Exercices sur la dérivation et la convexité en terminale spé maths

CAMPUS XYZ

Exercice 1 — Dériver une fonction composée ●○○

Calcule la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

a. $f(x) = (3x - 1)^5$ sur $\mathbb{R}$

b. $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$

c. $h(x) = \mathrm{e}^{-2x+1}$ sur $\mathbb{R}$

d. $k(x) = \dfrac{1}{(2x+3)^2}$ sur $\left]-\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$

Exercice 2 — Convexité d'un polynôme ●○○

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$ sur $\mathbb{R}$.

a. Calcule $f'(x)$ puis $f''(x)$.

b. Étudie la convexité de f et donne les coordonnées du point d'inflexion.

Exercice 3 Les fonctions de référence ●○○

À l'aide de la dérivée seconde, donne la convexité de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

a. $\exp$ sur $\mathbb{R}$

b. $\ln$ sur $]0\,;+\infty[$

c. $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$

d. $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$

Exercice 4 Vrai ou faux sur la convexité ●○○

Vrai ou faux ? Justifie.

a. Si $f'' \geqslant 0$ sur I, alors f' est croissante sur I.

b. Une fonction convexe est croissante.

c. Si $f''(a) = 0$, la courbe de f a un point d'inflexion d'abscisse a.

d. La courbe d'une fonction concave est en dessous de ses tangentes.

Exercice 5 — Le point d'inflexion de x e^x ●●○

Soit $f(x) = x\,\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.

a. Montre que $f'(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^x$ et $f''(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^x$.

b. Étudie la convexité de f et précise le point d'inflexion.

Exercice 6 — Deux inégalités à connaître ●●○

a. Donne l'équation de la tangente à la courbe de $\exp$ en 0. Déduis de la convexité de $\exp$ que $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$ pour tout réel x.

b. De même, montre que $\ln x \leqslant x-1$ pour tout $x > 0$.

c. Déduis de a. que $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1-x$ pour tout réel x.

Exercice 7 — Convexité de ln(1 + x²) ●●○

Soit $f(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$ sur $\mathbb{R}$.

a. Calcule $f'(x)$ et montre que $f''(x) = \dfrac{2\left(1 - x^2\right)}{\left(1 + x^2\right)^2}$.

b. Étudie la convexité de f et donne les points d'inflexion.

Exercice 8 — La courbe en cloche ●●○

Soit $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

a. Calcule $f'(x)$ et dresse le tableau de variations de f (avec les limites).

b. Montre que $f''(x) = \left(4x^2 - 2\right)\mathrm{e}^{-x^2}$, puis donne les abscisses des points d'inflexion.

Exercice 9 — Trouver les coefficients ●●○

Soit $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$. On sait que la courbe de f a un point d'inflexion d'abscisse 1, et que la tangente en ce point est horizontale.

a. Détermine a et b.

b. Vérifie que $f(x) = (x-1)^3 + 1$. Que peut-on dire des variations de f ?

Exercice 10 — Lire la convexité sur f' ●●○

On sait que la dérivée f' d'une fonction f deux fois dérivable sur $[-2\,;4]$ est décroissante sur $[-2\,;1]$ et croissante sur $[1\,;4]$, avec $f'(1) = -3$, $f'(-2) = 5$ et $f'(4) = 6$.

a. Étudie la convexité de f.

b. Combien de fois f' s'annule-t-elle ? Déduis-en le nombre d'extremums de f.

Exercice 11 Une inégalité avec le nombre e ●●●

a. Justifie que, pour tout réel $t > -1$, $\ln(1+t) \leqslant t$.

b. Déduis-en que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}$.

c. Calcule $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ pour $n = 10$ et $n = 1\,000$.

Exercice 12 Une courbe et sa tangente au point d'inflexion ●●●

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ et T la tangente à sa courbe au point d'abscisse 1.

a. Montre que le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion.

b. Donne une équation de T.

c. Vérifie que $f(x) - (-3x+5) = (x-1)^3$ et retrouve la position de la courbe par rapport à T.

Exercice 13 TYPE CONTRÔLE **Étude complète avec convexité** ●●●

Soit $f(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$, de courbe $\mathscr{C}$.

1. Détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Montre que $f'(x) = -(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$ et dresse le tableau de variations de f.
3. Montre que $f''(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$. Étudie la convexité de f et donne le point d'inflexion A.
4. Donne une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ en A.
5. Déduis de la question 3 la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T sur $[0\,;+\infty[$, puis l'inégalité $(x+2)\,\mathrm{e}^{-x} \geqslant 2 - x$ pour $x \geqslant 0$.

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE **Quand l'épidémie ralentit-elle ?** ●●●

Le nombre de personnes touchées par une rumeur, en milliers, est modélisé par $f(t) = \dfrac{10}{1 + 9\,\mathrm{e}^{-t}}$, où $t \geqslant 0$ est le temps en jours.

1. Calcule $f(0)$ et la limite de f en $+\infty$. Interprète.

2. Montre que $f'(t) = \dfrac{90\,\mathrm{e}^{-t}}{(1 + 9\,\mathrm{e}^{-t})^2}$ et donne les variations de f.

3. On admet que $f''(t) = \dfrac{90\,\mathrm{e}^{-t}\,(9\,\mathrm{e}^{-t} - 1)}{(1 + 9\,\mathrm{e}^{-t})^3}$. Étudie le signe de $f''(t)$.

4. Montre que la courbe de f a un point d'inflexion d'abscisse $t_0 = \ln 9$ et calcule $f(t_0)$.

5. La vitesse de propagation est $f'(t)$. À quel moment est-elle maximale ? Combien de personnes sont alors touchées ?

Exercice 15 BAC 2023 Lire la courbe de f' ●●●

Bac spé maths 2023, Métropole, Antilles-Guyane (septembre), jour 2, exercice 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

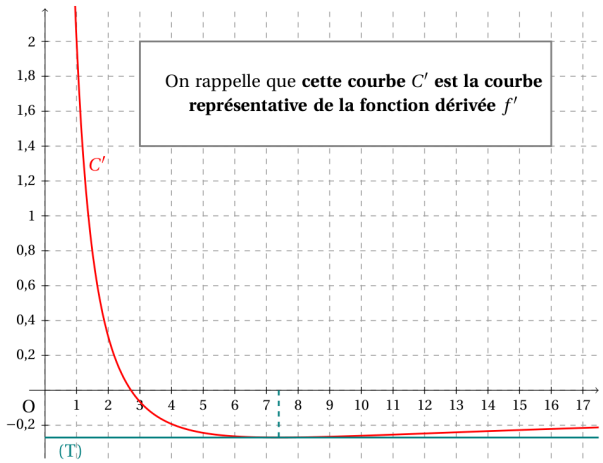
$$f(x) = (2 - \ln x) \times \ln x,$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal et C' la courbe représentative de la fonction f', fonction dérivée de la fonction f.

La **courbe C'** est donnée ci-dessous ainsi que son unique tangente horizontale (T).



1. Par lecture graphique, avec la précision que permet le tracé ci-dessus, donner :
   a. le coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse 1.
   b. le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.
2.
   a. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Montrer que la courbe C coupe l'axe des abscisses en deux points exactement dont on précisera les coordonnées.
4.
   a. Montrer que pour tout réel x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$, $\quad f'(x) = \dfrac{2(1 - \ln x)}{x}$.
   b. En déduire, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
5. On note f'' la dérivée seconde de f et on admet que pour tout réel x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$, $f''(x) = \dfrac{2(\ln x - 2)}{x^2}$.

   Déterminer par le calcul le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe et préciser les coordonnées du point d'inflexion de la courbe C.

Exercice 16 BAC 2026 Convexité d'une fonction avec ln ●●●

Bac spé maths 2026, Amérique du Nord, jour 1, exercice 4

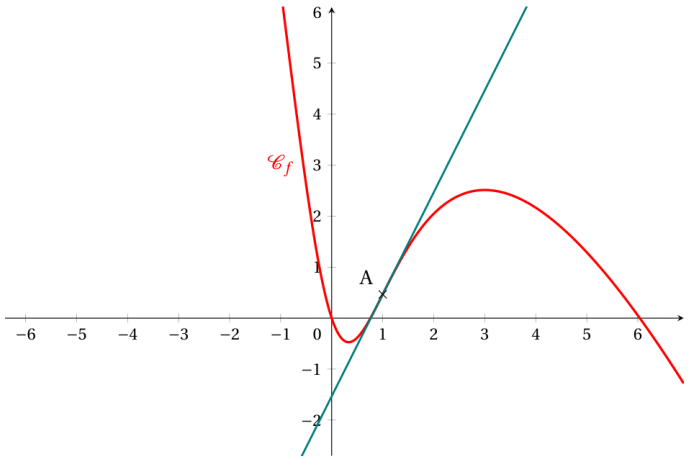
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 5\ln\left(x^2+1\right) - 3x$$

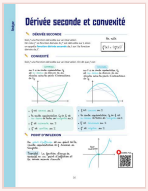
et on admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ et la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.



1. Conjecturer, à l'aide de la représentation graphique de la fonction f, les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.
2. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $-\infty$.
3.
   a. Démontrer que, pour tout x réel strictement positif,
   $$f(x) = x\left(10\frac{\ln x}{x} - 3\right) + 5\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$
   b. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $+\infty$.
4.
   a. Démontrer que pour tout x réel, $\quad f'(x) = \dfrac{-3x^2+10x-3}{x^2+1}$.
   b. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
5. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x,
   $$f''(x) = \frac{-10x^2+10}{\left(x^2+1\right)^2}$$
   a. Valider ou rejeter la conjecture faite à la question **1**.
   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
   c. En déduire que pour tout $x \geqslant 1$, $\quad \ln\left(x^2+1\right) \leqslant x + \ln(2) - 1$.



LA FICHE MAGIQUE QUI VA AVEC

« Dérivée seconde et convexité »

Convexité, concavité et point d'inflexion avec la dérivée seconde, sur une seule fiche.

Les fiches magiques terminale spé maths : campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

CAMPUS XYZ

Corrigés

Exercices sur la dérivation et la convexité en terminale spé maths

Exercices sur la dérivation et la convexité en terminale spé maths : corrigés

CAMPUS XYZ

Exercice 1 — Dériver une fonction composée ●○○

$(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$; $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$; $(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u$.

a. $f'(x) = 5 \times 3 \times (3x-1)^4 = 15(3x-1)^4$.

b. $g'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

c. $h'(x) = -2\,\mathrm{e}^{-2x+1}$.

d. $k(x) = (2x+3)^{-2}$, donc $k'(x) = -2 \times 2\,(2x+3)^{-3} = -\dfrac{4}{(2x+3)^3}$.

Exercice 2 — Convexité d'un polynôme ●○○

a. $f'(x) = 3x^2 - 12x$ et $f''(x) = 6x - 12$.

b. $f''(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant 2$. f est concave sur $]-\infty\,;2]$ et convexe sur $[2\,;+\infty[$. f'' change de signe en 2 : point d'inflexion $(2\,;-14)$, car $f(2) = 8 - 24 + 2 = -14$.

> $f'' \geqslant 0$ sur $I \iff f'$ croissante sur $I \iff f$ convexe sur I (courbe au-dessus de ses tangentes). Un point d'inflexion est un point où f'' **change de signe**.

Exercice 3 — Les fonctions de référence ●○○

a. $\exp'' = \exp > 0$: **convexe**.

b. $\ln''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$: **concave**.

c. $(\sqrt{x})'' = -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}} < 0$: **concave**.

d. $\left(\dfrac{1}{x}\right)'' = \dfrac{2}{x^3} > 0$: **convexe**.

Exercice 4 — Vrai ou faux sur la convexité ●○○

a. **Vrai** : f'' est la dérivée de f'.

b. **Faux** : $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ mais décroissante sur $]-\infty\,;0]$.

c. **Faux** : pour $f(x) = x^4$, $f''(x) = 12x^2$ s'annule en 0 sans changer de signe : pas de point d'inflexion.

d. **Vrai** : c'est la définition (ou une propriété) de la concavité.

Exercice 5 — Le point d'inflexion de x eˣ ●●○

a. $f'(x) = \mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x = (x+1)\,\mathrm{e}^x$, puis $f''(x) = \mathrm{e}^x + (x+1)\,\mathrm{e}^x = (x+2)\,\mathrm{e}^x$.

b. $\mathrm{e}^x > 0$: f'' a le signe de $x+2$. f **est concave sur** $]-\infty\,;-2]$**, convexe sur** $[-2\,;+\infty[$, avec un point d'inflexion $\left(-2\,;-2\mathrm{e}^{-2}\right)$, soit environ $(-2\,;-0{,}27)$.

Exercice 6 — Deux inégalités à connaître ●●○

a. $\exp(0) = \exp'(0) = 1$: tangente $y = x+1$. $\exp$ est convexe, donc sa courbe est au-dessus de ses tangentes : $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$.

b. En 1 : $\ln 1 = 0$ et $\ln'(1) = 1$, tangente $y = x-1$. $\ln$ est concave, donc sa courbe est en dessous : $\ln x \leqslant x-1$.

c. On remplace x par $-x$ dans a. : $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1-x$.

Exercice 7 — Convexité de ln(1 + x²) ●●○

a. $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, puis $f''(x) = \dfrac{2\left(1+x^2\right) - 2x \times 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \dfrac{2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$.

b. f'' a le signe de $1-x^2$: f **est convexe sur** $[-1\,;1]$**, concave sur** $]-\infty\,;-1]$ **et sur** $[1\,;+\infty[$. Points d'inflexion : $(-1\,;\ln 2)$ **et** $(1\,;\ln 2)$.

Exercice 8 — La courbe en cloche ●●○

a. $f'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$, du signe de $-x$: f **croît sur** $]-\infty\,;0]$**, décroît sur** $[0\,;+\infty[$, maximum $f(0) = 1$, et $f(x) \to 0$ en $\pm\infty$.

b. $f''(x) = -2\,\mathrm{e}^{-x^2} + (-2x)(-2x)\,\mathrm{e}^{-x^2} = \left(4x^2-2\right)\mathrm{e}^{-x^2}$. $4x^2-2$ s'annule en changeant de signe en $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$: **points d'inflexion d'abscisses** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **et** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 9 — Trouver les coefficients ●●○

a. $f''(x) = 6x + 2a$ s'annule en 1 : $6 + 2a = 0$, $a = -3$. $f'(x) = 3x^2 - 6x + b$ et $f'(1) = 0$: $3 - 6 + b = 0$, $b = 3$.

b. $(x-1)^3 + 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 = x^3 - 3x^2 + 3x$. $f'(x) = 3(x-1)^2 \geqslant 0$: f **est croissante sur** $\mathbb{R}$; sa tangente est horizontale en 1 sans extremum.

Exercice 10 — Lire la convexité sur f' ●●○

a. f' décroissante $\iff f'' \leqslant 0$: f **est concave sur** $[-2\,;1]$ **et convexe sur** $[1\,;4]$, avec un point d'inflexion d'abscisse 1.

b. Sur chaque intervalle, f' est continue et strictement monotone et passe d'un signe à l'autre ($5 \to -3$, puis $-3 \to 6$) : elle s'annule **deux fois** en changeant de signe. f **a donc deux extremums** : un maximum puis un minimum.

Exercice 11 — Une inégalité avec le nombre e ●●●

a. La fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ est concave (dérivée seconde $-\dfrac{1}{(1+t)^2} < 0$) et sa tangente en 0 est $y = t$: **sa courbe est en dessous**.

b. Avec $t = \dfrac{1}{n}$: $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}$, donc $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \leqslant 1$. On compose par $\exp$ croissante : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}$.

c. $1{,}1^{10} \approx 2{,}594$ **et** $1{,}001^{1000} \approx 2{,}717$, à comparer à $\mathrm{e} \approx 2{,}718$.

Exercice 12 — Une courbe et sa tangente au point d'inflexion ●●●

a. $f''(x) = 6x - 6$ change de signe en 1 : **point d'inflexion d'abscisse** 1.

b. $f(1) = 2$ et $f'(1) = 3 - 6 = -3$: $y = -3(x-1) + 2$, soit $y = -3x + 5$.

c. $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ et $f(x) + 3x - 5 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$: égalité vérifiée. **La courbe est sous** T **pour** $x < 1$ **et au-dessus pour** $x > 1$: elle traverse sa tangente, comme en tout point d'inflexion.

Exercice 13 — TYPE CONTRÔLE — Étude complète avec convexité ●●●

1. En $-\infty$: $x + 2 \to -\infty$ et $\mathrm{e}^{-x} \to +\infty$: $-\infty$. En $+\infty$: $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{2}{\mathrm{e}^x} \to 0$ (croissances comparées) : 0.

2. $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x+2)\,\mathrm{e}^{-x} = -(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$. f **croît sur** $]-\infty\,;-1]$, **décroît sur** $[-1\,;+\infty[$, maximum $f(-1) = \mathrm{e}$.

3. $f''(x) = -\mathrm{e}^{-x} + (x+1)\,\mathrm{e}^{-x} = x\,\mathrm{e}^{-x}$, du signe de x. **Concave sur** $]-\infty\,;0]$, **convexe sur** $[0\,;+\infty[$, point d'inflexion $A(0\,;2)$.

4. $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$: $T : y = -x + 2$.

5. Sur $[0\,;+\infty[$, f est convexe : $\mathscr{C}$ **est au-dessus de** T, d'où $(x+2)\,\mathrm{e}^{-x} \geqslant 2 - x$ pour $x \geqslant 0$.

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE Quand l'épidémie ralentit-elle ? ●●●

1. $f(0) = \dfrac{10}{10} = 1$: 1 000 personnes au départ. $\mathrm{e}^{-t} \to 0$, donc $f(t) \to 10$: au plus $10\,000$ personnes seront touchées.

2. $f = 10 \times \dfrac{1}{u}$ avec $u(t) = 1 + 9\,\mathrm{e}^{-t}$, $u'(t) = -9\,\mathrm{e}^{-t}$: $f'(t) = -10\,\dfrac{u'(t)}{u(t)^2} = \dfrac{90\,\mathrm{e}^{-t}}{(1 + 9\,\mathrm{e}^{-t})^2} > 0$. f **est strictement croissante**.

3. $f''(t)$ a le signe de $9\,\mathrm{e}^{-t} - 1$: $9\,\mathrm{e}^{-t} - 1 \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^{-t} \geqslant \dfrac{1}{9} \iff t \leqslant \ln 9$. $f'' \geqslant 0$ **sur** $[0\,;\ln 9]$ **et** $f'' \leqslant 0$ **sur** $[\ln 9\,;+\infty[$.

4. f'' change de signe en $\ln 9$: **point d'inflexion d'abscisse** $t_0 = \ln 9 \approx 2{,}2$. $\mathrm{e}^{-\ln 9} = \dfrac{1}{9}$, donc $f(t_0) = \dfrac{10}{2} = 5$.

5. f' croît sur $[0\,;\ln 9]$ ($f'' \geqslant 0$) puis décroît : **la vitesse est maximale au bout de** $\ln 9 \approx 2{,}2$ **jours**, quand $5\,000$ **personnes** sont touchées (la moitié du maximum).

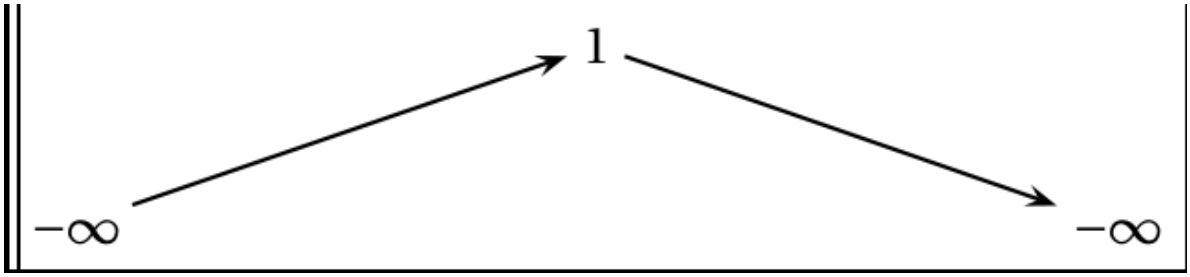
Exercice 15 **BAC 2023** **Lire la courbe de f'** ●●●

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = (2 - \ln x) \times \ln x$,

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal et C' la courbe représentative de la fonction f', fonction dérivée de la fonction f.

La **courbe C'** est donnée ci-dessous ainsi que son unique tangente horizontale (T).



1.

a. Le coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse 1 est $f'(1)$; graphiquement, c'est environ 2.

b. Le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe est le plus grand intervalle sur lequel la fonction f' est croissante, soit $[7{,}4\ ;\ +\infty[$.

2.

a. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2-\ln x = -\infty\end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} (2-\ln x)\times \ln x = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

b. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2-\ln x = +\infty\end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to0} (2-\ln x)\times \ln x = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty$.

On en déduit que la courbe C admet la droite d'équation $x = 0$ comme asymptote verticale.

3. Les abscisses des points d'intersection de la courbe C et de l'axe des abscisses sont solutions de l'équation $f(x) = 0$; on résout cette équation.

$$f(x) = 0 \iff (2-\ln x)\times \ln x = 0 \iff 2-\ln x = 0 \text{ ou } \ln x = 0 \iff \ln x = 2 \text{ ou } \ln x = 0$$
$$\iff x = \mathrm{e}^2 \text{ ou } x = 1$$

Les coordonnées des points d'intersection de la courbe C et de l'axe des abscisses sont donc $(1\ ;\ 0)$ et $(\mathrm{e}^2\ ;\ 0)$.

4.

a. Pour tout réel x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$:

$$f'(x) = \left(0-\frac{1}{x}\right)\times \ln x + (2-\ln x)\times \frac{1}{x} = -\frac{\ln x}{x} + \frac{2-\ln x}{x} = \frac{2-2\ln x}{x} = \frac{2(1-\ln x)}{x}$$

b. $f'(x)$ s'annule et change de signe quand $1-\ln x = 0$, donc pour $x = \mathrm{e}$.

$f(\mathrm{e}) = (2-\ln \mathrm{e})\times \ln \mathrm{e} = (2-1)\times 1 = 1$

D'où le tableau de variations de la fonction f:

x	0		e		$+\infty$
x	0	$+$		$+$	
$1-\ln x$	‖	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

5. On note f'' la dérivée seconde de f et on admet que sur $]0\ ;\ +\infty[$, $f''(x) = \dfrac{2(\ln x - 2)}{x^2}$.

La fonction f est convexe si et seulement si $f''(x) \geqslant 0$; on résout cette inéquation.

$$f''(x) \geqslant 0 \iff \frac{2(\ln x - 2)}{x^2} \geqslant 0 \iff \ln x - 2 \geqslant 0 \iff \ln x \geqslant 2 \iff x \geqslant \mathrm{e}^2$$

Le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe est donc $\left[\mathrm{e}^2\ ;\ +\infty\right[$.

$f''(x) = 0 \iff 2 - \ln x = 0 \iff x = \mathrm{e}^2$ et $f(\mathrm{e}^2) = (2 - \ln \mathrm{e}^2) \times \ln \mathrm{e}^2 = 0$

Donc la courbe C admet le point de coordonnées $(\mathrm{e}^2\ ;\ 0)$ comme point d'inflexion.

Le sujet complet du bac 2023 (Métropole, Antilles-Guyane (septembre), jour 2) corrigé →



La méthode pas à pas est dans la fiche magique **« Dérivée seconde et convexité »** (Les fiches magiques terminale spé maths, page 36).

Exercice 16 BAC 2026 Convexité d'une fonction avec ln ●●●

1. De ce que l'on voit de la courbe, la fonction est manifestement convexe d'abord, puis concave. Comme la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A semble traverser la courbe au point de tangence, on peut émettre la conjecture que la fonction f est convexe sur $]-\infty\ ;\ 1]$ et concave sur $[1\ ;\ +\infty[$.

2. On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2+1=+\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X)=+\infty \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(x^2+1)=+\infty$.

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x=+\infty$

Donc par produit et somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

3.

a. Soit x un réel strictement positif.

$$\begin{aligned} f(x) &= 5\ln\left(x^2+1\right)-3x \\ &= 5\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)-3x \\ &= 5\ln\left(x^2\right)+5\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-3x \quad \text{par propriété de la fonction ln.} \\ &= 5\times 2\ln(x)-3x+5\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \\ &= x\left(10\frac{\ln x}{x}-3\right)+5\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

On a donc bien : pour tout x réel strictement positif, $f(x)=x\left(10\dfrac{\ln x}{x}-3\right)+5\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

b. On va utiliser la forme établie à la question précédente pour lever l'indétermination :

- **c.** D'une part :

  D'après la propriété des croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}=0$.

  Donc par produit et somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} 10\dfrac{\ln(x)}{x}-3=-3$.

  De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ donc par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(10\dfrac{\ln x}{x}-3\right)=-\infty$.

- **d.** D'autre part :

  $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x^2}=1 \\ \lim\limits_{X\to1} \ln(X)=0 \end{cases}$ par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=0$

  Par produit on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 5\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=0$.

Finalement, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

4.

a. Pour déterminer l'expression de la fonction dérivée de f, on va revenir à l'expression de départ de $f(x)$, plus simple que celle obtenue à la question **3. a.**.

On a admis que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Si on pose : $\begin{cases} u : x \longmapsto x^2+1 \\ u' : x \longmapsto 2x \end{cases}$ on a $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 5\ln\big(u(x)\big) - 3x.$

Ainsi, on a : $\forall x \in \mathbb{R},$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5\frac{u'(x)}{u(x)} - 3 \\ &= 5\frac{2x}{x^2+1} - 3 \\ &= \frac{10x}{x^2+1} + \frac{-3\big(x^2+1\big)}{x^2+1} \\ &= \frac{10x - 3x^2 - 3}{x^2+1} \\ &= \frac{-3x^2+10x-3}{x^2+1} \end{aligned}$$

On arrive bien à l'expression attendue.

b. Pour tout x réel, l'expression x^2+1 est supérieure à 1, et donc strictement positive.

Le signe de $f'(x)$ est donc celui du trinôme : $-3x^2+10x-3$.

Ce trinôme a un coefficient dominant égal à -3, donc négatif. Cela signifie que toutes les images $-3x^2+10x-3$ sont négatives, sauf pour les valeurs x comprises entre d'éventuelles racines.

Le discriminant du trinôme est : $\Delta = 10^2 - 4\times(-3)\times(-3) = 100 - 36 = 64 = 8^2$.

Comme il est strictement positif, le trinôme admet deux racines réelles distinctes :

$x_1 = \dfrac{-10-8}{2\times(-3)} = 3$ et $x_2 = \dfrac{-10+8}{2\times(-3)} = \dfrac{1}{3}$.

On peut donc établir le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
signe de $-3x^2+10x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$	
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On a donc une fonction f qui est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{3}\right]$, ainsi que sur l'intervalle $[3\ ;\ +\infty[$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{3}\ ;\ 3\right]$.

Ceci est cohérent avec la courbe tracée sur le sujet.

5.

a. Puisque l'expression de la fonction dérivée seconde est donnée, on va pouvoir utiliser ce résultat.

Le dénominateur $\left(x^2+1\right)^2$ est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, en tant que carré d'un réel lui-même strictement positif.

$f''(x)$ a donc le même signe que son numérateur :

$-10x^2+10 = 10(1-x^2) = 10(1-x)(1+x)$.

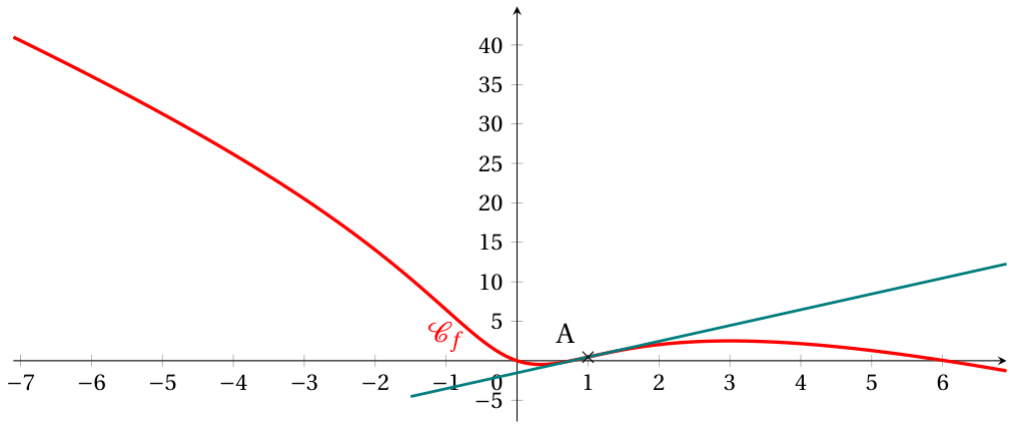
Le numérateur est donc une expression polynomiale de degré 2, dont le coefficient dominant est négatif, et ayant deux racines évidentes : 1 et -1.

On peut donc établir le tableau de signe de $f''(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

f est donc convexe sur $[-1;1]$, et concave sur $]-\infty;-1]$ ainsi que sur $[1;+\infty[$, avec deux points d'inflexion, à l'abscisse -1 et à l'abscisse 1(c'est le point A).

Cela permet donc de rejeter la conjecture formulée à la question **1.**. Cette conjecture est faussée par l'échelle choisie pour la représentation de f. Ci-après, avec une échelle qui permet d'observer les images pour des abscisses inférieures à -1, la concavité de cette zone devient apparente :



b. L'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1 est donnée par la formule classique : $y = f'(1)\times\left(x-1\right)+f(1)$.

Avec : $f(1) = 5\ln(1^2+1)-3\times 1 = 5\ln(2)-3$;

et : $f'(1) = \dfrac{-3\times 1^2+10\times 1-3}{1^2+1} = \dfrac{4}{2} = 2$;

On arrive à : $y = 2\left(x-1\right)+5\ln(2)-3$ soit $y = 2x+5\ln(2)-5$.

c. On nous demande d'établir une inégalité pour $x \geqslant 1$.

Sur $[1\ ;\ +\infty[$, on a établi à la question **5. a.** que la fonction est concave.

Graphiquement, cela se traduit par le fait que la courbe représentative de f est en dessous de toutes ses tangentes sur cet intervalle, notamment en dessous de celle au point d'abscisse 1, dont on vient de déterminer l'équation.

On peut donc affirmer :

$$\begin{aligned} f(x) \leqslant 2x + 5\ln(2) - 5 &\iff 5\ln\left(x^2+1\right) - 3x \leqslant 2x + 5\ln(2) - 5 \\ &\iff 5\ln\left(x^2+1\right) \leqslant 3x + 2x + 5\ln(2) - 5 \\ &\iff 5\ln\left(x^2+1\right) \leqslant 5x + 5\ln(2) - 5 \\ &\iff 5\ln\left(x^2+1\right) \leqslant 5\big(x + \ln(2) - 1\big) \\ &\iff \ln\left(x^2+1\right) \leqslant x + \ln(2) - 1 \quad \text{car } 5 > 0 \end{aligned}$$

On établit donc ainsi l'inégalité demandée.

Le sujet complet du bac 2026 (Amérique du Nord, jour 1) corrigé →



La méthode pas à pas est dans la fiche magique **« Dérivée seconde et convexité »** (Les fiches magiques terminale spé maths, page 36).

LES FICHES MAGIQUES TERMINALE SPÉ MATHS

Révise toute la terminale spé maths avec les fiches magiques



- **41 fiches claires et illustrées** : tout le programme de spécialité maths de terminale, une notion par page.
- **Des vidéos méthode** accessibles par QR code sur les fiches.
- **Des exercices corrigés** après chaque fiche pour vérifier que tout est acquis.

campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

ANNALES BAC MATHS TERMINALE 2027

Prépare le bac avec les vrais sujets



- **75 sujets types** tirés des vrais sujets du bac, classés par chapitre.
- **3 bacs blancs complets** pour s'entraîner en conditions réelles.
- Des **corrigés avec la rédaction attendue**, des conseils et un aide-mémoire.

campusxyz.fr/produit/annales-bac-2027-terminale-spe-maths