Exercices sur la convergence des suites en terminale spé maths

CAMPUS XYZ

Exercice 1 — Vrai ou faux sur la convergence ●○○

Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse, en justifiant (une propriété du cours ou un contre-exemple).

a. Une suite croissante et majorée converge.

b. Une suite croissante tend vers $+\infty$.

c. Une suite bornée converge.

d. Une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.

Exercice 2 — Une suite qui augmente d'au moins 1 ●○○

Une suite (u_n) vérifie $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 1$.

a. Démontre par récurrence que $u_n \geqslant n + 3$ pour tout n.

b. Déduis-en la limite de (u_n).

Exercice 3 — Trouver la limite avec le point fixe ●○○

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0{,}4\,u_n + 3$. On admet qu'elle converge vers un réel ℓ.

a. Justifie que $\ell = 0{,}4\,\ell + 3$.

b. Déduis-en la valeur de ℓ.

Exercice 4 — Conjecturer une limite ●○○

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

a. Calcule u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5. La suite est-elle monotone ?

b. On admet que la suite converge vers un réel $\ell > 0$. Montre que $\ell^2 - \ell - 1 = 0$ et déduis-en ℓ.

Exercice 5 — Une suite décroissante et minorée ●●○

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$. On note $f(x) = \sqrt{x+6}$ sur $[0\,;+\infty[$.

a. Démontre par récurrence que $3 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 10$ pour tout n.

b. Déduis-en que (u_n) converge vers une limite $\ell \geqslant 3$.

c. Détermine ℓ.

Exercice 6 — Une suite homographique croissante ●●○

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0{,}5$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1+u_n}$. On note $f(x) = \dfrac{2x}{1+x}$ sur $[0\,;1]$.

a. Montre que f est croissante sur $[0\,;1]$.

b. Démontre par récurrence que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

c. Déduis-en que (u_n) converge, puis détermine sa limite.

Exercice 7 — Une suite qui s'éteint ●●○

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0{,}5$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

a. Démontre par récurrence que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

b. Montre que (u_n) est décroissante.

c. Justifie que (u_n) converge et détermine sa limite.

Exercice 8 — Approcher la limite avec Python ●●○

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 0{,}8\,u_n + 2$. On admet que $u_n = 10 - 10 \times 0{,}8^n$.

a. Détermine la limite de (u_n).

b. Complète la fonction pour qu'elle renvoie le plus petit n tel que $u_n > 9{,}9$.

```
def seuil():
    n = 0
    u = 0
    while ........ :
        u = ........
        n = n + 1
    return n
```

c. Retrouve la valeur renvoyée en résolvant une inéquation.

Exercice 9 — Un majorant n'est pas la limite ●●○

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.

a. Montre que (u_n) est croissante et majorée par 5.

b. Un élève affirme : « la suite est croissante et majorée par 5, donc elle tend vers 5 ». Qu'en penses-tu ?

Exercice 10 — Une suite définie avec ln ●●○

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

a. Calcule des valeurs approchées de u_1, u_2 et u_3.

b. Démontre par récurrence que $0 < u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout n.

c. On admet que $\ln(1 + x) < x$ pour tout $x > 0$. Justifie que (u_n) converge et que sa limite est 0.

Exercice 11 La méthode de Héron ●●●

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$. On admet que $u_n > 0$ pour tout n.

a. Calcule u_1 et u_2.

b. Montre que $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2}{2u_n}$, puis que $u_n \geqslant \sqrt{2}$ pour tout $n \geqslant 1$.

c. Montre que $u_{n+1} - u_n = \frac{2 - u_n^2}{2u_n}$ et déduis-en que (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

d. Justifie que (u_n) converge et calcule sa limite.

Exercice 12 — Une suite avec l'exponentielle ●●●

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n \, \mathrm{e}^{-u_n}$. On note $f(x) = x \, \mathrm{e}^{-x}$.

a. Étudie les variations de f sur $[0\,;1]$.

b. Démontre par récurrence que $0 < u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$ pour tout n.

c. Déduis-en que (u_n) converge et détermine sa limite.

Exercice 13 TYPE CONTRÔLE **Deux méthodes pour une même limite** ●●●

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0{,}2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = \dfrac{4x}{1+3x}$.

Partie A : avec la convergence monotone

1. Montre que f est croissante sur $[0\,;1]$ et calcule $f(0)$ et $f(1)$.
2. Démontre par récurrence que $0 < u_n \leqslant u_{n+1} < 1$ pour tout n.
3. Déduis-en que (u_n) converge et détermine sa limite.

Partie B : avec une suite auxiliaire

On pose $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$.

1. Montre que (v_n) est géométrique de raison 4.
2. Exprime v_n, puis u_n, en fonction de n.
3. Retrouve la limite de (u_n).

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE Une population qui disparaît ●●●

Une population d'insectes est modélisée par $u_0 = 1$ (en millier) et $u_{n+1} = u_n \, \mathrm{e}^{-u_n}$, où n est le nombre de semaines. On admet (voir l'exercice 12) que (u_n) est décroissante et tend vers 0.

1. Calcule u_1, u_2 et u_3, arrondis au millième.
2. Complète la fonction pour qu'elle renvoie le nombre de semaines au bout duquel la population passe sous 100 insectes.

```
from math import exp
def semaines():
    u = 1
    n = 0
    while ........ :
        u = ........
        n = n + 1
    return n
```

3. La fonction renvoie 8. Interprète ce résultat.
4. Montre que, pour tout n, $u_{n+1} \leqslant \dfrac{u_n}{1+u_n}$. On admet pour cela que $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$ pour tout réel x.
5. On pose $w_n = \dfrac{1}{u_n}$. Montre que $w_{n+1} \geqslant w_n + 1$, puis que $u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 15 BAC 2025 Deux populations, deux modèles ●●●

Bac spé maths 2025, Centres étrangers, jour 2, exercice 1

On se propose de comparer l'évolution d'une population animale dans deux milieux distincts A et B.

Au 1er janvier 2025, on introduit 6000 individus dans chacun des milieux A et B.

Partie A

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu A.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 6$ et de raison $0{,}93$.

Pour tout entier naturel n, u_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.
2. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu B.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par la suite (v_n) définie par

$$v_0 = 6 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = -0{,}05v_n^2 + 1{,}1v_n.$$

Pour tout entier naturel n, v_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = -0{,}05x^2 + 1{,}1x.$$

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle [0 ; 11].
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a

   $$2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6.$$
3. En déduire que la suite (v_n) est convergente vers une limite ℓ.
4.
   a. Justifier que la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ puis en déduire la valeur de ℓ.

   b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Cette partie a pour but de comparer l'évolution de la population dans les deux milieux.

1. En résolvant une inéquation, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu A sera strictement inférieure à 3000 individus.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu B sera strictement inférieure à 3000 individus.

1. Justifier qu'à partir d'une certaine année, la population du milieu B dépassera la population du milieu A.
2. On considère le programme Python ci-contre.
   a. Recopier et compléter ce programme afin qu'après exécution, il affiche l'année à partir de laquelle la population du milieu B est strictement supérieure à la population du milieu A.
   b. Déterminer l'année affichée après exécution du programme.

```
n=0
u = 6
v = 6
while      :
u =
v=
n = n+1
print (2025 + n)
```

Exercice 16 BAC 2023 Une suite définie avec ln ●●●

Bac spé maths 2023, Centres étrangers (groupe I), jour 2, exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]-1{,}5\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(2x+3) - 1.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]-1{,}5\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

1. Déterminer la limite de la fonction g en $-1{,}5$.

   On admet que la limite de la fonction g en $+\infty$ est $-\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction g sur $]-1{,}5\ ;\ +\infty[$.

3.

   a. Démontrer que, dans l'intervalle $]-0{,}5\ ;\ +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

   b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B : Étude de la suite (u_n)

On admet que la fonction f est strictement croissante sur $]-1{,}5\ ;\ +\infty[$.

1. Soit x un nombre réel. Montrer que si $x \in [-1\ ;\ \alpha]$ alors $f(x) \in [-1\ ;\ \alpha]$.

2.

   a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

   $$-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha.$$

   b. En déduire que la suite (u_n) converge.



LA FICHE MAGIQUE QUI VA AVEC

« Convergence, divergence »

Convergence monotone, comparaison et gendarmes réunis sur une seule fiche.

Les fiches magiques terminale spé maths : campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

CAMPUS XYZ

Corrigés

Exercices sur la convergence des suites en terminale spé maths

Exercices sur la convergence des suites en terminale spé maths : corrigés

CAMPUS XYZ

Exercice 1 — Vrai ou faux sur la convergence ●○○

a. **Vrai** : c'est le théorème de convergence monotone.

b. **Faux** : $u_n = -\dfrac{1}{n}$ (pour $n \geqslant 1$) est croissante et tend vers 0.

c. **Faux** : $u_n = (-1)^n$ est bornée par -1 et 1, mais elle n'a pas de limite.

d. **Vrai** : c'est une propriété du cours.

Exercice 2 — Une suite qui augmente d'au moins 1 ●○○

a. $u_0 = 3 \geqslant 0 + 3$. Si $u_n \geqslant n + 3$, alors $u_{n+1} \geqslant u_n + 1 \geqslant n + 4 = (n+1) + 3$. **Donc $u_n \geqslant n + 3$ pour tout n.**

b. $\lim(n + 3) = +\infty$: par comparaison, $\lim u_n = +\infty$.

Exercice 3 — Trouver la limite avec le point fixe ●○○

a. $\lim u_{n+1} = \lim u_n = \ell$ et, par opérations sur les limites, $\lim(0{,}4\,u_n + 3) = 0{,}4\,\ell + 3$. Par unicité de la limite, $\ell = 0{,}4\,\ell + 3$.

b. $0{,}6\,\ell = 3$, donc $\ell = 5$.

> Cette méthode ne marche que si l'on sait déjà que la suite converge : elle donne la valeur de la limite, pas son existence.

Exercice 4 — Conjecturer une limite ●○○

a. $u_1 = 2$; $u_2 = 1{,}5$; $u_3 = \dfrac{5}{3} \approx 1{,}667$; $u_4 = 1{,}6$; $u_5 = 1{,}625$. **La suite n'est pas monotone** : elle monte et descend alternativement.

b. En passant à la limite : $\ell = 1 + \dfrac{1}{\ell}$, puis en multipliant par $\ell \neq 0$: $\ell^2 = \ell + 1$.

$\Delta = 5$ et $\ell > 0$, donc $\ell = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$ (le nombre d'or).

> Le théorème de convergence monotone ne s'applique pas ici : la convergence se démontre autrement.

Exercice 5 — Une suite décroissante et minorée ●●○

a. f est croissante sur $[0\,;+\infty[$. **Initialisation** : $u_1 = 4$ et $3 \leqslant 4 \leqslant 10 \leqslant 10$.
Hérédité : si $3 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 10$, on applique f : $f(3) \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant f(10)$, soit $3 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 4 \leqslant 10$.

b. (u_n) **est décroissante et minorée par** 3 : elle converge vers $\ell \geqslant 3$.

c. f est continue, donc $\ell = f(\ell)$: $\ell = \sqrt{\ell + 6}$, d'où $\ell^2 - \ell - 6 = 0$, de racines 3 et -2. Comme $\ell \geqslant 3$, $\ell = 3$.

Exercice 6 — Une suite homographique croissante ●●○

a. $f'(x) = \dfrac{2(1+x) - 2x}{(1+x)^2} = \dfrac{2}{(1+x)^2} > 0$: f **est croissante**.

b. $u_1 = \dfrac{2}{3}$ et $0 \leqslant 0{,}5 \leqslant \dfrac{2}{3} \leqslant 1$. Si $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$, alors $f(0) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant f(1)$, soit $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$.

c. Croissante et majorée par 1 : (u_n) **converge** vers $\ell \in [0{,}5\,;1]$. Par continuité de f, $\ell = \dfrac{2\ell}{1+\ell}$, soit $\ell(1+\ell) = 2\ell$, donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$. Comme $\ell \geqslant 0{,}5$, $\ell = 1$.

Exercice 7 — Une suite qui s'éteint ●●○

a. $0 \leqslant 0{,}5 \leqslant 1$. Si $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, alors $u_{n+1} = u_n(1-u_n)$ est le produit de deux nombres positifs, et $u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$. **Donc** $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ **pour tout** n.

b. $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$: (u_n) **est décroissante**.

c. Décroissante et minorée par 0 : elle converge vers ℓ. Par continuité, $\ell = \ell - \ell^2$, donc $\ell^2 = 0$ et $\ell = 0$.

Exercice 8 — Approcher la limite avec Python ●●○

a. $\lim 0{,}8^n = 0$, donc $\lim u_n = 10$.

b. `while u <= 9.9 :` et `u = 0.8*u + 2`.

c. $u_n > 9{,}9 \iff 10 \times 0{,}8^n < 0{,}1 \iff 0{,}8^n < 0{,}01 \iff n > \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8} \approx 20{,}6$ (on divise par $\ln 0{,}8 < 0$). **La fonction renvoie** 21.

Exercice 9 — Un majorant n'est pas la limite ●●○

a. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)} > 0$: croissante. Et $u_n < 1 \leqslant 5$: **majorée par** 5.

b. **C'est faux** : $\lim u_n = 1$. Le théorème de convergence monotone dit seulement que la suite converge vers une limite $\ell \leqslant 5$, pas que $\ell = 5$.

Exercice 10 — Une suite définie avec ln ●●○

a. $u_1 = \ln 2 \approx 0{,}693\,;\, u_2 \approx 0{,}527\,;\, u_3 \approx 0{,}423$.

b. $f(x) = \ln(1+x)$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$ et $f(0) = 0$. **Initialisation** : $0 < \ln 2 \leqslant 1$. **Hérédité** : si $0 < u_{n+1} \leqslant u_n$, alors $f(0) < f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$ (f strictement croissante), soit $0 < u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.

c. Décroissante et minorée par 0 : elle converge vers $\ell \geqslant 0$, avec $\ell = \ln(1+\ell)$ par continuité. Si $\ell > 0$, on aurait $\ln(1+\ell) < \ell$: impossible. **Donc** $\ell = 0$.

Exercice 11 — La méthode de Héron ●●●

a. $u_1 = \dfrac{1}{2}(2+1) = \dfrac{3}{2}$ **et** $u_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{17}{12} \approx 1{,}4167$.

b. $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{u_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}\,u_n}{2u_n} = \dfrac{\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2}{2u_n}$. Un carré divisé par un positif est positif : $u_{n+1} \geqslant \sqrt{2}$, donc $u_n \geqslant \sqrt{2}$ pour $n \geqslant 1$ (et aussi $u_0 = 2 \geqslant \sqrt{2}$).

c. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{u_n}{2} = \dfrac{2 - u_n^2}{2u_n}$. Comme $u_n \geqslant \sqrt{2}$, $u_n^2 \geqslant 2$: la différence est négative, (u_n) **est décroissante**.

d. Décroissante et minorée par $\sqrt{2}$: elle converge vers $\ell \geqslant \sqrt{2}$, avec $\ell = \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{2}{\ell}\right)$, soit $\ell^2 = 2$. $\ell = \sqrt{2}$.

> $u_2 = \dfrac{17}{12}$ donne déjà $\sqrt{2}$ à 3×10^{-3} près : la méthode converge très vite.

Exercice 12 — Une suite avec l'exponentielle ●●●

a. $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x} = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$ sur $[0\,;1]$: f **est croissante sur** $[0\,;1]$.

b. **Initialisation** : $u_1 = \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}37$ et $0 < u_1 \leqslant u_0 \leqslant 1$.

Hérédité : si $0 < u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$, f croissante sur $[0\,;1]$ donne $f(0) < u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant f(1)$, soit $0 < u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}^{-1} \leqslant 1$. ($f(0) < f(u_{n+1})$ car f est strictement croissante.)

c. Décroissante et minorée par 0 : elle converge vers $\ell \in [0\,;1]$, avec $\ell = \ell\,\mathrm{e}^{-\ell}$, soit $\ell\left(1 - \mathrm{e}^{-\ell}\right) = 0$. $1 - \mathrm{e}^{-\ell} = 0 \iff \ell = 0$: dans tous les cas, $\ell = 0$.

Exercice 13 — TYPE CONTRÔLE — Deux méthodes pour une même limite ●●●

Partie A

1. $f'(x) = \dfrac{4(1+3x) - 4x \times 3}{(1+3x)^2} = \dfrac{4}{(1+3x)^2} > 0$: f **est croissante** ; $f(0) = 0$ **et** $f(1) = 1$.

2. $u_1 = \dfrac{0{,}8}{1{,}6} = 0{,}5$, donc $0 < u_0 \leqslant u_1 < 1$. Si $0 < u_n \leqslant u_{n+1} < 1$, f strictement croissante donne $f(0) < u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < f(1)$, soit $0 < u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 1$.

3. Croissante et majorée par 1 : elle converge vers $\ell \in [0{,}2\,;1]$, avec $\ell = f(\ell)$ (f continue) : $\ell(1+3\ell) = 4\ell \iff 3\ell^2 - 3\ell = 0 \iff \ell \in \{0\,;1\}$. $\ell = 1$.

Partie B

1. $1 - u_{n+1} = \dfrac{1 + 3u_n - 4u_n}{1+3u_n} = \dfrac{1-u_n}{1+3u_n}$, donc $v_{n+1} = \dfrac{4u_n}{1+3u_n} \times \dfrac{1+3u_n}{1-u_n} = 4\,v_n$.

Raison 4.

2. $v_0 = \dfrac{0{,}2}{0{,}8} = \dfrac{1}{4}$, donc $v_n = \dfrac{1}{4} \times 4^n = 4^{n-1}$. De $v_n(1-u_n) = u_n$ on tire

$$u_n = \frac{v_n}{1+v_n} = \frac{4^{n-1}}{1+4^{n-1}}.$$

3. $u_n = \dfrac{1}{4^{1-n}+1}$ et $\lim 4^{1-n} = 0$: $\lim u_n = 1$.

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE Une population qui disparaît ●●●

1. $u_1 = \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}368$; $u_2 \approx 0{,}255$; $u_3 \approx 0{,}197$.

2. 100 insectes $= 0{,}1$ millier : `while u >= 0.1 :` et `u = u*exp(-u)`.

3. $u_7 \approx 0{,}107$ et $u_8 \approx 0{,}096$: **la population passe sous 100 insectes au bout de 8 semaines**.

4. $\mathrm{e}^{u_n} \geqslant 1 + u_n > 0$, donc $\mathrm{e}^{-u_n} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{u_n}} \leqslant \dfrac{1}{1+u_n}$, et en multipliant par $u_n > 0$:

   $u_{n+1} \leqslant \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

5. En passant à l'inverse (tout est positif) : $w_{n+1} \geqslant \dfrac{1+u_n}{u_n} = w_n + 1$.

   Par récurrence, $w_n \geqslant w_0 + n = n + 1$, donc $u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$: on retrouve que la suite tend vers 0, avec une vitesse.

Exercice 15 BAC 2025 Deux populations, deux modèles ●●●

Partie A

1. $u_1 = u_0 \times 0{,}93 = 6 \times 0{,}93 = 5{,}58$.
2. (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 6$ et de raison $q = 0{,}93$ donc pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = 6 \times 0{,}93^n$.
3. La raison q vérifiant $q \in]-1\ ;\ 1[$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}93^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

   Interprétation : ceci signifie qu'au bout d'un grand nombre d'années la population animale dans le milieu A va aller à l'extinction.

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -0{,}05v_n^2 + 1{,}1v_n$.

   En particulier $v_1 = -0{,}05 \times 6^2 + 1{,}1 \times 6 = -1{,}8 + 6{,}6 = 4{,}8$.

   Il y aura donc 4800 individus au 1er janvier 2026.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = -0{,}05x^2 + 1{,}1x$.

1. La fonction f est dérivable donc continue sur $[0\ ;\ +\infty[$.

$\forall x \in [0\ ;\ +\infty[, f'(x) = -0{,}1x + 1{,}1$.

$$f'(x) \geqslant 0 \iff -0{,}1x + 1{,}1 \geqslant 0 \iff x \leqslant \frac{1{,}1}{0{,}1} \iff x \leqslant 11.$$

Donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 11]$.

2. Nous savons que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$. Montrons par récurrence que : $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$.

- **3.Initialisation :** $v_0 = 6$ et $v_1 = 4{,}8$ donc $2 \leqslant v_1 \leqslant v_0 \leqslant 6$. La proposition est vraie au rang 0.
- **4.Hérédité :** on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$.

  Comme $v_n \in [0\ ;\ 11]$, $v_{n+1} \in [0\ ;\ 11]$, et que f est croissante sur $[0\ ;\ 11]$ d'après le résultat précédent, les images des quatre nombres de l'encadrement sont rangées dans le même ordre croissant, soit

  $f(2) \leqslant f[v_{n+1}] \leqslant f[v_n] \leqslant f(6) \iff 2 \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n_1} \leqslant 4{,}8$ (car $f(2) = -0{,}05 \times 2^2 + 2{,}2 = -0{,}2 + 2{,}2 = 2$).

  On a donc $2 \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n+1} \leqslant 6$. La proposition est vraie au rang $n+1$.
- **5.Conclusion :** La proposition est vraie au rang $n = 0$ et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle l'est aussi au rang $n+1$. D'après l'axiome de récurrence, pour tout entier naturel n,

  $$2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6.$$

6. Le résultat précédent montre deux résultats : pour tout entier naturel n,

- **7.**$v_{n+1} \leqslant v_n$ donc la suite (v_n) est décroissante ;
- **8.**$2 \leqslant v_n$ donc la suite (v_n) est minorée par 2.

D'après le théorème de la convergence monotone, la suite (v_n) converge vers une limite $\ell \geqslant 2$.

9.

a. La fonction f est continue, $(f([2\ ;\ 6]) \subset [2\ ;\ 6])$ et la suite (v_n) converge, donc d'après le théorème du point fixe, ℓ est l'unique solution sur $[2\ ;\ 6]$ de l'équation $f(x) = x$.

b. On résout l'équation $\ell = f(\ell)$:

$$\ell = f(\ell) \iff \ell = -0{,}05\ell^2 + 1{,}1\ell \iff 0{,}05\ell^2 - 0{,}1\ell = 0 \iff 0{,}05\ell(\ell - 2) = 0$$

On obtient deux solutions : $\ell = 0 \notin [2\ ;\ 6]$ et $\ell = 2$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 2$.

Ceci signifie qu'au bout d'un certain nombre d'années la population va se rapprocher de 2000 individus, soit le tiers du nombre initial.

Partie C

1. En milieu A, on utilise la suite (u_n). On cherche à résoudre $u_n < 3$.

   $u_n < 3 \iff 6 \times 0{,}93^n < 3 \iff 0{,}93^n < \dfrac{1}{2}$. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ donc

   $$0{,}93^n < \frac{1}{2} \iff \ln\left(0{,}93^n\right) < \ln\left(\frac{1}{2}\right) \iff n \times \ln(0{,}93) < -\ln(2)$$

   $$\iff n > -\frac{\ln(2)}{\ln(0{,}93)}$$ car $\ln(0{,}93) < 0$.

   Or $-\dfrac{\ln(2)}{\ln(0{,}93)} \approx 9{,}55$ donc $n \geqslant 10$ soit en 2035.

   À partir de 2035, le nombre d'individus en milieu A sera inférieur à 3000.

2. On sait que (v_n) est décroissante. Avec la calculatrice, on trouve $v_5 \approx 3{,}14$ et $v_6 \approx 2{,}96$. Donc pour $n \geqslant 6$.

   Ce sera donc à partir de 2031.

3. La suite (u_n) converge vers 0, et (v_n) converge vers 2. Les deux suites étant décroissantes en partant de $u_0 = v_0 = 6$, il existera un rang N tel que $v_N > u_N$.

4. Le script complété :

n=0
u = 6
v = 6
while u >= v :
u = **0.93*u**
v= **-0.05*v**2+1.1*v**
n = n+1
print (2025 + n)

5. Le script affiche 2038. Avec la calculatrice : $u_{12} \approx 2{,}51$ et $v_{12} \approx 2{,}41$; $u_{13} \approx 2{,}34$ et $v_{13} \approx 2{,}36$. Donc $N = 13$.

Le sujet complet du bac 2025 (Centres étrangers, jour 2) corrigé →



La méthode pas à pas est dans la fiche magique **« Convergence, divergence »** (Les fiches magiques terminale spé maths, page 16).

Exercice 16 BAC 2023 Une suite définie avec ln ●●●

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]-1{,}5\ ;\ +\infty[$ par
$g(x) = f(x) - x = \ln(2x+3) - 1 - x$.

1. $\lim\limits_{x \to -1,5^+} 2x+3 = 0^+$ ($x > -1,5$ donc $2x+3 > 0$)

or $\lim\limits_{X \to 0} \ln(X) = -\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x \to -1,5} \ln(2x+3) = -\infty$.

De plus, $\lim\limits_{x \to -1,5} -1-x = 0,5$ donc, par somme, $\lim\limits_{x \to -1,5} g(x) = -\infty$.

2. g est dérivable sur $]-1,5\ ;\ +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables sur cet intervalle.

g est de la forme $\ln(u)+v$ avec $u(x) = 2x-3$ et $v(x) = -1-x$. On a donc $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -1$.

$g' = \dfrac{u'}{u} + v'$ donc, pour tout réel $x \in]-1,5\ ;\ +\infty[$,

$$g'(x) = \frac{2}{2x+3} - 1 = \frac{2-2x-3}{2x+3} = \frac{-2x-1}{2x+3}.$$

Sur l'intervalle $]-1,5\ ;\ +\infty[$, $2x+3$ est strictement positif donc le signe de $g'(x)$ est le signe de $-2x-1$: $g'(x)$ est donc strictement positif sur l'intervalle $]-1,5\ ;\ -0,5[$ et strictement négatif sur l'intervalle $]-0,5\ ;\ +\infty[$.

g est donc strictement croissante sur l'intervalle $]-1,5\ ;\ -0,5[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $]-0,5\ ;\ +\infty[$.

3.

a. Sur l'intervalle $]-0,5\ ;\ +\infty[$, la fonction g est une fonction continue (car dérivable) et strictement décroissante. D'où le tableau de variations :

x	$-1,5$		$-0,5$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g		↗	$\approx 0,19$	↘	
	$-\infty$				$-\infty$

$g(-0,5) = \ln(2\times(-0,5)+3) - 1 + 0,5 = \ln(2) - 0,5 \approx 0,19$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ (admis), donc 0 est une valeur intermédiaire entre $g(-0,5)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

En vertu du corollaire au théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $]-0,5\ ;\ +\infty[$.

b. La calculatrice donne :

- $g(0{,}2) \approx 0{,}24$ et $g(0{,}3) \approx -0{,}02$ donc $0{,}2 < \alpha < 0{,}3$;
- $g(0{,}25) \approx 0{,}003$ et $g(0{,}26) \approx -0{,}002$ donc $0{,}25 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}26$.

Partie B

1. f est croissante sur l'intervalle $]-1{,}5\ ;\ +\infty[$ et donc en particulier sur l'intervalle $[-1\ ;\alpha]$.

Donc $-1 \leqslant x \leqslant \alpha \Longrightarrow f(-1) \leqslant f(x) \leqslant f(\alpha)$.

Or $g(\alpha) = 0 = f(\alpha) - \alpha$ donc $f(\alpha) = \alpha$ et

$f(-1) = \ln(2 \times (-1) + 3) - 1 = \ln(1) - 1 = -1$

donc $-1 \leqslant f(x) \leqslant \alpha$, c'est à dire $f(x) \in [-1\ ;\ \alpha]$.

2.

a. *Initialisation :* à l'indice $n = 0$:

On a $u_0 = 0$ et $u_1 = f(u_0) = f(0) = \ln(3) - 1 \approx 0{,}099$ donc $-1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \alpha$.

La propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : supposons que, pour un entier naturel n donné, l'inégalité $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ est vraie. Montrons que l'inégalité sera vraie au rang suivant :

Par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} &-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha \\ &\Longrightarrow\ f(-1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(\alpha) \quad \text{car } f \text{ est croissante sur } [-1\ ;\ \alpha] \\ &\Longrightarrow\ -1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha \quad \text{car } f(-1) = -1 \text{ et } f(\alpha) = \alpha \end{aligned}$$

Si l'inégalité est vérifiée à l'indice n, alors, elle l'est aussi au rang suivant.

Conclusion : L'inégalité est vérifiée à l'indice 0 et sa véracité est héréditaire pour tout indice n naturel, donc, par principe de récurrence, on a $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ pour tout entier naturel n.

b. On vient d'établir que :

pour tout entier naturel n , $u_n \leqslant \alpha$ donc la suite est majorée par α

et pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite est croissante,

elle est donc convergente.

Le sujet complet du bac 2023 (Centres étrangers (groupe I), jour 2) corrigé →



La méthode pas à pas est dans la fiche magique **« Convergence, divergence »** (Les fiches magiques terminale spé maths, page 16).

LES FICHES MAGIQUES TERMINALE SPÉ MATHS

Révise toute la terminale spé maths avec les fiches magiques



- **41 fiches claires et illustrées** : tout le programme de spécialité maths de terminale, une notion par page.
- **Des vidéos méthode** accessibles par QR code sur les fiches.
- **Des exercices corrigés** après chaque fiche pour vérifier que tout est acquis.

campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

ANNALES BAC MATHS TERMINALE 2027

Prépare le bac avec les vrais sujets



- **75 sujets types** tirés des vrais sujets du bac, classés par chapitre.
- **3 bacs blancs complets** pour s'entraîner en conditions réelles.
- Des **corrigés avec la rédaction attendue**, des conseils et un aide-mémoire.

campusxyz.fr/produit/annales-bac-2027-terminale-spe-maths