Exercices sur les sommes de variables aléatoires et la concentration en terminale spé maths

CAMPUS XYZ

Exercice 1 — Espérance et variance d'une somme ●○○

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, avec $E(X) = 3$, $V(X) = 2$, $E(Y) = 5$ et $V(Y) = 4$. Calcule :

a. $E(X + Y)$

b. $E(2X - Y + 1)$

c. $V(X + Y)$

d. $V(3X)$

e. $V(X - Y)$

Exercice 2 — La somme de deux dés ●○○

On lance deux dés équilibrés ; D_1 et D_2 sont leurs résultats et $S = D_1 + D_2$.

a. Calcule $E(D_1)$ et montre que $V(D_1) = \dfrac{35}{12}$.

b. Déduis-en $E(S)$ et $V(S)$.

Exercice 3 La loi binomiale, une somme de Bernoulli ●○○

X suit $\mathcal{B}(n\,;p)$. On écrit $X = X_1 + \cdots + X_n$, où X_i vaut 1 si la i-ième épreuve est un succès et 0 sinon.

a. Calcule $E(X_i)$ et $V(X_i)$.

b. Retrouve $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 4 Appliquer Bienaymé-Tchebychev ●○○

Une variable aléatoire X a pour espérance 50 et pour variance 25. Majore $P\big(|X - 50| \geqslant 10\big)$, puis minore $P(40 < X < 60)$.

Exercice 5 La moyenne d'un échantillon ●●○

$X_1,$ [ ] $, X_n$ sont indépendantes et de même loi, d'espérance μ et de variance σ^2. On pose $M_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.

a. Montre que $E(M_n) = \mu$ et $V(M_n) = \dfrac{\sigma^2}{n}$.

b. Calcule $V(M_n)$ et l'écart type de M_n pour $\sigma^2 = 4$ et $n = 100$.

Exercice 6 L'inégalité de concentration ●●○

On lance $1\,000$ fois une pièce équilibrée. M est la fréquence de piles.

a. Donne $E(M)$ et $V(M)$.

b. Majore la probabilité que la fréquence s'écarte de $0{,}5$ d'au moins $0{,}05$.

Exercice 7 — Quelle taille d'échantillon ? ●●○

On veut estimer une proportion p inconnue par la fréquence M_n observée sur n personnes.

On sait que $p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

Quelle taille n suffit pour que $P\left(|M_n - p| \geqslant 0{,}01\right) \leqslant 0{,}05$?

Exercice 8 — Une majoration grossière ●●○

X suit $\mathcal{B}(100\,;0{,}5)$.

a. Avec Bienaymé-Tchebychev, majore $P\left(|X - 50| \geqslant 10\right)$.

b. À la calculatrice, calcule la valeur exacte de cette probabilité. Commente.

Exercice 9 — Un jeu répété 100 fois ●●○

À un jeu, le gain G (en euros) vaut -1 avec probabilité $0{,}6$, 2 avec probabilité $0{,}3$ et 5 avec probabilité $0{,}1$.

a. Calcule $E(G)$ et $V(G)$.

b. On joue 100 parties indépendantes ; T est le gain total. Calcule $E(T)$ et $V(T)$.

c. Minore $P(0 < T < 100)$.

Exercice 10 — Voir la loi des grands nombres ●●○

```
from random import randint
def frequence(n):
    nb = 0
    for i in range(n):
        if randint(1, 6) == 6:
            nb = nb + 1
    return nb / n
```

a. Que renvoie `frequence(n)` ?

b. Vers quelle valeur s'approchent les résultats quand n devient grand ? Quel théorème le justifie ?

Exercice 11 Un intervalle autour de l'espérance ●●●

X suit la loi $\mathcal{B}(400\,;0{,}2)$.

a. Montre que $P(61 \leqslant X \leqslant 99) \geqslant 0{,}84$.

b. Compare avec la valeur exacte, $P(61 \leqslant X \leqslant 99) \approx 0{,}985$.

Exercice 12 Démontrer Bienaymé-Tchebychev ●●●

On admet l'inégalité de Markov : si Y est une variable aléatoire positive et $a > 0$, alors $P(Y \geqslant a) \leqslant \dfrac{E(Y)}{a}$.

En l'appliquant à $Y = \big(X - E(X)\big)^2$, démontre l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 13 TYPE CONTRÔLE La précision d'un sondage ●●●

Dans une grande population, une proportion inconnue p de personnes est favorable à un projet. On interroge n personnes au hasard ; X_i vaut 1 si la i-ième est favorable, 0 sinon, et M_n est la fréquence observée.

1. Donne $E(M_n)$ et $V(M_n)$ en fonction de p et n.
2. Montre que $p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$ pour tout $p \in [0\,;1]$.
3. Pour $n = 1\,000$, montre que $P\big(|M_n - p| \geqslant 0{,}05\big) \leqslant 0{,}1$.
4. Quelle taille d'échantillon garantit $P\big(|M_n - p| \geqslant 0{,}02\big) \leqslant 0{,}05$?
5. Le sondage sur $1\,000$ personnes donne $52\,\%$ d'avis favorables. Peut-on affirmer, avec un risque d'au plus $10\,\%$, que $p > 0{,}5$?

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE **Le temps passé en caisse** ●●●

Le temps de passage d'un client en caisse (en minutes) est une variable aléatoire d'espérance 3 et d'écart type 1. Les temps des clients sont indépendants. Une caissière sert 50 clients ; S est le temps total.

1. Calcule $E(S)$, $V(S)$ et l'écart type de S.
2. Minore la probabilité que S soit strictement compris entre 130 et 170 minutes.
3. La caissière a 2 h 50 min de service. Majore la probabilité qu'elle ne puisse pas servir les 50 clients.
4. On note M le temps moyen par client. Calcule $V(M)$ et majore $P\left(|M-3| \geqslant 0{,}5\right)$.

Exercice 15 BAC 2025 Les groupes sanguins ●●○

Bac spé maths 2025, Métropole, jour 1, exercice 1

On compte quatre groupes sanguins dans l'espèce humaine: A, B, AB et O.

Chaque groupe sanguin peut présenter un facteur rhésus. Lorsqu'il est présent, on dit que le rhésus est positif, sinon on dit qu'il est négatif.

Au sein de la population française, on sait que:

- 45 % des individus appartiennent au groupe A, et parmi eux 85 % sont de rhésus positif;
- 10 % des individus appartiennent au groupe B, et parmi eux 84 % sont de rhésus positif;
- 3 % des individus appartiennent au groupe AB, et parmi eux 82 % sont de rhésus positif.

On choisit au hasard une personne dans la population française.

On désigne par:

- A l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin A » ;
- B l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin B » ;
- AB l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin AB » ;
- O l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin O » ;
- R l'évènement « La personne choisie a un facteur rhésus positif ».

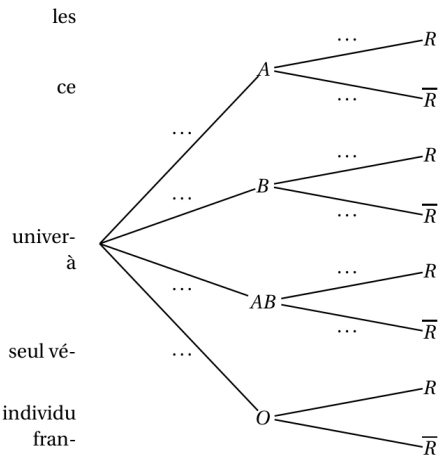
Pour un évènement quelconque E, on note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E et $p(E)$ la probabilité de E.

1. Recopier l'arbre ci-contre en complétant les dix pointillés.
2. Montrer que $p(B \cap R) = 0{,}084$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. On précise que $p(R) = 0{,}8397$.

   Montrer que $p_O(R) = 0{,}83$.
4. On dit qu'un individu est « donneur universel » lorsque son sang peut être transfusé à toute personne sans risque d'incompatibilité.

   Le groupe O de rhésus négatif est le seul vérifiant cette caractéristique.

   Montrer que la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans la population française soit donneur universel est de 0,0714.



1. Lors d'une collecte de sang, on choisit un échantillon de 100 personnes dans la population d'une ville française. Cette population est suffisamment grande pour assimiler ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 100 personnes associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon.

   a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   b. Déterminer à 10^{-3} près la probabilité qu'il y ait au plus 7 donneurs universels dans cet échantillon.

   c. Montrer que l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X est égale à $7{,}14$ et que sa variance $V(X)$ est égale à $6{,}63$ à 10^{-2} près.

2. Lors de la semaine nationale du don du sang, une collecte de sang est organisée dans N villes françaises choisies au hasard numérotées 1,2, 3, ... , N où N est un entier naturel non nul.

   On considère la variable aléatoire X_1 qui à chaque échantillon de 100 personnes de la ville 1 associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon.

   On définit de la même manière les variables aléatoires X_2 pour la ville 2, ... , X_N pour la ville N.

   On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes et qu'elles admettent la même espérance égale à $7{,}14$ et la même variance égale à $6{,}63$.

   On considère la variable aléatoire $M_N = \dfrac{X_1 + X_2 + \square + X_N}{N}$.

   a. Que représente la variable aléatoire M_N dans le contexte de l'exercice ?

   b. Calculer l'espérance $E(M_N)$.

   c. On désigne par $V(M_N)$ la variance de la variable aléatoire M_N.

   Montrer que $V(M_N) = \dfrac{6,63}{N}$.

   d. Déterminer la plus petite valeur de N pour laquelle l'inégalité de Bienaymé- Tchebychev permet d'affirmer que:

   $$P(7 < M_N < 7{,}28) \geqslant 0{,}95.$$

Exercice 16 BAC 2025 Les contrôles en caisse automatique ●●●

Bac spé maths 2025, Centres étrangers, jour 1, exercice 1

Cet exercice est constitué de trois parties indépendantes

Un magasin est équipé de caisses automatiques en libre-service où le client scanne lui- même ses articles. Le logiciel d'une caisse déclenche régulièrement des demandes de vérification. Un employé du magasin effectue alors un contrôle.

Partie A

Le contrôle peut être

- soit « total » : l'employé du magasin scanne alors à nouveau l'ensemble des articles du client ;
- soit « partiel » : l'employé choisit alors un ou plusieurs articles du client pour vérifier qu'ils ont bien été scannés.

Si un contrôle est déclenché, il s'agit une fois sur dix d'un contrôle total.

Lorsqu'un contrôle total est déclenché, une erreur du client est détectée dans 30 % des cas.

Lorsqu'un contrôle partiel est effectué, dans $85\,\%$ des cas, il n'y a pas d'erreur.

Un contrôle est déclenché à une caisse automatique.

On considère les évènements suivants:

- T : « Le contrôle est un contrôle total » ;
- E : « Une erreur est détectée lors du contrôle ».

On notera $\overline{T}$ et $\overline{E}$ les évènements contraires de T et E.

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation puis déterminer $P\left(\overline{T} \cap E\right)$.
2. Calculer la probabilité qu'une erreur soit détectée lors d'un contrôle.
3. Déterminer la probabilité qu'un contrôle total ait été effectué, sachant qu'une erreur a été détectée. *On donnera la valeur arrondie au centième*.

Partie B

Sur une journée donnée, une caisse automatique déclenche 15 contrôles. La probabilité qu'un contrôle mette en évidence une erreur est $p = 0{,}165$. La détection d'une erreur lors d'un contrôle est indépendante des autres contrôles.

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs détectées lors des contrôles de cette journée.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'exactement 5 erreurs soient détectées. *On donnera la valeur arrondie au centième*.
3. Déterminer la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée. *On donnera la valeur arrondie au centième*.
4. On souhaite modifier le nombre de contrôles déclenchés par la caisse de manière à ce que la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée chaque jour soit supérieure à $99\,\%$.

   Déterminer le nombre de contrôles que doit déclencher la caisse chaque jour pour que cette contrainte soit respectée.

Partie C

Le magasin comporte trois caisses automatiques identiques qui, lors d'une journée, ont chacune déclenché 20 contrôles. On note X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires associant à chacune des caisses le nombre d'erreurs détectées lors de cette journée.

On admet que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes entre elles et suivent chacune une loi binomiale $\mathcal{B}(20\ ;\ 0{,}165)$.

1. Déterminer les valeurs exactes de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire X_1.
2. On définit la variable aléatoire S par $S = X_1 + X_2 + X_3$.

   Justifier que $E(S) = 9{,}9$ et que $V(S) = 8{,}2665$.

   Pour cette question, on utilisera 10 comme valeur de $E(S)$.

   À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que la probabilité que le nombre total d'erreurs sur la journée soit strictement compris entre 6 et 14 est supérieure à $0{,}48$.



LA FICHE MAGIQUE QUI VA AVEC

« Loi des grands nombres »

Bienaymé-Tchebychev, inégalité de concentration et loi des grands nombres sur une seule fiche.

Les fiches magiques terminale spé maths : campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

CAMPUS XYZ

Corrigés

Exercices sur les sommes de variables aléatoires et la concentration en terminale spé maths

Exercices sur les sommes de variables aléatoires et la concentration en terminale spé maths : corrigés

CAMPUS XYZ

Exercice 1 — Espérance et variance d'une somme ●○○

L'espérance est linéaire ; pour des variables **indépendantes**, les variances s'ajoutent ; $V(aX) = a^2V(X)$.

a. 8

b. $6 - 5 + 1 = \mathbf{2}$

c. $2 + 4 = \mathbf{6}$

d. $9 \times 2 = \mathbf{18}$

e. $V(X) + (-1)^2V(Y) = \mathbf{6}$ (et non $2 - 4$!)

Exercice 2 — La somme de deux dés ●○○

a. $E(D_1) = \dfrac{1 + 2 + \cdots + 6}{6} = \mathbf{3{,}5}$. $E\left(D_1^2\right) = \dfrac{1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36}{6} = \dfrac{91}{6}$, donc

$V(D_1) = \dfrac{91}{6} - \dfrac{49}{4} = \dfrac{182 - 147}{12} = \dfrac{35}{12}$.

b. $E(S) = 7$ et, les dés étant indépendants, $V(S) = \dfrac{35}{6}$.

Exercice 3 — La loi binomiale, une somme de Bernoulli ●○○

a. $E(X_i) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = \boldsymbol{p}$; $E\left(X_i^2\right) = p$, donc $V(X_i) = p - p^2 = p(1 - p)$.

b. Linéarité : $E(X) = np$; les épreuves sont indépendantes : $V(X) = np(1 - p)$.

Exercice 4 — Appliquer Bienaymé-Tchebychev ●○○

$P\big(|X - 50| \geqslant 10\big) \leqslant \dfrac{25}{10^2} = \mathbf{0{,}25}$. Par l'évènement contraire, $P(40 < X < 60) \geqslant 0{,}75$.

> Bienaymé-Tchebychev : pour tout $\delta > 0$, $P\big(|X - E(X)| \geqslant \delta\big) \leqslant \dfrac{V(X)}{\delta^2}$.

Exercice 5 — La moyenne d'un échantillon ●●○

a. $E(M_n) = \dfrac{1}{n} \times n\mu = \mu$; $V(M_n) = \dfrac{1}{n^2} \times n\sigma^2 = \dfrac{\sigma^2}{n}$.

b. $V(M_{100}) = 0{,}04$ et $\sigma(M_{100}) = 0{,}2$: la moyenne fluctue 10 fois moins qu'une seule valeur ($\sigma = 2$).

Exercice 6 — L'inégalité de concentration ●●○

a. M est la moyenne de $1\,000$ variables de Bernoulli de paramètre $0{,}5$: $E(M) = 0{,}5$ et $V(M) = \dfrac{0{,}25}{1\,000} = 2{,}5 \times 10^{-4}$.

b. $P\big(|M - 0{,}5| \geqslant 0{,}05\big) \leqslant \dfrac{2{,}5 \times 10^{-4}}{0{,}05^2} = \mathbf{0{,}1}$.

> Inégalité de concentration : $P\big(|M_n - \mu| \geqslant \delta\big) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\delta^2}$.

Exercice 7 — Quelle taille d'échantillon ? ●●○

$P\big(|M_n - p| \geqslant 0{,}01\big) \leqslant \dfrac{p(1-p)}{n \times 0{,}01^2} \leqslant \dfrac{0{,}25}{0{,}0001\,n} = \dfrac{2\,500}{n}$. Il suffit que $\dfrac{2\,500}{n} \leqslant 0{,}05$, soit $n \geqslant 50\,000$.

Exercice 8 — Une majoration grossière ●●○

a. $V(X) = 25$: $P \leqslant \dfrac{25}{100} = 0{,}25$.

b. $P(X \leqslant 40) + P(X \geqslant 60) \approx 0{,}057$. L'inégalité est vraie mais grossière : elle vaut pour toutes les lois, sans utiliser la forme de celle-ci.

Exercice 9 — Un jeu répété 100 fois ●●○

a. $E(G) = -0{,}6 + 0{,}6 + 0{,}5 = \mathbf{0{,}5}$. $E\left(G^2\right) = 0{,}6 + 1{,}2 + 2{,}5 = 4{,}3$, donc $V(G) = 4{,}3 - 0{,}25 = 4{,}05$.

b. $E(T) = 50$ et $V(T) = 405$.

c. $P\big(|T - 50| \geqslant 50\big) \leqslant \dfrac{405}{2\,500} = 0{,}162$, donc $P(0 < T < 100) \geqslant 0{,}838$.

Exercice 10 — Voir la loi des grands nombres ●●○

a. La **fréquence de** 6 sur n lancers simulés d'un dé.

b. Vers $\dfrac{1}{6} \approx 0{,}167$: c'est la **loi des grands nombres**. Pour tout $\delta > 0$, $P\left(\left|M_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant \delta\right) \to 0$.

Exercice 11 Un intervalle autour de l'espérance ●●●

a. $E(X) = 80, V(X) = 64.\ 61 \leqslant X \leqslant 99 \iff |X - 80| < 20$ (X est entier).

$P\big(|X - 80| \geqslant 20\big) \leqslant \dfrac{64}{400} = 0{,}16$, d'où $P \geqslant 0{,}84$.

b. La minoration est juste, mais loin de la valeur réelle ($0{,}985$).

Exercice 12 Démontrer Bienaymé-Tchebychev ●●●

$Y \geqslant 0$ et $E(Y) = V(X)$ par définition de la variance. Pour $\delta > 0$: $|X - E(X)| \geqslant \delta \iff Y \geqslant \delta^2$.

Markov avec $a = \delta^2$: $P\big(|X - E(X)| \geqslant \delta\big) = P\left(Y \geqslant \delta^2\right) \leqslant \dfrac{V(X)}{\delta^2}$.

Exercice 13 TYPE CONTRÔLE La précision d'un sondage ●●●

1. $E(M_n) = p$ et $V(M_n) = \dfrac{p(1-p)}{n}$.

2. $\dfrac{1}{4} - p(1-p) = p^2 - p + \dfrac{1}{4} = \left(p - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$.

3. $P \leqslant \dfrac{p(1-p)}{1\,000 \times 0{,}05^2} \leqslant \dfrac{0{,}25}{2{,}5} = 0{,}1$.

4. $\dfrac{0{,}25}{n \times 0{,}0004} \leqslant 0{,}05 \iff n \geqslant 12\,500$: **12 500 personnes**.

5. **Non** : avec un risque d'au plus $10\,\%$, p est seulement dans $]0{,}47\,;\,0{,}57[$, qui contient des valeurs inférieures à $0{,}5$.

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE Le temps passé en caisse ●●●

1. $E(S) = 150, V(S) = 50 \times 1^2 = 50, \sigma(S) = \sqrt{50} \approx 7{,}1$ min.

2. $P\big(|S - 150| \geqslant 20\big) \leqslant \dfrac{50}{400} = 0{,}125$: $P(130 < S < 170) \geqslant 0{,}875$.

3. 2 h 50 = 170 min. $P(S \geqslant 170) \leqslant P\big(|S - 150| \geqslant 20\big) \leqslant 0{,}125$.

4. $V(M) = \dfrac{1}{50} = 0{,}02$ et $P\big(|M - 3| \geqslant 0{,}5\big) \leqslant \dfrac{0{,}02}{0{,}25} = \mathbf{0{,}08}$.

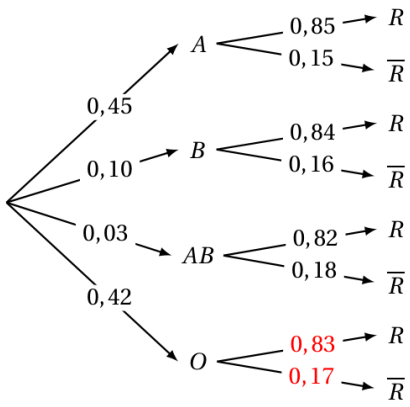


La méthode pas à pas est dans la fiche magique **« Loi des grands nombres »** (Les fiches magiques terminale spé maths, page 94).

Exercice 15 BAC 2025 Les groupes sanguins ●●○

Puisque l'on choisit une personne au hasard dans la population française, on est en situation d'équiprobabilité, et donc la loi uniforme permet d'assimiler les proportions à des probabilités.

1. L'arbre représentant la situation est :



Remarque : les deux probabilités en rouge n'étaient pas attendues ici. On peut compléter ces deux branches après avoir répondu à la question **3.**

2. $P(B \cap R) = P(B) \times P_B(R) = 0{,}10 \times 0{,}84 = 0{,}084$.

Dans le contexte de l'exercice, $8{,}4\%$ de la population est de groupe sanguin B et de rhésus positif.

3. Les évènements A, B, AB et O forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P\big(A \cap R\big) + P\big(B \cap R\big) + P\big(AB \cap R\big) + P\big(O \cap R\big)$$

$$\begin{aligned} P\big(O \cap R\big) &= P(R) - P\big(A \cap R\big) - P\big(B \cap R\big) - P\big(AB \cap R\big) \\ &= 0{,}8397 - 0{,}45 \times 0{,}85 - 0{,}084 - 0{,}03 \times 0{,}82 \\ &= 0{,}3486 \end{aligned}$$

D'où :

Or $P_O(R) = \dfrac{P(O \cap R)}{P(O)} = \dfrac{0{,}3486}{0,42} = 0{,}83$

Ce qui est le résultat donné.

4. Trouver la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans la population française soit donneur universel revient à calculer la probabilité $P\left(O \cap \overline{R}\right)$.

$$\begin{aligned} P\left(O \cap \overline{R}\right) &= P(O) \times P_O\left(\overline{R}\right) \\ &= P(O) \times (1 - P_O(R)) \\ &= 0{,}42 \times (1 - 0{,}83) \\ &= 0{,}0714 \end{aligned}$$

La probabilité d'être un donneur universel est bien de $0{,}0714$.

5.

a. On répète 100 fois de manière identique et indépendante une expérience aléatoire à deux issues dont le succès « la personne est un donneur universel » a une probabilité $p = 0{,}0714$.

La variable aléatoire X compte le nombre de succès.

Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}0714$.

b. $P(X \leq 7) \approx 0{,}57714$.

À 10^{-3} près, la probabilité qu'il y ait au plus 7 donneurs universels dans cet échantillon vaut $0{,}577$.

c. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}0714$ donc :

$$\begin{aligned} E(X) &= n \times p \\ &= 100 \times 0{,}0714 \\ &= 7{,}14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= n \times p \times (1-p) \\ &= 100 \times 0{,}0714 \times (1-0{,}714) \\ &= 6{,}630204 \\ &\approx 6{,}63 \quad \text{à } 10^{-2} \text{ près.} \end{aligned}$$

6.

a. La variable aléatoire M_N dans le contexte de l'exercice représente le nombre moyen de donneurs universels sur les N collectes de sang organisées.

b. M_N est la moyenne empirique de la variable aléatoire X donc :

$E\left(M_N\right) = E(X) = 7{,}14$.

c. $V\left(M_N\right) = \dfrac{V(X)}{N} = \dfrac{6,63}{N}$.

d. L'évènement $\left\{7 < M_N < 7{,}28\right\}$ revient à $\left\{\left|M_N - 7{,}14\right| < 0{,}14\right\}$

et $P\Big(\left|M_N - 7{,}14\right| < 0{,}14\Big) = 1 - P\Big(\left|M_N - 7{,}14\right| \geqslant 0{,}14\Big)$.

On veut que $1 - P\Big(\left|M_N - 7{,}14\right| \geqslant 0{,}14\Big) \geqslant 0{,}95$

On veut donc que $P\Big(\left|M_N - 7{,}14\right| \geqslant 0{,}14\Big) \leqslant 0{,}05$

Or, pour tout réel $t > 0$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P\Big(\left|M_N - E\left(M_N\right)\right| \geqslant t\Big) \leqslant \frac{V\left(M_N\right)}{t^2}$$

Pour $t = 0{,}14$ on obtient : $P\Big(\left|M_N - 7{,}14\right| \geqslant 0{,}14\Big) \leqslant \dfrac{6,63}{N \times 0{,}14^2}$.

On veut donc que :
$$\begin{aligned} \frac{16\,575}{49N} \leqslant 0{,}05 &\iff \frac{331\,500}{49} \leqslant N \\ &\iff 6765 + \frac{15}{49} \leqslant N \end{aligned}$$

L'inégalité est donc vraie pour tout entier $N \geqslant 6766$.

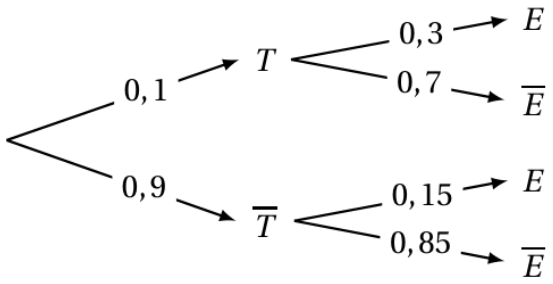
La plus petite valeur de N pour laquelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que $P\left(7 < M_N < 7{,}28\right) \geqslant 0{,}95$ est 6766.

Le sujet complet du bac 2025 (Métropole, jour 1) corrigé →

Exercice 16 BAC 2025 Les contrôles en caisse automatique ●●●

Partie A :

1. Un arbre pondéré représentant la situation est :



$$P\left(\overline{T} \cap E\right) = P\left(\overline{T}\right) \times P_{\overline{T}}(E) = 0,9 \times 0,15 = 0,135.$$

—

$P\left(\overline{T} \cap E\right) = P\left(\overline{T}\right) \times P_{\overline{T}}(E) = 0{,}9 \times 0{,}15 = 0{,}135.$

2. Les évènements T et $\overline{T}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(E) = P\left(T \cap E\right) + P\left(\overline{T} \cap E\right)$$

On a donc : $P(E) = 0{,}1 \times 0{,}3 + 0{,}135 = 0{,}165.$

La probabilité qu'une erreur soit détectée lors du contrôle est égale à $0{,}165$.

3. $P_E(T) = \dfrac{P(T \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0,1 \times 0{,}3}{0,165} \approx 0{,}1818.$

La probabilité qu'un contrôle total ait été effectué, sachant qu'une erreur a été détectée vaut environ $0{,}18$, arrondie au centième.

Partie B : Sur une journée donnée, une caisse automatique déclenche 15 contrôles. La probabilité qu'un contrôle mette en évidence une erreur est $p = 0{,}165$. La détection d'une erreur lors d'un contrôle est indépendante des autres contrôles.

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs détectées lors des contrôles de cette journée.

1. Sur une journée donnée, une caisse automatique déclenche 15 contrôles. La probabilité qu'un contrôle mette en évidence une erreur est $p = 0{,}165$ donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0{,}165$.

2. $$\begin{aligned} P(X = 5) &= \binom{15}{5} \times 0{,}165^5 \times 0{,}835^{15-5} \\ &= 3003 \times 0{,}165^5 \times 0{,}835^{10} \\ &\approx 0{,}0605 \end{aligned}.$$

   Finalement, avec les consignes d'arrondi : $P(X = 5) \approx 0{,}06$

   La probabilité qu'exactement 5 erreurs soient détectées vaut $0{,}06$.

3. $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}835^{15} \approx 0{,}9331$.

   La probabilité qu'au moins une erreur soit détectée vaut $0{,}93$.

4. Soit n le nombre de contrôles effectués chaque jour.

   Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs détectées lors des contrôles de cette journée.

   Y suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}165$.

   $P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0{,}835^n$

   On souhaite que la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée chaque jour soit supérieure à 99 %.

   On veut donc que $1 - 0{,}835^n \geqslant 0{,}99$.

   $$\begin{aligned} 1 - 0{,}835^n \geqslant 0{,}99 &\iff 0{,}01 \geqslant 0{,}835^n \\ &\iff \ln(0{,}01) \geqslant \ln\left(0{,}835^n\right) \text{ car la fonction logarithme est strictement croissante sur }]0\ ;\ +\infty[\\ &\iff \ln(0{,}01) \geqslant n\ln(0{,}835) \\ &\iff \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}835)} \leqslant n \text{ car } \ln(0{,}835) < 0 \text{ donc son inverse aussi} \end{aligned}$$

   or $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}835)} \approx 25{,}5$

   Il faut déclencher 26 contrôles chaque jour.

Partie C :

Le magasin comporte trois caisses automatiques identiques qui, lors d'une journée, ont chacune déclenché 20 contrôles. On note X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires associant à chacune des caisses le nombre d'erreurs détectées lors de cette journée.

On admet que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes entre elles et suivent chacune une loi binomiale $\mathcal{B}(20\ ;\ 0{,}165)$.

1. X_1 suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}175$.

   Donc $E(X_1) = n \times p = 20 \times 0{,}165 = 3{,}3$

   et $V(X_1) = n \times p \times (1-p) = 20 \times 0{,}165 \times 0{,}835 = 2{,}7555$

2. $E(S) = E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3 \times E(X_1) = 3 \times 3{,}3 = 9{,}9$

   Les variables X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes donc :

   $V(S) = V(X_1 + X_2 + X_3) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = 3 \times V(X_1) = 3 \times 2{,}7555 = 8{,}2665.$

3. L'évènement « $6 < S < 14$ » revient à $|S - 10| < 4$ et

   $P\left(|S-10| < 4\right) = 1 - P\left(|S-10| \geqslant 4\right)$.

   Or, pour tout réel $t > 0$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

   $$P\left(|S - E(S)| \geqslant t\right) \leqslant \frac{V(S)}{t^2}$$

   Pour $t = 4$ on obtient : $P\left(|S-10| \geqslant 4\right) \leqslant \frac{8,2665}{4^2}$.

   D'où $P\left(|S-10| < 4\right) = 1 - P\left(|S-10| \geqslant 4\right) \geqslant 1 - \frac{8,2665}{16}$.

   Or $1 - \frac{8,2665}{16} \approx 0{,}4833$

   donc la probabilité que le nombre total d'erreurs sur la journée soit strictement compris entre 6 et 14 est bien supérieure à $0{,}48$.

Le sujet complet du bac 2025 (Centres étrangers, jour 1) corrigé →



La méthode pas à pas est dans la fiche magique **« Loi des grands nombres »** (Les fiches magiques terminale spé maths, page 94).

LES FICHES MAGIQUES TERMINALE SPÉ MATHS

Révise toute la terminale spé maths avec les fiches magiques



- **41 fiches claires et illustrées** : tout le programme de spécialité maths de terminale, une notion par page.
- **Des vidéos méthode** accessibles par QR code sur les fiches.
- **Des exercices corrigés** après chaque fiche pour vérifier que tout est acquis.

campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

ANNALES BAC MATHS TERMINALE 2027

Prépare le bac avec les vrais sujets



- **75 sujets types** tirés des vrais sujets du bac, classés par chapitre.
- **3 bacs blancs complets** pour s'entraîner en conditions réelles.
- Des **corrigés avec la rédaction attendue**, des conseils et un aide-mémoire.

campusxyz.fr/produit/annales-bac-2027-terminale-spe-maths