Exercice 1 — Multiples et diviseurs ●○○

a. Écris la liste de tous les diviseurs de 36.

b. 91 est-il un multiple de 7 ? 7 est-il un diviseur de 91 ?

c. Donne les cinq premiers multiples positifs de 12.

Exercice 2 — Les critères de divisibilité ●○○

Le nombre $2\,340$ est-il divisible par 2 ? par 3 ? par 4 ? par 5 ? par 9 ? par 10 ? Même question pour $1\,001$.

Exercice 3 — Nombre premier ou pas ? ●○○

Parmi ces nombres, lesquels sont premiers ? Justifie.

a. 51 **b.** 53 **c.** 57

d. 91 **e.** 97 **f.** 101

Exercice 4 Décomposer en facteurs premiers ●○○

Décompose en produit de facteurs premiers.

a. 360 **b.** $1\,050$ **c.** 84

d. 126

Exercice 5 Le plus grand multiple ●○○

a. Quel est le plus grand multiple de 7 inférieur ou égal à 100 ?

b. Quel est le plus petit multiple de 13 supérieur à 200 ?

Exercice 6 Rendre une fraction irréductible ●●○

À l'aide des décompositions en facteurs premiers, rends irréductibles les fractions suivantes.

a. $\dfrac{84}{126}$ **b.** $\dfrac{360}{1\,050}$ **c.** $\dfrac{2^4 \times 3 \times 5}{2^2 \times 3^3}$

Exercice 7 — Pair ou impair ? ●●○

Un nombre pair s'écrit $2k$ et un nombre impair $2k+1$, avec k entier.

a. Démontre que la somme de deux nombres impairs est paire.

b. Démontre que le produit d'un nombre pair par un entier quelconque est pair.

Exercice 8 — Le carré d'un nombre impair ●●○

a. Calcule 3^2, 5^2, 7^2. Que remarques-tu ?

b. Démontre que le carré d'un nombre impair est impair.

Exercice 9 La somme de deux multiples ●●○

a. Démontre que la somme de deux multiples de 7 est un multiple de 7.

b. Sans calcul posé, explique pourquoi $700 + 63$ est un multiple de 7.

c. La somme de deux nombres qui ne sont pas multiples de 7 peut-elle être un multiple de 7 ?

Exercice 10 Trois entiers consécutifs ●●○

a. Démontre que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.

b. La somme de quatre entiers consécutifs est-elle toujours un multiple de 4 ?

Exercice 11 — Des bouquets identiques ●●○

Un fleuriste a 84 roses et 126 tulipes. Il veut faire le plus grand nombre possible de bouquets identiques en utilisant toutes les fleurs.

a. Explique pourquoi le nombre de bouquets doit être un diviseur commun de 84 et de 126.

b. Combien de bouquets peut-il faire au maximum ? Quelle est la composition de chaque bouquet ?

Exercice 12 — Toujours pair ? ●●●

a. Démontre que, pour tout entier n, le nombre $n^2 + n$ est pair (indice : factorise).

b. Déduis-en que $n^2 + n + 1$ est toujours impair, puis que l'équation $n^2 + n + 1 = 0$ n'a pas de solution entière.

Exercice 13 TYPE CONTRÔLE **Pair, impair : quatre démonstrations** ●●●

n et m désignent des nombres entiers. On rappelle qu'un nombre pair s'écrit $2k$ et un nombre impair $2k+1$, avec k entier.

1. Démontre que la somme de deux nombres impairs est paire.
2. Démontre que le produit de deux nombres impairs est impair.
3. Démontre que n^2+n est toujours pair (on pourra factoriser, puis distinguer deux cas).
4. Démontre que $(n+1)^2-(n-1)^2$ est toujours un multiple de 4.
5. Vrai ou faux : « la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3 » ? et « ☐ de 6 » ?

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE **Des dalles carrées sans découpe** ●●●

On veut couvrir le sol d'une salle rectangulaire de 756 cm sur $1\,260$ cm avec des dalles carrées toutes identiques, sans aucune découpe. Le côté des dalles est un nombre entier de centimètres.

1. Décompose 756 et $1\,260$ en produits de facteurs premiers.
2. Rends la fraction $\dfrac{756}{1\,260}$ irréductible.
3. Pourquoi le côté des dalles doit-il être un diviseur commun à 756 et à $1\,260$? Peut-on utiliser des dalles de 30 cm ? de 36 cm ?
4. Quel est le plus grand côté possible ? Combien faut-il alors de dalles ?
5. On veut des dalles d'au plus 50 cm de côté. Quel est le plus grand côté possible ?

Exercice 15 TYPE CONTRÔLE **À la chasse aux nombres premiers** ●●●

1. Écris la liste de tous les diviseurs de 84. Combien en a-t-il ?
2. On veut savoir si 221 est premier. Pourquoi suffit-il de tester les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{221} \approx 14{,}9$? 221 est-il premier ?
3. 223 est-il premier ?
4. On considère $P(n) = n^2 + n + 41$. Calcule $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$: ces nombres sont-ils premiers ?
5. Sans calculer, démontre que $P(40)$ n'est pas premier (factorise $40^2 + 40$). Que peut-on en conclure sur la conjecture « $P(n)$ est toujours premier » ?

Exercice 16 TYPE CONTRÔLE Les nombres parfaits ●●●

Un nombre entier est dit **parfait** s'il est égal à la somme de ses diviseurs autres que lui-même. Par exemple, $6 = 1 + 2 + 3$.

1. Écris la liste des diviseurs de 28, puis démontre que 28 est parfait.
2. 12 est-il parfait ? Et 16 ?
3. Décompose 496 en produit de facteurs premiers. Vérifie que 31 est premier.
4. Déduis-en la liste des diviseurs de 496.
5. 496 est-il parfait ?



LA FICHE MAGIQUE QUI VA AVEC

« Multiples, diviseurs et nombres premiers »

Multiples, diviseurs, parité et nombres premiers expliqués pas à pas sur une fiche.

Les fiches magiques seconde : campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-2de

CAMPUS XYZ

Corrigés

Exercices sur l'arithmétique en seconde

Exercice 1 — Multiples et diviseurs ●○○

a est un multiple de b s'il existe un entier k tel que $a = kb$; on dit aussi que b est un diviseur de a.

a. On cherche les produits égaux à 36 : 1×36, 2×18, 3×12, 4×9, 6×6. Diviseurs : $1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$.

b. $91 = 7 \times 13$: **oui aux deux questions** (c'est la même information).

c. $12, 24, 36, 48, 60$.

Exercice 2 — Les critères de divisibilité ●○○

- $2\,340$: dernier chiffre 0, donc divisible par 2, 5 **et** 10 ; 40 est divisible par 4, donc par 4 ; somme des chiffres $2 + 3 + 4 + 0 = 9$, donc divisible par 3 **et** 9.
- $1\,001$: dernier chiffre 1, ni par 2, ni par 4, ni par 5, ni par 10 ; somme des chiffres 2, ni par 3, ni par 9. Il n'est divisible par **aucun** de ces nombres (pourtant $1\,001 = 7 \times 11 \times 13$).

Exercice 3 — Nombre premier ou pas ? ●○○

Un nombre premier a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même. On teste les nombres premiers 2, 3, 5, 7 (jusqu'à $\sqrt{n}$).

- $51 = 3 \times 17$, $57 = 3 \times 19$ et $91 = 7 \times 13$: **pas premiers**.
- 53, 97 **et** 101 **sont premiers** : aucun des nombres 2, 3, 5, 7 ne les divise (et $11^2 = 121 > 101$).

Exercice 4 — Décomposer en facteurs premiers ●○○

On divise par les nombres premiers dans l'ordre (2, 3, 5, 7…) tant que c'est possible.

a. $360 = \mathbf{2^3 \times 3^2 \times 5}$

b. $1\,050 = \mathbf{2 \times 3 \times 5^2 \times 7}$

c. $84 = \mathbf{2^2 \times 3 \times 7}$

d. $126 = \mathbf{2 \times 3^2 \times 7}$

Exercice 5 — Le plus grand multiple ●○○

a. $100 = 7 \times 14 + 2$: c'est $7 \times 14 = 98$.

b. $200 = 13 \times 15 + 5$: c'est $13 \times 16 = 208$.

Exercice 6 — Rendre une fraction irréductible ●●○

On simplifie par tous les facteurs premiers communs.

- $\dfrac{2^2 \times 3 \times 7}{2 \times 3^2 \times 7} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$.
- $\dfrac{2^3 \times 3^2 \times 5}{2 \times 3 \times 5^2 \times 7} = \dfrac{2^2 \times 3}{5 \times 7} = \boldsymbol{\dfrac{12}{35}}$.
- $\dfrac{2^2 \times 5}{3^2} = \boldsymbol{\dfrac{20}{9}}$.

Exercice 7 — Pair ou impair ? ●●○

a. On prend deux impairs $2k+1$ et $2k'+1$ (k, k' entiers, pas forcément égaux) : $(2k+1)+(2k'+1) = 2k+2k'+2 = 2(k+k'+1)$. Comme $k+k'+1$ est entier, **la somme est paire**.

b. $2k \times n = 2(kn)$ avec kn entier : **le produit est pair**.

> On utilise deux lettres différentes (k et k') : sinon on ne traiterait que deux nombres égaux.

Exercice 8 — Le carré d'un nombre impair ●●○

a. $9, 25, 49$: **ils sont tous impairs**. Des exemples ne suffisent pas à le prouver.

b. Un nombre impair s'écrit $2k+1$:

$$\begin{aligned}(2k+1)^2 &= 4k^2+4k+1\\ &= 2(2k^2+2k)+1\end{aligned}$$

$2k^2+2k$ est entier, donc $(2k+1)^2$ **est impair**.

Exercice 9 — La somme de deux multiples ●●○

a. $7k+7k' = 7(k+k')$ avec $k+k'$ entier : **c'est un multiple de 7**.

b. $700 = 7 \times 100$ et $63 = 7 \times 9$ sont des multiples de 7, donc leur somme 763 **aussi** ($763 = 7 \times 109$).

c. **Oui** : $3+4=7$, alors que ni 3 ni 4 ne sont multiples de 7.

Exercice 10 — Trois entiers consécutifs ●●○

a. On note $n-1, n, n+1$ les trois entiers : $(n-1)+n+(n+1)=3n$, **un multiple de** 3.

b. $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)=4n+6$. Contre-exemple : $1+2+3+4=10$, qui n'est pas un multiple de 4. **Non**.

Exercice 11 — Des bouquets identiques ●●○

a. Les roses doivent se répartir également entre les bouquets : le nombre de bouquets divise 84. De même pour les 126 tulipes.

b. $84=2^2\times3\times7$ et $126=2\times3^2\times7$. Le plus grand diviseur commun est $2\times3\times7=42$. 42 **bouquets**, de 2 **roses et** 3 **tulipes** chacun.

Exercice 12 — Toujours pair ? ●●●

a. $n^2+n=n(n+1)$: c'est le produit de deux entiers consécutifs. L'un des deux est pair, donc **le produit est pair**.

b. n^2+n est pair, donc n^2+n+1 est **impair**. Un nombre impair n'est jamais égal à 0 (qui est pair) : **pas de solution entière**.

Exercice 13 — TYPE CONTRÔLE — Pair, impair : quatre démonstrations ●●●

1. $(2k+1)+(2k'+1)=2k+2k'+2=2(k+k'+1)$: c'est un multiple de 2, **la somme est paire**.
2. $(2k+1)(2k'+1)=4kk'+2k+2k'+1=2(2kk'+k+k')+1$: **le produit est impair**.
3. $n^2+n=n(n+1)$: c'est le produit de deux entiers consécutifs. Si n est pair, le produit est pair ; si n est impair, $n+1$ est pair et le produit aussi. n^2+n **est toujours pair**.
4. $(n+1)^2-(n-1)^2=\left(n^2+2n+1\right)-\left(n^2-2n+1\right)=4n$: **c'est un multiple de** 4.
5. $(n-1)+n+(n+1)=3n$: **vrai, c'est toujours un multiple de** 3. Mais $1+2+3=6$ et $2+3+4=9$: 9 n'est pas un multiple de 6. **Faux pour** 6 (un seul contre-exemple suffit).

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE Des dalles carrées sans découpe ●●●

1. $756 = 2 \times 378 = 2^2 \times 189 = 2^2 \times 3^3 \times 7$;
   $1\,260 = 2 \times 630 = 2^2 \times 315 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$.
   $756 = 2^2 \times 3^3 \times 7$ et $1\,260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$.

2. On simplifie par les facteurs communs $2^2 \times 3^2 \times 7 = 252$: $\dfrac{756}{1\,260} = \dfrac{3}{5}$.

3. Il faut un nombre entier de dalles sur chaque côté : le côté divise 756 et $1\,260$.
   30 ne divise pas 756 ($756 = 30 \times 25 + 6$) : **non**. $36 = 2^2 \times 3^2$ divise les deux ($756 = 36 \times 21$, $1\,260 = 36 \times 35$) : **oui**.

4. Le plus grand diviseur commun est le produit des facteurs communs : $2^2 \times 3^2 \times 7 = 252$ **cm**. Il faut $\dfrac{756}{252} \times \dfrac{1\,260}{252} = 3 \times 5 = 15$ **dalles**.

5. Les diviseurs communs sont les diviseurs de 252 :
   $1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 18, 21, 28, 36, 42, 63, 84, 126, 252$. Le plus grand qui ne dépasse pas 50 est 42 **cm** ($18 \times 30 = 540$ dalles).

Exercice 15 TYPE CONTRÔLE À la chasse aux nombres premiers ●●●

1. On cherche les produits égaux à 84 : 1×84, 2×42, 3×28, 4×21, 6×14, 7×12.
   Diviseurs : $1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84$**, soit** 12 **diviseurs**.

2. Si $221 = a \times b$ avec $a \leqslant b$, alors $a^2 \leqslant 221$, donc $a \leqslant \sqrt{221}$: un diviseur, s'il existe, est au plus 14.
   On teste $2, 3, 5, 7, 11, 13$: $221 = 13 \times 17$. 221 **n'est pas premier**.

3. $\sqrt{223} \approx 14{,}9$. 223 est impair, la somme de ses chiffres (7) n'est pas un multiple de 3, il ne finit pas par 0 ou 5, et $223 = 7 \times 31 + 6 = 11 \times 20 + 3 = 13 \times 17 + 2$. 223 **est premier**.

4. $P(0) = 41$, $P(1) = 43$, $P(2) = 47$, $P(3) = 53$: **ils sont tous premiers**.

5. $P(40) = 40^2 + 40 + 41 = 40 \times 41 + 41 = 41 \times 41$: $P(40) = 41^2$ **n'est pas premier**.
   Des exemples ne suffisent pas à démontrer une propriété : **la conjecture est fausse**, il suffit d'un contre-exemple.



La méthode pas à pas est dans la fiche magique **« Multiples, diviseurs et nombres premiers »** (Les fiches magiques seconde, page 20).

Exercice 16 TYPE CONTRÔLE Les nombres parfaits ●●●

1. Diviseurs de 28 : $1, 2, 4, 7, 14, 28$. $1+2+4+7+14=28$: 28 **est parfait**.
2. 12 : $1+2+3+4+6=16\neq 12$, **non**. 16 : $1+2+4+8=15\neq 16$, **non**.
3. $496=2\times 248=2^2\times 124=2^3\times 62=2^4\times 31$. 31 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5 ($\sqrt{31}<6$) : $496=2^4\times 31$, **avec 31 premier**.
4. Un diviseur s'écrit 2^a ou $2^a\times 31$ avec a de 0 à 4 : $1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248, 496$.
5. $1+2+4+8+16=31$ et $31+62+124+248=465$; au total $31+465=496$. **Oui, 496 est parfait**.



La méthode pas à pas est dans la fiche magique **« Multiples, diviseurs et nombres premiers »** (Les fiches magiques seconde, page 20).

LES FICHES MAGIQUES SECONDE

Révise toute la seconde avec les fiches magiques



- **Plus de 40 fiches claires et illustrées** : tout le programme de seconde, une notion par page.
- **Des vidéos méthode** accessibles par QR code sur les fiches.
- **Des exercices corrigés** après chaque fiche pour vérifier que tout est acquis.

campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-2de