payer avec des billets de 7 et 11 ●●○

Dans un jeu, on dispose de billets de 7 et de 11 crédits. On veut payer exactement 100 crédits, sans rendu de monnaie.

a. Résous $7x + 11y = 100$ dans $\mathbb{Z}^2$ (vérifie que $(8\,;4)$ est solution).

b. Combien de billets de chaque sorte faut-il ?

Exercice 10 — Gauss avec un produit ●●○

Soit n un entier tel que 15 divise $4n$. Montre que n est un multiple de 15. Déduis-en les solutions de $4n \equiv 0\ [15]$.

Exercice 11 Deux conditions de reste ●●●

Détermine les entiers x tels que $x \equiv 2\ [3]$ et $x \equiv 3\ [5]$.

Exercice 12 Retrouver deux nombres ●●●

Détermine les couples d'entiers naturels $(a\,;b)$ avec $a \leqslant b$, de PGCD 6 et de PPCM 72. (On rappelle que $ab = \text{PGCD} \times \text{PPCM}$.)

Exercice 13 TYPE CONTRÔLE **Carrelage et engrenages** ●●●

Partie A : le carrelage

On veut recouvrir un sol rectangulaire de 252 cm sur 198 cm avec des carreaux carrés identiques, sans découpe, les plus grands possible.

1. Quelle est la taille des carreaux ? Combien en faut-il ?

Partie B : les engrenages

Deux roues dentées de 24 et 36 dents sont engrenées. On marque une dent de chaque roue au point de contact.

2. Au bout de combien de dents passées les deux marques se retrouvent-elles en contact pour la première fois ?
3. Combien de tours chaque roue a-t-elle alors effectués ?
4. Vérifie que $\text{PGCD}(24\,;36) \times \text{PPCM}(24\,;36) = 24 \times 36$.

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE **Des points à coordonnées entières** ●●●

On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $3x - 5y = 2$.

1. Vérifie que le point $(4\,;2)$ est sur $\mathscr{D}$.
2. Détermine tous les points de $\mathscr{D}$ à coordonnées entières.
3. Combien ont une abscisse comprise entre 0 et 100 ?
4. Écris une fonction Python qui compte ces points en testant toutes les abscisses de 0 à 100.

Exercice 15 TYPE BAC Un chiffrement affine ●●●

On numérote les lettres de $A = 0$ à $Z = 25$. Pour coder une lettre de rang x, on calcule le reste y de $7x + 3$ modulo 26 ; la lettre codée est celle de rang y.

1. Code la lettre M (rang 12).
2. Montre que $7 \times 15 \equiv 1\ [26]$.
3. Montre que si $y \equiv 7x + 3\ [26]$, alors $x \equiv 15y + 7\ [26]$.
4. Décode la lettre J (rang 9). Deux lettres différentes peuvent-elles avoir le même code ?

Exercice 16 TYPE BAC L'équation 17x – 6y = 1 ●●●

1. Vérifie que $(5\,;14)$ est solution de $17x - 6y = 1$, puis résous cette équation dans $\mathbb{Z}^2$.
2. On cherche les entiers N tels que $N \equiv 3\ [17]$ et $N \equiv 2\ [6]$. Montre que $N = 3 + 17x = 2 + 6y$ avec $17x - 6y = -1$.
3. Déduis-en que $N \equiv 20\ [102]$.
4. Quel est le plus petit entier supérieur à $1\,000$ qui convient ?

CAMPUS XYZ

Corrigés

Exercices sur le PGCD et les théorèmes de Bézout et de Gauss en maths expertes

Exercices sur le PGCD et les théorèmes de Bézout et de Gauss en maths expertes : corrigés

CAMPUS XYZ

Exercice 1 L'algorithme d'Euclide ●○○

$1\,071 = 2 \times 462 + 147$; $462 = 3 \times 147 + 21$; $147 = 7 \times 21 + 0$. Le PGCD est le dernier reste non nul : $\mathrm{PGCD}(1\,071\,;462) = 21$.

Exercice 2 Premiers entre eux ? ●○○

- $35 = 18 + 17$, $18 = 17 + 1$, $17 = 17 \times 1$: $\mathrm{PGCD}(35\,;18) = 1$, 35 et 18 sont premiers entre eux.
- $126 = 84 + 42$, $84 = 2 \times 42$: $\mathrm{PGCD}(84\,;126) = 42$.

Exercice 3 Des coefficients de Bézout ●○○

$1 = 18 - 17$ et $17 = 35 - 18$, donc $1 = 18 - (35 - 18) = 2 \times 18 - 35$. $u = -1$ **et** $v = 2$.

Exercice 4 Le théorème de Gauss ●○○

a. 7 divise $4n$ et $\mathrm{PGCD}(7\,;4) = 1$: d'après le théorème de Gauss, 7 **divise** n.

b. **Non** : 6 divise $4 \times 3 = 12$ mais pas 3. Ici $\mathrm{PGCD}(6\,;4) = 2 \neq 1$: Gauss ne s'applique pas.

Exercice 5 L'équation 5x + 3y = 1 ●●○

Solution particulière : $(2\,;-3)$ car $10 - 9 = 1$. Si $(x\,;y)$ est solution, $5(x-2) = 3(-3-y)$. 5 divise $3(-3-y)$ et $\mathrm{PGCD}(5\,;3) = 1$: $5 \mid -3-y$, soit $y = -3-5k$, puis $x = 2+3k$. Réciproquement, ces couples conviennent. $S = \{(2+3k\,;-3-5k),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

> Pour résoudre $ax + by = c$: on vérifie que $\mathrm{PGCD}(a,b)$ divise c, on trouve une solution particulière, on soustrait, puis on applique le théorème de Gauss.

Exercice 6 Des solutions ou pas ? ●●○

a. $12x + 18y$ est toujours multiple de 6, pas 7 : **aucune solution**.

b. On divise par 6 : $2x + 3y = 5$, solution particulière $(1\,;1)$. $2(x-1) = 3(1-y)$ donne $x = 1+3k$, $y = 1-2k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 7 — Un inverse modulo 26 ●●○

$26 = 3 \times 7 + 5$, $7 = 5 + 2$, $5 = 2 \times 2 + 1$. En remontant :
$1 = 5 - 2 \times 2 = 5 - 2(7 - 5) = 3 \times 5 - 2 \times 7 = 3(26 - 3 \times 7) - 2 \times 7 = 3 \times 26 - 11 \times 7$.
Donc $7 \times (-11) \equiv 1\ [26]$ et $u \equiv -11 \equiv 15\ [26]$ (vérification : $7 \times 15 = 105 = 4 \times 26 + 1$).

Exercice 8 — Un PGCD qui dépend de n ●●○

a. Un diviseur commun divise $(n+1) - n = 1$.

b. $2n + 1 = 2(n+3) - 5$: un diviseur commun divise 5, donc le PGCD vaut 1 ou 5. Il vaut 5 si $5 \mid n + 3$ (alors $5 \mid 2n + 1$ aussi), soit $n \equiv 2\ [5]$.

Exercice 9 — Payer avec des billets de 7 et 11 ●●○

a. $56 + 44 = 100$. $7(x - 8) = 11(4 - y)$ et Gauss : $x = 8 + 11k, y = 4 - 7k, k \in \mathbb{Z}$.

b. On veut $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$: $k \geqslant -\dfrac{8}{11}$ et $k \leqslant \dfrac{4}{7}$, donc $k = 0$. **8 billets de 7 et 4 billets de 11.**

Exercice 10 — Gauss avec un produit ●●○

$\mathrm{PGCD}(15\,;4) = 1$ et $15 \mid 4n$: par le théorème de Gauss, $15 \mid n$. Les solutions sont $n \equiv 0\ [15]$.

Exercice 11 — Deux conditions de reste ●●●

$x = 3 + 5k$ et $3 + 5k \equiv 2\ [3] \iff 2k \equiv -1 \equiv 2\ [3] \iff k \equiv 1\ [3]$ (2 est inversible modulo 3). Donc $k = 1 + 3m$ et $x = 8 + 15m$. $x \equiv 8\ [15]$.

Exercice 12 — Retrouver deux nombres ●●●

$a = 6a'$, $b = 6b'$ avec a' et b' premiers entre eux, et $ab = 432$ donne $a'b' = 12$. Couples premiers entre eux de produit 12 : $(1\,;12)$ et $(3\,;4)$ (pas $(2\,;6)$). **$(6\,;72)$ et $(18\,;24)$.**

Exercice 13 — TYPE CONTRÔLE — Carrelage et engrenages ●●●

1. Le côté divise 252 et 198, et doit être le plus grand : $\mathrm{PGCD}(252\,;198) = 18$. **Carreaux de 18 cm**, soit $14 \times 11 = 154$ **carreaux**.
2. Le nombre de dents passées doit être un multiple de 24 et de 36 : $\mathrm{PPCM}(24\,;36) = 72$.
3. **3 tours pour la petite roue, 2 pour la grande.**
4. $\mathrm{PGCD} = 12$ et $12 \times 72 = 864 = 24 \times 36$.

Exercice 14 — TYPE CONTRÔLE — Des points à coordonnées entières ●●●

1. $12 - 10 = 2$.
2. $3(x-4) = 5(y-2)$ et $\text{PGCD}(3\,;5) = 1 : 5 \mid x - 4$. **Points** $(4 + 5k\,;2 + 3k)$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. $0 \leqslant 4 + 5k \leqslant 100 \iff -0{,}8 \leqslant k \leqslant 19{,}2 : k$ de 0 à 19, 20 **points**.
4.

```
def compte():
    c = 0
    for x in range(101):
        if (3*x - 2) % 5 == 0:
            c = c + 1
    return c
```

($y = \dfrac{3x-2}{5}$ doit être entier.)

Exercice 15 — TYPE BAC — Un chiffrement affine ●●●

1. $7 \times 12 + 3 = 87 = 3 \times 26 + 9$: **M est codé J**.
2. $105 = 4 \times 26 + 1$.
3. On multiplie par 15 : $15y \equiv 105x + 45 \equiv x + 45\ [26]$, donc $x \equiv 15y - 45 \equiv 15y + 7\ [26]$ (car $-45 = -2 \times 26 + 7$).
4. $15 \times 9 + 7 = 142 = 5 \times 26 + 12$: **J se décode en M**. Le décodage donne une seule lettre : **deux lettres différentes ont des codes différents**.

Exercice 16 — TYPE BAC — L'équation 17x − 6y = 1 ●●●

1. $85 - 84 = 1$. $17(x-5) = 6(y-14)$, $\text{PGCD}(17\,;6) = 1 : x = 5 + 6k$, $y = 14 + 17k$.
2. $N = 3 + 17x$ et $N = 2 + 6y$ donnent $17x - 6y = -1$.
3. Les solutions de $17x - 6y = -1$ sont les opposées : $x = -5 + 6k$. Donc $N = 3 + 17(-5 + 6k) = -82 + 102k$, soit $N \equiv 20\ [102]$.
4. $20 + 102 \times 10 = 1\,040 : 1\,040$.

LES FICHES MAGIQUES TERMINALE SPÉ MATHS

Révise la spé maths de terminale avec les fiches magiques



- **41 fiches claires et illustrées** : tout le programme de spécialité maths de terminale, une notion par page.
- **Des vidéos méthode** accessibles par QR code sur les fiches.
- **Des exercices corrigés** après chaque fiche pour vérifier que tout est acquis.

campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

ANNALES BAC MATHS TERMINALE 2027

Prépare le bac avec les vrais sujets



- **75 sujets types** tirés des vrais sujets du bac, classés par chapitre.
- **3 bacs blancs complets** pour s'entraîner en conditions réelles.
- Des **corrigés avec la rédaction attendue**, des conseils et un aide-mémoire.

campusxyz.fr/produit/annales-bac-2027-terminale-spe-maths