Exercice 1 Continue ou pas ? ●○○

Dans chaque cas, étudie la continuité de la fonction au point indiqué.

a. $f(x) = x^2$ si $x \leqslant 1$ et $f(x) = 2x - 1$ si $x > 1$, en 1.

b. $g(x) = x + 1$ si $x < 0$ et $g(x) = x^2$ si $x \geqslant 0$, en 0.

Exercice 2 Choisir un paramètre ●○○

Soit a un réel et f définie par $f(x) = 3x + a$ si $x < 2$ et $f(x) = x^2 - 1$ si $x \geqslant 2$.

Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3 — Continuité et dérivabilité ●○○

Vrai ou faux ? Justifie.

a. Une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

b. Une fonction continue sur un intervalle est dérivable sur cet intervalle.

c. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x + \ln x$ est continue sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 4 — Existence et unicité d'une solution ●○○

Soit $f(x) = x^3 + x - 1$ sur $[0\,;1]$.

a. Calcule $f(0)$ et $f(1)$.

b. Montre que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α dans $[0\,;1]$.

c. À l'aide de la calculatrice, donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Exercice 5 — Compter les solutions avec un tableau ●●○

Une fonction f continue sur $[-3\,;5]$ vérifie : $f(-3)=2$, f est strictement décroissante sur $[-3\,;1]$ avec $f(1)=-4$, puis strictement croissante sur $[1\,;5]$ avec $f(5)=6$.

Combien de solutions ont les équations $f(x)=0$, $f(x)=3$ et $f(x)=-5$? Justifie.

Exercice 6 — Sans continuité, pas de TVI ●●○

Soit f définie sur $[-1\,;1]$ par $f(x)=-1$ si $x<0$ et $f(x)=1$ si $x\geqslant 0$.

a. Calcule $f(-1)$ et $f(1)$. Le réel 0 est-il compris entre ces deux valeurs ?

b. L'équation $f(x)=0$ a-t-elle une solution ? Pourquoi le TVI ne s'applique-t-il pas ?

Exercice 7 — Une équation avec l'exponentielle ●●○

On veut résoudre $e^x = 3 - x$. On pose $g(x) = e^x + x - 3$ sur $\mathbb{R}$.

a. Étudie les variations de g.

b. Montre que $g(x) = 0$ a une unique solution α, et que $0 < \alpha < 1$.

c. Donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Exercice 8 — Une équation avec ln ●●○

Soit $h(x) = \ln x + x - 2$ sur $]0\,;+\infty[$.

a. Détermine les limites de h en 0 et en $+\infty$, et étudie ses variations.

b. Montre que $\ln x = 2 - x$ a une unique solution β, puis encadre-la à 10^{-2} près.

Exercice 9 La dichotomie en Python ●●○

On reprend $f(x) = x^3 + x - 1$, qui s'annule une seule fois sur $[0\,;1]$, en α.

```
def f(x):
    return x**3 + x - 1

def dicho(a, b, p):
    while b - a > p:
        m = (a + b) / 2
        if f(a) * f(m) <= 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return a, b
```

a. Explique le rôle du test `f(a) * f(m) <= 0`.

b. Combien de passages dans la boucle fait `dicho(0, 1, 0.01)` ? Que renvoie-t-elle ?

Exercice 10 L'équation cos x = x ●●○

Soit $h(x) = \cos x - x$ sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

a. Montre que h est strictement décroissante.

b. Montre que $\cos x = x$ a une unique solution γ dans $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ et encadre-la à 10^{-2} près.

Exercice 11 Étudier un signe grâce à α ●●●

Soit $g(x) = x^3 - 3x - 3$ sur $\mathbb{R}$.

a. Dresse le tableau de variations de g (avec les limites).

b. Montre que $g(x) = 0$ a une unique solution α sur $\mathbb{R}$, et que $2 < \alpha < 3$.

c. Encadre α à 10^{-2} près, puis donne le signe de $g(x)$ selon x.

Exercice 12 Une équation à paramètre ●●●

Soit $f(x) = x^3 - 3x$ et m un réel. On cherche le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

a. Dresse le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

b. Donne, selon m, le nombre de solutions de $f(x) = m$.

c. Pour $m = 1$, donne une valeur approchée à 10^{-2} près de la plus grande solution.

Exercice 13 TYPE CONTRÔLE **Un minimum exprimé avec α** ●●●

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = x\,\mathrm{e}^x - 1$.

1. Étudie les variations de g sur $[0\,;+\infty[$.
2. Montre que $g(x) = 0$ a une unique solution α sur $[0\,;+\infty[$, puis encadre α à 10^{-2} près.
3. Déduis-en le signe de $g(x)$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - \ln x$.

1. Montre que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ et dresse le tableau de variations de f.
2. Montre que le minimum de f vaut $m = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$.
3. Justifie que $m > 2$.

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE Une solution approchée par une suite ●●●

On veut résoudre $\mathrm{e}^{-x} = x$ sur $[0\,;1]$. On pose $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x} - x$.

1. Montre que $\varphi(x) = 0$ a une unique solution α dans $[0\,;1]$.
2. Vérifie que α est aussi la solution de l'équation $x\,\mathrm{e}^{x} = 1$ de l'exercice 13.
3. On définit la suite $u_0 = 0{,}5$ et $u_{n+1} = \mathrm{e}^{-u_n}$. Calcule u_1, u_2, u_3 et u_4 à 10^{-3} près.
4. On admet que (u_n) converge. Montre que sa limite est α.
5. Écris une fonction Python qui renvoie u_n, puis donne u_{20} à 10^{-3} près.

Exercice 15 BAC 2022 Une solution approchée et une étude ●●●

Bac spé maths 2022, Amérique du Nord, jour 2, exercice 2

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.
2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ une unique solution qui sera notée α.
3. Déterminer une valeur approchée du réel α au dixième près.
4. Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1 + x^2}$$

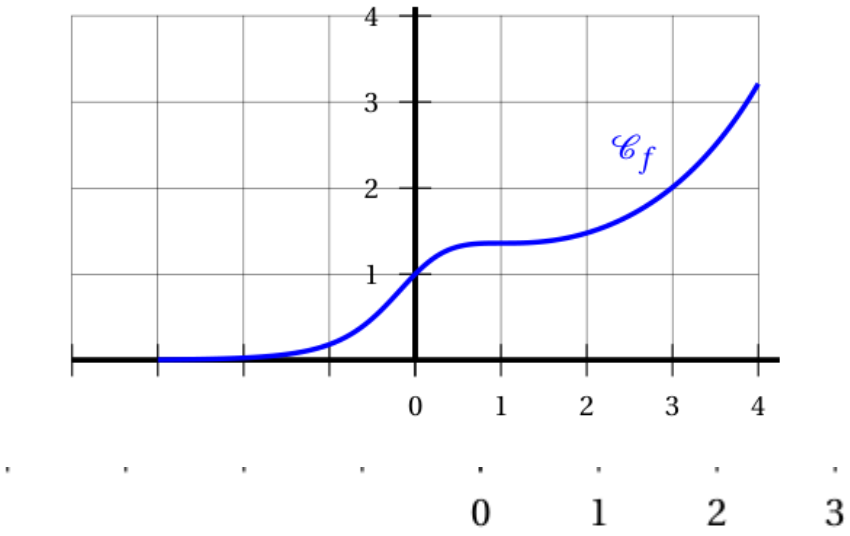
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1.

a. Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.

b. Justifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathcal{C}_f$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



a. D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.

b. On admet que la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, a pour expression pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$:

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{(1+x^2)^3}$$

où p est la fonction définie dans la partie A.

En utilisant l'expression précédente de f'', répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ». Justifier.

Exercice 16 BAC 2026 Une fonction avec exponentielle ●●●

Bac spé maths 2026, Métropole (septembre), jour 2, exercice 2

Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = (3x - 1)\mathrm{e}^{-x} + 2$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   Interpréter graphiquement ce résultat.
3. On note f' la fonction dérivée de f.

   a. Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (4 - 3x)\mathrm{e}^{-x}$.

   b. Étudier le signe de la dérivée et en déduire le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4.

   a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

   On notera α cette solution.

   b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

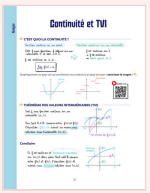
   c. En déduire le tableau de signes de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   d. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = (-3x - 2)\mathrm{e}^{-x} + 2x$.

   On admet que la fonction F est une primitive de f.

   Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe de abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.
5. On admet que la droite d'équation $y = 4x + 1$ est la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

   Vérifier que, pour tout réel x, $(3x - 1)\mathrm{e}^{-x} + 2 \leqslant 4x + 1$.



LA FICHE MAGIQUE QUI VA AVEC

« Continuité et TVI »

Le théorème des valeurs intermédiaires, son corollaire et la rédaction attendue sur une seule fiche.

Les fiches magiques terminale spé maths : campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

CAMPUS XYZ

Corrigés

Exercices sur la continuité et le TVI en terminale spé maths

Exercice 1 Continue ou pas ? ●○○

f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$: les limites à gauche et à droite doivent valoir $f(a)$.

a. $f(1) = 1$, $\lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} (2x - 1) = 1$: f **est continue en** 1.

b. $g(0) = 0$ mais $\lim\limits_{x \to 0^-} (x + 1) = 1 \neq 0$: g **n'est pas continue en** 0 (la courbe fait un saut).

Exercice 2 Choisir un paramètre ●○○

Sur $]-\infty\,;2[$ et sur $]2\,;+\infty[$, f est un polynôme, donc continue. Il reste le point 2 : $f(2) = 3$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 6 + a$. Il faut $6 + a = 3$, soit $a = -3$.

Exercice 3 Continuité et dérivabilité ●○○

a. **Vrai** : c'est une propriété du cours.

b. **Faux** : la fonction valeur absolue est continue en 0 mais pas dérivable en 0 (sa courbe a un « coin »). De même, $\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

c. **Vrai** : elle est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables, donc continue.

Exercice 4 Existence et unicité d'une solution ●○○

a. $f(0) = -1$ **et** $f(1) = 1$.

b. $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: f est strictement croissante sur $[0\,;1]$. Elle est continue (polynôme), et 0 est compris entre $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$. D'après le corollaire du TVI, $f(x) = 0$ **a une unique solution** α **dans** $[0\,;1]$.

c. $f(0{,}68) \approx -0{,}006 < 0$ et $f(0{,}69) \approx 0{,}019 > 0$: $0{,}68 < \alpha < 0{,}69$.

> Corollaire du TVI : si f est **continue** et **strictement monotone** sur $[a\,;b]$, alors pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a **une unique solution** dans $[a\,;b]$.

Exercice 5 Compter les solutions avec un tableau ●●○

- $f(x) = 0$: sur $[-3\,;1]$, f va de 2 à -4 et 0 est entre les deux ; sur $[1\,;5]$, f va de -4 à 6. Une solution sur chaque intervalle : 2 **solutions**.
- $f(x) = 3$: sur $[-3\,;1]$, $f(x) \leqslant 2 < 3$: aucune ; sur $[1\,;5]$, 3 est entre -4 et 6 : 1 **solution**.
- $f(x) = -5$: le minimum de f est $-4 > -5$: **aucune solution**.

Exercice 6 Sans continuité, pas de TVI ●●○

a. $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$: **oui**, 0 est entre les deux.

b. **Non** : f ne prend que les valeurs -1 et 1. Le TVI ne s'applique pas car f **n'est pas continue en** 0.

Exercice 7 — Une équation avec l'exponentielle ●●○

a. $g'(x) = \mathrm{e}^x + 1 > 0$: g **est strictement croissante sur** $\mathbb{R}$.

b. g est continue et strictement croissante sur $[0\,;1]$, $g(0) = -2 < 0$ et $g(1) = \mathrm{e} - 2 > 0$: une unique solution α dans $]0\,;1[$. Comme g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, il n'y en a pas d'autre ailleurs : α **est l'unique solution**.

c. $g(0{,}79) \approx -0{,}007$ et $g(0{,}80) \approx 0{,}026$: $0{,}79 < \alpha < 0{,}80$.

Exercice 8 — Une équation avec ln ●●○

a. $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$. $h'(x) = \dfrac{1}{x} + 1 > 0$: h **est strictement croissante**.

b. h est continue, strictement croissante, et va de $-\infty$ à $+\infty$: $h(x) = 0$ **a une unique solution** β.
$h(1{,}55) \approx -0{,}012$ et $h(1{,}56) \approx 0{,}005$: $1{,}55 < \beta < 1{,}56$.

> Avec des limites infinies aux bornes, on utilise le corollaire du TVI sur l'intervalle ouvert : toutes les valeurs réelles sont atteintes.

Exercice 9 — La dichotomie en Python ●●○

a. Si $f(a)$ et $f(m)$ sont de signes contraires (ou si l'un est nul), α est dans $[a\,;m]$: on garde la moitié gauche. Sinon, α est dans $[m\,;b]$.

b. L'amplitude est divisée par 2 à chaque passage : $\dfrac{1}{2^n} \leqslant 0{,}01 \iff 2^n \geqslant 100 \iff n \geqslant 7$. **7 passages**. La fonction renvoie $(0{,}6796875\ ;\ 0{,}6875)$: un encadrement de α d'amplitude $\dfrac{1}{128}$.

Exercice 10 — L'équation cos x = x ●●○

a. $h'(x) = -\sin x - 1 < 0$ sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ (et $h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$) : h **est strictement décroissante**.

b. h est continue, $h(0) = 1 > 0$ et $h\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2} < 0$: **une unique solution** γ. $h(0{,}73) \approx 0{,}015$ et $h(0{,}74) \approx -0{,}002$: $0{,}73 < \gamma < 0{,}74$.

Exercice 11 — Étudier un signe grâce à α ●●●

a. $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. g **croît sur** $]-\infty\,;-1]$, **décroît sur** $[-1\,;1]$, **croît sur** $[1\,;+\infty[$, avec $g(-1) = -1$, $g(1) = -5$, $\lim\limits_{-\infty} g = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$.

b. Sur $]-\infty\,;1]$, le maximum de g est $g(-1) = -1 < 0$: pas de solution. Sur $[1\,;+\infty[$, g est continue, strictement croissante, de -5 à $+\infty$: une unique solution α. $g(2) = -1 < 0$ et $g(3) = 15 > 0$, donc $2 < \alpha < 3$.

c. $g(2{,}10) \approx -0{,}039$ et $g(2{,}11) \approx 0{,}064$: $2{,}10 < \alpha < 2{,}11$. $g(x) < 0$ **pour** $x < \alpha$ **et** $g(x) > 0$ **pour** $x > \alpha$.

Exercice 12 — Une équation à paramètre ●●●

a. $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$: f **croît jusqu'à** $f(-1) = 2$**, décroît jusqu'à** $f(1) = -2$**, puis croît**, de $-\infty$ à $+\infty$.

b. On applique le corollaire du TVI sur chacun des trois intervalles :

- si $m < -2$ ou $m > 2$: **1 solution** ;
- si $m = -2$ ou $m = 2$: **2 solutions** ;
- si $-2 < m < 2$: **3 solutions**.

c. La plus grande solution est dans $]1\,;+\infty[$: à la calculatrice, $x \approx 1{,}88$.

Exercice 13 — TYPE CONTRÔLE — Un minimum exprimé avec α ●●●

Partie A

1. $g'(x) = \mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x = (1+x)\,\mathrm{e}^x > 0$: g **est strictement croissante**, de $g(0) = -1$ à $+\infty$.

2. g est continue et strictement croissante, $g(0) < 0$ et $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$: **une unique solution** α. À la calculatrice, $0{,}56 < \alpha < 0{,}57$.

3. $g(x) < 0$ **sur** $[0\,;\alpha[$ **et** $g(x) > 0$ **sur** $]\alpha\,;+\infty[$.

Partie B

1. $f'(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x\,\mathrm{e}^x - 1}{x} = \dfrac{g(x)}{x}$, du signe de g. f **décroît sur** $]0\,;\alpha]$ **et croît sur** $[\alpha\,;+\infty[$.

2. $g(\alpha) = 0$ donne $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$, puis $\alpha = \ln\dfrac{1}{\alpha} = -\ln\alpha$. Donc $m = f(\alpha) = \mathrm{e}^\alpha - \ln\alpha = \boldsymbol{\dfrac{1}{\alpha} + \alpha}$.

3. $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} - 2 = \dfrac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{\alpha} = \dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha} > 0$ car $\alpha \neq 1$: $m > 2$ (en fait $m \approx 2{,}33$).

> On ne connaît pas α exactement : on utilise l'égalité $g(\alpha) = 0$ pour simplifier les calculs avec α.

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE **Une solution approchée par une suite** ●●●

1. $\varphi'(x) = -\mathrm{e}^{-x} - 1 < 0$: φ est continue et strictement décroissante, $\varphi(0) = 1 > 0$ et $\varphi(1) = \mathrm{e}^{-1} - 1 < 0$. **Une unique solution** α.
2. $\mathrm{e}^{-\alpha} = \alpha \iff 1 = \alpha\,\mathrm{e}^{\alpha}$ (en multipliant par $\mathrm{e}^{\alpha} > 0$) : **c'est le même** $\alpha \approx 0{,}567$.
3. $u_1 \approx 0{,}607$; $u_2 \approx 0{,}545$; $u_3 \approx 0{,}580$; $u_4 \approx 0{,}560$: les termes oscillent autour de α.
4. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est continue, donc la limite ℓ vérifie $\ell = \mathrm{e}^{-\ell}$, soit $\varphi(\ell) = 0$. Comme $u_n \in [0\,;1]$ pour tout n, $\ell \in [0\,;1]$ et $\ell = \alpha$.
5.

```
from math import exp
def u(n):
    v = 0.5
    for k in range(n):
        v = exp(-v)
    return v
```

$u_{20} \approx 0{,}567$.

Exercice 15 BAC 2022 Une solution approchée et une étude ●●●

Partie A

1. La fonction p est continue et dérivable sur $[-3\ ;\ 4]$.

   $\forall x \in [-3\ ;\ 4], p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$

   Ce trinôme du second degré n'admet aucune racine ($\Delta = -24 < 0$) donc $\forall x \in [-3\ ;\ 4], p'(x) > 0$. Donc la fonction p est strictement croissante sur $[-3\ ;\ 4]$.

2. $p(-3) = -68$ et $p(4) = 37$

   La fonction p est continue et strictement croissante sur $[-3\ ;\ 4]$ à valeurs dans $[-68\ ;\ 37]$. Or $0 \in [-68\ ;\ 37]$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.

3. À la calculatrice, $\alpha \approx -0{,}2$.

4. D'après les variations de la fonction p, et en utilisant le résultat précédent, on peut établir le tableau de signe de la fonction p sur $[-3\ ;\ 4]$:

x	-3		α		4
$p(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

1.

a. La fonction f est continue et dérivable sur $[-3\ ;\ 4]$ (car $\forall x \in [-3\ ;\ 4], 1+x^2 \neq 0$).

$$\forall x \in [-3\ ;\ 4], f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x \times (1+x^2) - \mathrm{e}^x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{\mathrm{e}^x(x^2-2x+1)}{(1+^2)^2} = \frac{(x-1)^2\,\mathrm{e}^x}{(1+^2)^2}.$$

b.

$$f'(x) = 0 \iff \frac{(x-1)^2\,\mathrm{e}^x}{(1+^2)^2} = 0 \iff (x-1)^2\,\mathrm{e}^x \iff (x-1)^2 \iff x-1=0 \iff x=1.$$

Et $f(1) = \frac{\mathrm{e}}{2}$. Donc au point d'abscisse 1, $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale d'équation $y = \frac{\mathrm{e}}{2}$.

2.

a. Avec la précision permise par le graphique, on peut voir que la fonction f est :

- **b.**convexe sur $[-3\ ;\ 0]$;
- **c.**concave sur $[0\ ;\ 1]$;
- **d.**convexe sur $[1\ ;\ 4]$.

Donc $\mathcal{C}_f$ admet deux points d'inflexion, aux abscisses $x=0$ et $x=1$.

Le toboggan semble donc assurer de bonnes sensations.

e. $\forall x \in [-3\ ;\ 4] : f''(x) = \frac{p(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{(1+x^2)^3}$

Recherchons les points d'inflexion, c'est-à-dire les valeurs de $x \in [-3\ ;\ 4]$ pour lesquelles $f''(x)$ s'annule et change de signe.

$\forall x \in [-3\ ;\ 4], \left(1+x^2\right)^3 > 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f''(x)$ a le même signe que $p(x)(x-1)$.

On construit alors le tableau de signe suivant :

x	-3		α		1		4
$p(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

La fonction f'' s'annule et change de signe en $x=\alpha$ et $x=1$. Donc $\mathcal{C}_f$ admet deux points d'inflexion. Le toboggan assure donc de bonnes sensations.

Le sujet complet du bac 2022 (Amérique du Nord, jour 2) corrigé →



La méthode pas à pas est dans la fiche magique **« Continuité et TVI »** (Les fiches magiques terminale spé maths, page 28).

Exercice 16 BAC 2026 Une fonction avec exponentielle ●●●

Partie A

1. La fonction f est dérivable sur $]-3;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.

On a, pour tout réel $x > -3$: $\quad f'(x) = \dfrac{2(x+3) - 2x \times 1}{(x+3)^2} = \dfrac{2x + 6 - 2x}{(x+3)^2} = \dfrac{6}{(x+3)^2}$.

Pour tout $x > -3$, $\quad (x+3)^2 > 0 \quad$ donc $\quad f'(x) > 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $]-3;+\infty[$.

2. **Initialisation.** Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $u_1 = f(1) = \dfrac{2}{4} = 0{,}5$.

On vérifie que $0 \leqslant 0{,}5 \leqslant 1 \leqslant 1$ donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Soit n un entier naturel, on suppose que la propriété est vraie pour cet entier n, c'est-à-dire que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$. Il faut démontrer que $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Les nombres 0, u_{n+1}, u_n et 1 appartiennent à $[0;1] \subset]-3;+\infty[$, intervalle sur lequel la fonction f est croissante.

D'après l'hypothèse de récurrence, et puisque f est croissante sur $[0;1]$:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1 &\Longrightarrow f(0) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1) \\ &\Longrightarrow 0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 0{,}5 \end{aligned}$$

Comme $0{,}5 \leqslant 1$, on a bien $\quad 0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Ainsi la propriété est héréditaire.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

3. D'après la question précédente, la suite (u_n) est décroissante ($u_{n+1} \leqslant u_n$) et minorée par 0 : on en déduit, d'après le théorème de convergence monotone, qu'elle est convergente.

Partie B

1. Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_n + 3}{2u_n} = \frac{u_n}{2u_n} + \frac{3}{2u_n} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{u_n} = \frac{3}{2}v_n + \frac{1}{2}.$$

2. Pour tout entier naturel n :

$$w_{n+1} = v_{n+1} + 1 = \frac{3}{2}v_n + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}v_n + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(v_n + 1) = \frac{3}{2}w_n.$$

De plus $\quad w_0 = v_0 + 1 = \dfrac{1}{u_0} + 1 = 2.$

La suite (w_n) est donc géométrique de raison $q = \dfrac{3}{2}$ et de premier terme $w_0 = 2$.

3. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad w_n = w_0 \times q^n = 2\left(\dfrac{3}{2}\right)^n \quad$ donc $\quad v_n = w_n - 1 = 2\left(\dfrac{3}{2}\right)^n - 1.$

Comme $\quad u_n = \dfrac{1}{v_n}, \quad$ on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n = \dfrac{1}{2\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}.$

4. On a : $\quad \dfrac{3}{2} > 1 \quad$ donc $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n = +\infty \quad$ et $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(\dfrac{3}{2}\right)^n - 1 = +\infty.$

Par limite de l'inverse : $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.$

5.

a. La boucle doit tourner tant que $u_n > 10^{-3}$, et chaque tour calcule le terme suivant avec $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n+3}$. Voici le script Python complété :

```
def seuil():
        n = 0
        u = 1
        while u > 10**(-3) :
                n = n + 1
                u = 2*u/(u+3)
        return n
```

b. On cherche le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant 10^{-3}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad 2\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 > 0$, donc :

$$\begin{aligned}
u_n \leqslant 10^{-3} &\iff \frac{1}{2\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1} \leqslant 10^{-3} \\
&\iff 2\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \geqslant 1000 \\
&\iff \left(\frac{3}{2}\right)^n \geqslant 500{,}5 \\
&\iff n\ln(1{,}5) \geqslant \ln(500{,}5) \quad \text{car la fonction ln est croissante sur }]0;+\infty[\\
&\iff n \geqslant \frac{\ln(500{,}5)}{\ln(1{,}5)} \quad \text{car } \ln(1{,}5) > 0
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(500{,}5)}{\ln(1{,}5)} \approx 15{,}3$.

(Vérification : $u_{15} \approx 1{,}14 \times 10^{-3} > 10^{-3}$ et $u_{16} \approx 7{,}62 \times 10^{-4} \leqslant 10^{-3}$.)

La fonction `seuil()` renvoie donc 16.

Le sujet complet du bac 2026 (Métropole (septembre), jour 2) corrigé →



La méthode pas à pas est dans la fiche magique **« Continuité et TVI »** (Les fiches magiques terminale spé maths, page 28).

LES FICHES MAGIQUES TERMINALE SPÉ MATHS

Révise toute la terminale spé maths avec les fiches magiques



- **41 fiches claires et illustrées** : tout le programme de spécialité maths de terminale, une notion par page.
- **Des vidéos méthode** accessibles par QR code sur les fiches.
- **Des exercices corrigés** après chaque fiche pour vérifier que tout est acquis.

campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

ANNALES BAC MATHS TERMINALE 2027

Prépare le bac avec les vrais sujets



- **75 sujets types** tirés des vrais sujets du bac, classés par chapitre.
- **3 bacs blancs complets** pour s'entraîner en conditions réelles.
- Des **corrigés avec la rédaction attendue**, des conseils et un aide-mémoire.

campusxyz.fr/produit/annales-bac-2027-terminale-spe-maths