Exercices sur les racines carrées en seconde

CAMPUS XYZ

Exercice 1 — Calculer des racines carrées ●○○

Calcule sans calculatrice.

a. $\sqrt{49}$

b. $\sqrt{0{,}25}$

c. $\sqrt{\dfrac{9}{16}}$

d. $(\sqrt{7})^2$

e. $\sqrt{3^2}$

f. $\sqrt{(-5)^2}$

Exercice 2 — Simplifier une racine ●○○

Écris sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b entiers et b le plus petit possible.

a. $\sqrt{12}$

b. $\sqrt{50}$

c. $\sqrt{72}$

d. $\sqrt{200}$

e. $\sqrt{45}$

Exercice 3 — Produits et quotients ●○○

Calcule et simplifie.

a. $\sqrt{3} \times \sqrt{12}$

b. $2\sqrt{5} \times 3\sqrt{5}$

c. $(\sqrt{2})^3$

d. $\sqrt{6} \times \sqrt{15}$

e. $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$

Exercice 4 — Le piège de la somme ●○○

a. Calcule $\sqrt{9+16}$, puis $\sqrt{9}+\sqrt{16}$. Que remarques-tu ?

b. Calcule $\sqrt{100-36}$, puis $\sqrt{100}-\sqrt{36}$.

Exercice 5 — Réduire des sommes ●●○

Écris sous la forme $a\sqrt{b}$.

$A = 3\sqrt{2}+5\sqrt{2}$

$B = \sqrt{12}+\sqrt{27}$

$C = \sqrt{50}-\sqrt{18}$

$D = 2\sqrt{20}-3\sqrt{45}+\sqrt{5}$

Exercice 6 Développer avec des racines ●●○

Développe et réduis.

$A = (1+\sqrt{2})^2$

$B = (\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)$

$C = (2\sqrt{5}-3)^2$

$D = \sqrt{2}(3-\sqrt{8})$

Exercice 7 Un dénominateur sans racine ●●○

Écris chaque nombre avec un dénominateur entier.

a. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

b. $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$

c. $\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{10}}$

d. $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$

Exercice 8 — Des longueurs exactes ●●○

Un triangle ABC est rectangle en A, avec $AB = 2$ cm et $AC = 4$ cm.

a. Calcule la valeur exacte de BC, sous la forme $a\sqrt{b}$.

b. Donne la valeur exacte du périmètre, puis son arrondi au millimètre.

Exercice 9 — Comparer des racines ●●○

Compare sans calculatrice.

a. $3\sqrt{2}$ et $2\sqrt{3}$

b. $2\sqrt{5}$ et $\sqrt{10}$

c. 5 et $2\sqrt{6}$

Exercice 10 Un rectangle aux côtés irrationnels ●●○

Un rectangle a pour côtés $\sqrt{8}$ cm et $\sqrt{2}$ cm.

a. Calcule son aire et son périmètre exacts.

b. Calcule la longueur exacte de sa diagonale.

Exercice 11 Racine d'un carré ●●○

a. Écris sans racine : $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$ et $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$.

b. Écris $\sqrt{(x-3)^2}$ sans racine, puis calcule-le pour $x = 1$ et pour $x = 7$.

Exercice 12 Le nombre d'or ●●●

On pose $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or).

a. Calcule φ^2 et montre que $\varphi^2 = \varphi + 1$.

b. Montre que $\dfrac{1}{\varphi} = \varphi - 1$.

Exercice 13 TYPE CONTRÔLE **Calculs exacts avec des racines** ●●●

Écris chaque nombre sous la forme $a + b\sqrt{c}$, $a\sqrt{c}$ ou sous la forme d'un entier, avec c entier le plus petit possible.

$A = \sqrt{50} - 3\sqrt{8} + \sqrt{18}$

$B = \left(3 - \sqrt{2}\right)^2$

$C = \left(2\sqrt{3} + 1\right)\left(2\sqrt{3} - 1\right)$

$D = \left(1 + \sqrt{5}\right)^2 - \left(1 - \sqrt{5}\right)^2$

$E = \dfrac{6}{\sqrt{3}}$

$F = \dfrac{1}{\sqrt{5} - 2}$

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE **Un triangle aux côtés irrationnels** ●●●

ABC est un triangle tel que $AB = \sqrt{12}$ cm, $AC = \sqrt{48}$ cm et $BC = \sqrt{60}$ cm.

1. Écris chaque longueur sous la forme $a\sqrt{b}$, avec b le plus petit possible.
2. Démontre que le triangle ABC est rectangle.
3. Calcule la valeur exacte du périmètre de ABC, puis une valeur approchée au millimètre.
4. Calcule l'aire exacte de ABC.
5. On note H le pied de la hauteur issue de A. En calculant l'aire de deux façons, démontre que $AH = \dfrac{4\sqrt{15}}{5}$ cm.

Exercice 15 TYPE CONTRÔLE La spirale des racines carrées ●●●

On construit une spirale de triangles rectangles : OA_1A_2 est rectangle en A_1 avec $OA_1 = A_1A_2 = 1$; puis OA_2A_3 est rectangle en A_2 avec $A_2A_3 = 1$; puis OA_3A_4 est rectangle en A_3 avec $A_3A_4 = 1$, et ainsi de suite.

1. Calcule OA_2, OA_3 et OA_4.
2. Justifie que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $OA_n = \sqrt{n}$.
3. Quelles sont les longueurs OA_n entières lorsque n va de 1 à 20 ?
4. Pour quelle valeur de n a-t-on $OA_n = 2\sqrt{5}$? $OA_n = 3\sqrt{2}$?
5. Exprime l'aire du triangle OA_nA_{n+1} en fonction de n. Calcule la valeur exacte de l'aire totale des trois premiers triangles.

Exercice 16 TYPE CONTRÔLE Le secret du format A4 ●●●

Les feuilles au format A ont une propriété : quand on plie une feuille en deux (en coupant la longueur en deux), on obtient une feuille de même forme, c'est-à-dire avec le même rapport $\dfrac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$. On note L la longueur et ℓ la largeur d'une feuille.

1. Quelles sont la longueur et la largeur de la demi-feuille, en fonction de L et ℓ ?
2. Traduis la propriété par une égalité, puis démontre que $L^2 = 2\ell^2$ et que $\dfrac{L}{\ell} = \sqrt{2}$.
3. Une feuille A4 mesure 21 cm de large. Calcule la valeur exacte de sa longueur, puis une valeur approchée au millimètre. Compare avec $29{,}7$ cm.
4. La feuille A5 est une demi-feuille A4. Donne ses dimensions exactes, en écrivant la largeur sans racine au dénominateur.
5. Calcule la valeur exacte de la diagonale d'une feuille A4.



LA FICHE MAGIQUE QUI VA AVEC

« Racine carrée »

Simplifier une racine, calculer avec des radicaux et éviter les pièges expliqués pas à pas sur une fiche.

Les fiches magiques seconde : campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-2de

CAMPUS XYZ

Corrigés

Exercices sur les racines carrées en seconde

Exercice 1 — Calculer des racines carrées ●○○

$\sqrt{a}$ est le nombre **positif** dont le carré vaut a.

a. $\mathbf{7}$

b. $\mathbf{0{,}5}$

c. $\mathbf{\frac{3}{4}}$

d. $\mathbf{7}$

e. $\mathbf{3}$

f. $\sqrt{25} = \mathbf{5}$

> $\sqrt{(-5)^2} = 5$ et non -5 : pour tout réel a, $\sqrt{a^2} = |a|$.

Exercice 2 — Simplifier une racine ●○○

On fait apparaître le plus grand carré parfait : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

a. $\sqrt{4 \times 3} = \mathbf{2\sqrt{3}}$

b. $\sqrt{25 \times 2} = \mathbf{5\sqrt{2}}$

c. $\sqrt{36 \times 2} = \mathbf{6\sqrt{2}}$

d. $\sqrt{100 \times 2} = \mathbf{10\sqrt{2}}$

e. $\sqrt{9 \times 5} = \mathbf{3\sqrt{5}}$

Exercice 3 — Produits et quotients ●○○

a. $\sqrt{36} = \mathbf{6}$

b. $6 \times 5 = \mathbf{30}$

c. $(\sqrt{2})^2 \times \sqrt{2} = \mathbf{2\sqrt{2}}$

d. $\sqrt{90} = \sqrt{9 \times 10} = \mathbf{3\sqrt{10}}$

e. $\sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = \mathbf{5}$

Exercice 4 — Le piège de la somme ●○○

a. $\sqrt{25} = \mathbf{5}$, mais $3 + 4 = \mathbf{7}$: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

b. $\sqrt{64} = \mathbf{8}$, mais $10 - 6 = \mathbf{4}$.

> La racine carrée « passe » dans un produit ou un quotient, jamais dans une somme ou une différence.

Exercice 5 — Réduire des sommes ●●○

On simplifie chaque racine pour faire apparaître la même, puis on réduit comme avec x :
$3x + 5x = 8x$.

$A = \mathbf{8\sqrt{2}}$

$B = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = \mathbf{5\sqrt{3}}$

$C = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \mathbf{2\sqrt{2}}$

$D = 4\sqrt{5} - 9\sqrt{5} + \sqrt{5} = \mathbf{-4\sqrt{5}}$

Exercice 6 — Développer avec des racines ●●○

- $A = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = \mathbf{3 + 2\sqrt{2}}$.
- $B = (\sqrt{3})^2 - 1^2 = \mathbf{2}$.
- $C = (2\sqrt{5})^2 - 2 \times 2\sqrt{5} \times 3 + 9 = 20 - 12\sqrt{5} + 9 = \mathbf{29 - 12\sqrt{5}}$.
- $D = 3\sqrt{2} - \sqrt{16} = \mathbf{3\sqrt{2} - 4}$.

Exercice 7 — Un dénominateur sans racine ●●○

On multiplie en haut et en bas par la racine du dénominateur, ou par l'expression « conjuguée » ($\sqrt{2} + 1$ pour $\sqrt{2} - 1$).

a. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b. $\dfrac{6\sqrt{3}}{3} = \mathbf{2\sqrt{3}}$

c. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\mathbf{\sqrt{2}}}{\mathbf{4}}$

d. $\dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \mathbf{\sqrt{2}+1}$

Exercice 8 — Des longueurs exactes ●●○

a. Pythagore : $BC^2 = 2^2 + 4^2 = 20$, donc $BC = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$ **cm**.

b. Périmètre : $6 + 2\sqrt{5}$ **cm**, soit environ $10{,}5$ **cm**.

Exercice 9 — Comparer des racines ●●○

On fait « rentrer » le coefficient sous la racine : $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$ si $a \geqslant 0$. La fonction racine est croissante.

- $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$ et $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$: $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$.
- $2\sqrt{5} = \sqrt{20} > \sqrt{10}$: $2\sqrt{5} > \sqrt{10}$.
- $5 = \sqrt{25}$ et $2\sqrt{6} = \sqrt{24}$: $5 > 2\sqrt{6}$.

Exercice 10 — Un rectangle aux côtés irrationnels ●●○

a. Aire : $\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$ **cm²**. Périmètre : $2(2\sqrt{2} + \sqrt{2}) = 6\sqrt{2}$ **cm**.

b. $d^2 = 8 + 2 = 10$: $d = \sqrt{10}$ **cm**.

Exercice 11 — Racine d'un carré ●●○

Pour tout réel a, $\sqrt{a^2} = |a|$.

a. $|\sqrt{3} - 2| = \mathbf{2 - \sqrt{3}}$ (car $\sqrt{3} < 2$) ; $|1 - \sqrt{2}| = \mathbf{\sqrt{2} - 1}$.

b. $\sqrt{(x-3)^2} = \mathbf{|x - 3|}$. Pour $x = 1$: 2 ; pour $x = 7$: 4.

Exercice 12 — Le nombre d'or ●●●

a.

$$\varphi^2 = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4}$$
$$= \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

Et $\varphi + 1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \dfrac{2}{2} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$: $\varphi^2 = \varphi + 1$.

b. On divise l'égalité $\varphi^2 = \varphi + 1$ par $\varphi \neq 0$: $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$, donc $\dfrac{1}{\varphi} = \varphi - 1$.

Vérification : $\varphi - 1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $\dfrac{2}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Exercice 13 TYPE CONTRÔLE Calculs exacts avec des racines ●●●

- $A = \sqrt{25 \times 2} - 3\sqrt{4 \times 2} + \sqrt{9 \times 2} = 5\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = \mathbf{2\sqrt{2}}$.
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$: $B = 9 - 6\sqrt{2} + 2 = \mathbf{11 - 6\sqrt{2}}$.
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$: $C = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 1^2 = 4 \times 3 - 1 = \mathbf{11}$.
- $D = \left(1 + 2\sqrt{5} + 5\right) - \left(1 - 2\sqrt{5} + 5\right) = \mathbf{4\sqrt{5}}$.
- On multiplie en haut et en bas par $\sqrt{3}$: $E = \dfrac{6\sqrt{3}}{3} = \mathbf{2\sqrt{3}}$.
- On multiplie par la quantité conjuguée $\sqrt{5} + 2$:

$$F = \frac{\sqrt{5} + 2}{\left(\sqrt{5} - 2\right)\left(\sqrt{5} + 2\right)} = \frac{\sqrt{5} + 2}{5 - 4} = \mathbf{2 + \sqrt{5}}.$$

> Pour enlever une racine d'un dénominateur $\sqrt{a} - b$, on multiplie par $\sqrt{a} + b$: l'identité $(a-b)(a+b)$ fait disparaître la racine.

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE Un triangle aux côtés irrationnels ●●●

1. $AB = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$, $AC = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$, $BC = \sqrt{4 \times 15} = 2\sqrt{15}$.
2. Le plus grand côté est $[BC]$. $BC^2 = 60$ et $AB^2 + AC^2 = 12 + 48 = 60$.
   $BC^2 = AB^2 + AC^2$: d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC **est rectangle en** A.
3. $P = 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{15} = 6\sqrt{3} + 2\sqrt{15}$ **cm**, soit environ $18{,}1$ **cm**.
4. Le triangle est rectangle en A : $\mathscr{A} = \dfrac{AB \times AC}{2} = \dfrac{2\sqrt{3} \times 4\sqrt{3}}{2} = \dfrac{8 \times 3}{2} = 12$ **cm²**.
5. On a aussi $\mathscr{A} = \dfrac{BC \times AH}{2}$, donc $\dfrac{2\sqrt{15} \times AH}{2} = 12$, soit $AH = \dfrac{12}{\sqrt{15}}$.

   $AH = \dfrac{12\sqrt{15}}{15} = \dfrac{4\sqrt{15}}{5}$ **cm** (environ $3{,}1$ cm).

Exercice 15 — TYPE CONTRÔLE — La spirale des racines carrées ●●●

1. Théorème de Pythagore dans chaque triangle rectangle : $OA_2^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, donc $OA_2 = \sqrt{2}$; $OA_3^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1 = 3$, donc $OA_3 = \sqrt{3}$; $OA_4^2 = 3 + 1 = 4$, donc $OA_4 = 2$.
2. À chaque étape, $OA_{n+1}^2 = OA_n^2 + 1$: le carré de la longueur augmente de 1. On part de $OA_1^2 = 1$, donc $OA_n^2 = n$ et $OA_n = \sqrt{n}$.
3. $\sqrt{n}$ est entier quand n est un carré parfait : $OA_1 = 1, OA_4 = 2, OA_9 = 3, OA_{16} = 4$.
4. $2\sqrt{5} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{20}$: $n = 20$. $3\sqrt{2} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{18}$: $n = 18$.
5. Triangle rectangle en A_n de côtés $OA_n = \sqrt{n}$ et $A_nA_{n+1} = 1$: **aire** $= \dfrac{\sqrt{n}}{2}$.

   Aire des trois premiers : $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\mathbf{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$ (environ $2{,}07$).



La méthode pas à pas est dans la fiche magique **« Racine carrée »** (Les fiches magiques seconde, page 18).

Exercice 16 — TYPE CONTRÔLE — Le secret du format A4 ●●●

1. La demi-feuille a pour longueur ℓ et pour largeur $\dfrac{L}{2}$.
2. Même rapport : $\dfrac{L}{\ell} = \dfrac{\ell}{L/2} = \dfrac{2\ell}{L}$. Produit en croix : $L^2 = 2\ell^2$.

   Donc $\dfrac{L^2}{\ell^2} = 2$ et, les longueurs étant positives, $\dfrac{L}{\ell} = \sqrt{2}$.
3. $L = 21\sqrt{2}$ cm $\approx 29{,}7$ **cm** : c'est bien la longueur d'une feuille A4.
4. A5 : longueur 21 cm et largeur $\dfrac{21\sqrt{2}}{2}$ cm (soit $\dfrac{21}{\sqrt{2}}$ rendu sans racine au dénominateur). **A5 :** 21 **cm** × $\dfrac{21\sqrt{2}}{2}$ **cm**, environ 21 cm × $14{,}8$ cm.
5. Pythagore : $d^2 = 21^2 + \left(21\sqrt{2}\right)^2 = 441 + 882 = 1\,323 = 441 \times 3$, donc $d = 21\sqrt{3}$ **cm** (environ $36{,}4$ cm).



La méthode pas à pas est dans la fiche magique **« Racine carrée »** (Les fiches magiques seconde, page 18).

LES FICHES MAGIQUES SECONDE

Révise toute la seconde avec les fiches magiques



- **Plus de 40 fiches claires et illustrées** : tout le programme de seconde, une notion par page.
- **Des vidéos méthode** accessibles par QR code sur les fiches.
- **Des exercices corrigés** après chaque fiche pour vérifier que tout est acquis.

campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-2de