Exercice 1 — Exploiter un tableau de variations ●○○

Une fonction f continue sur $[-3\,;5]$ vérifie : $f(-3)=22$, f décroît jusqu'à $f(-1)=-10$, croît jusqu'à $f(3)=22$, puis décroît jusqu'à $f(5)=-10$.

a. Donne le maximum et le minimum de f sur $[-3\,;5]$, et où ils sont atteints.

b. Combien de solutions a l'équation $f(x)=0$?

c. Compare $f(0)$ et $f(2)$.

Exercice 2 — Une fonction rationnelle ●○○

Soit $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ sur $]1\,;+\infty[$.

a. Détermine les limites de f en 1 et en $+\infty$.

b. Montre que $f'(x)=\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$ et dresse le tableau de variations de f.

Exercice 3 — Un polynôme de degré 3 ●○○

Soit $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 5$ sur $[-3\,;5]$.

a. Calcule $f'(x)$ et factorise-la.

b. Dresse le tableau de variations de f sur $[-3\,;5]$.

Exercice 4 — Étude de ln(x)/√x ●●○

Soit $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$.

a. Détermine la limite de f en 0. En écrivant $\ln x = 2\ln\sqrt{x}$, détermine la limite en $+\infty$.

b. Montre que $f'(x) = \dfrac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$ et dresse le tableau de variations de f.

Exercice 5 — Tangente et position relative ●●○

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$ et T la tangente à sa courbe au point d'abscisse 0.

a. Donne une équation de T.

b. Étudie le signe de $f(x) - (-3x + 1)$ et déduis-en la position de la courbe par rapport à T.

Exercice 6 — La boîte de volume maximal ●●○

Dans une plaque carrée de 10 cm de côté, on découpe aux quatre coins un carré de côté x cm, puis on replie pour former une boîte sans couvercle.

a. Justifie que le volume de la boîte est $V(x) = x(10 - 2x)^2$, pour $x \in [0\,;5]$.

b. Montre que $V'(x) = (10 - 2x)(10 - 6x)$.

c. Pour quelle valeur de x le volume est-il maximal ? Donne ce volume.

Exercice 7 Maximiser un bénéfice ●●○

Le bénéfice d'une entreprise, en milliers d'euros, pour x centaines d'objets vendus ($x \in [1\,;10]$), est $B(x) = -2x + 10\ln x + 5$.

a. Étudie les variations de B sur $[1\,;10]$.

b. Combien d'objets faut-il vendre pour un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice, à l'euro près ?

Exercice 8 Le point le plus proche ●●○

Soit $\mathscr{C}$ la courbe de la fonction racine carrée, $A(2\,;0)$ et $M\left(x\,;\sqrt{x}\right)$ un point de $\mathscr{C}$, $x \geqslant 0$.

a. Montre que $AM^2 = x^2 - 3x + 4$.

b. Déduis-en la position de M qui rend la distance AM minimale, et cette distance.

Exercice 9 — Étude de $(\ln x)^2 - 2\ln x$ ●●○

Soit $f(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$.

a. Résous $f(x) = 0$.

b. Détermine les limites de f en 0 et en $+\infty$.

c. Étudie les variations de f.

Exercice 10 — Une fonction auxiliaire pour un domaine ●●●

a. Soit $g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$. Montre que $g(x) \geqslant 0$ pour tout réel x.

b. Déduis-en que $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - x}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

c. Détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

d. Montre que $f'(x) = \dfrac{(1-x)\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - x)^2}$ et donne le maximum de f.

Exercice 11 Comparer ln x et √x ●●●

Soit $d(x) = \sqrt{x} - \ln x$ sur $]0\,;+\infty[$.

a. Montre que $d'(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{2x}$.

b. Déduis-en que $\ln x < \sqrt{x}$ pour tout $x > 0$.

Exercice 12 Retrouver une fonction et l'étudier ●●●

Soit $f(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^x$. Sa courbe passe par $(0\,;1)$ et a une tangente horizontale en ce point.

a. Montre que $f'(x) = (ax+a+b)\,\mathrm{e}^x$, puis détermine a et b.

b. Étudie les variations de f, ses limites, et résous $f(x) = 0$.

Exercice 13 TYPE CONTRÔLE **Une étude complète avec ln** ●●●

Soit $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$ sur $]-1\,;+\infty[$, de courbe $\mathscr{C}$.

1. Détermine la limite de f en -1 (on admet que $X \ln X \to 0$ quand $X \to 0^+$) et en $+\infty$.
2. Montre que $f'(x) = \ln(x+1)$ et dresse le tableau de variations de f.
3. Déduis-en que $(x+1)\ln(x+1) \geqslant x$ pour tout $x > -1$.
4. Étudie la convexité de f. Quelle est la tangente à $\mathscr{C}$ en 0 ?
5. Montre que l'équation $f(x) = 1$ a une unique solution α dans $[0\,;+\infty[$ et que $1 < \alpha < 2$.

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE **Encadrer ln(1 + x)** ●●●

On veut montrer que, pour tout $x \geqslant 0$: $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

1. Soit $g(x) = \ln(1+x) - x$ sur $[0\,;+\infty[$. Étudie ses variations et conclus sur son signe.

2. Soit $h(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$. Montre que $h'(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$ et conclus.

3. Déduis-en un encadrement de $\ln(1{,}1)$, sans calculatrice.

4. Avec $x = \dfrac{1}{n}$ ($n \geqslant 1$), encadre $n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ et déduis-en sa limite.

5. Déduis-en $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 15 BAC 2023 Une étude avec x ln x ●●○

Bac spé maths 2023, La Réunion, jour 1, exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par:

$$f(x) = 3x + 1 - 2x\ln(x).$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.

On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2.
   a. Démontrer que pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = 1 - 2\ln(x)$.
   b. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   On fera figurer dans ce tableau les limites ainsi que la valeur exacte de l'extremum.
3.
   a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0\ ;\ +\infty[$. On notera α cette solution.
   b. En déduire le signe de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
4. On considère une primitive quelconque de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. On la note F.
   Peut-on affirmer que la fonction F est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\ ;\ +\infty\right[$? Justifier.
5.
   a. Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   Quelle est la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à ses tangentes ?
   b. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
   c. Déduire des questions 5. a et 5 .b que pour tout réel x strictement positif:
   $$\ln(x) \geqslant 1 - \frac{1}{x}.$$
   .

Exercice 16 BAC 2024 Étude de x ln(x²) – 1/x ●●●

Bac spé maths 2024, Amérique du Nord, jour 1, exercice 3

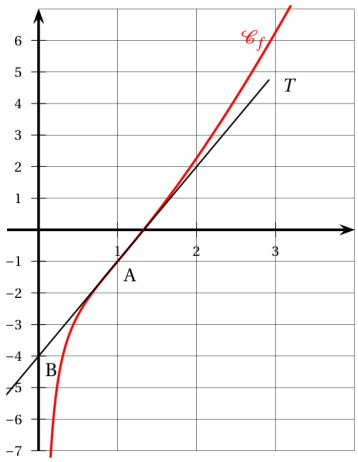
Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{x}.$$

Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f, ainsi que la droite (T), tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point A de coordonnées $(1\ ;\ -1)$.

Cette tangente passe également par le point B$(0\ ;\ -4)$.



1. Lire graphiquement $f'(1)$ et donner l'équation réduite de la tangente (T).
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

   Que semble représenter le point A pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$?

Partie B : étude analytique

1. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$, puis sa limite en 0.
2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   a. Déterminer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   b. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$,
   $$f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}.$$
3.
   a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   b. Étudier les variations de la fonction f', puis le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
4.
   a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   b. Donner la valeur arrondie au centième de α et montrer que α vérifie :
   $$\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$



LA FICHE MAGIQUE QUI VA AVEC

« Fonctions dérivées »

Dérivées usuelles, opérations et lien avec les variations sur une seule fiche.

Les fiches magiques terminale spé maths : campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

CAMPUS XYZ

Corrigés

Exercices sur l'étude de fonctions en terminale spé maths

Exercice 1 — Exploiter un tableau de variations ●○○

a. **Maximum** 22, atteint en -3 et en 3 ; **minimum** -10, atteint en -1 et en 5.

b. Sur chacun des trois intervalles de monotonie, f passe d'un signe à l'autre : 3 **solutions** (corollaire du TVI).

c. 0 et 2 sont dans $[-1\,;3]$, où f est croissante : $f(0) < f(2)$.

Exercice 2 — Une fonction rationnelle ●○○

a. En 1^+ : $x^2+3 \to 4$ et $x-1 \to 0^+$: $+\infty$. En $+\infty$: $f(x) = \dfrac{x\left(x+\frac{3}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} \to +\infty$.

b. $f'(x) = \dfrac{2x(x-1)-\left(x^2+3\right)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$. Sur $]1\,;+\infty[$, $x+1>0$: f **décroît sur** $]1\,;3]$ **et croît sur** $[3\,;+\infty[$, minimum $f(3)=6$.

Exercice 3 — Un polynôme de degré 3 ●○○

a. $f'(x) = -3x^2+6x+9 = -3\left(x^2-2x-3\right) = \mathbf{-3(x-3)(x+1)}$.

b. f' est négative à l'extérieur des racines -1 et 3. f **décroît sur** $[-3\,;-1]$, **croît sur** $[-1\,;3]$, **décroît sur** $[3\,;5]$, avec $f(-3)=22$, $f(-1)=-10$, $f(3)=22$, $f(5)=-10$. (C'est la fonction de l'exercice 1.)

Exercice 4 — Étude de ln(x)/√x ●●○

a. En 0 : $\ln x \to -\infty$ et $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \to +\infty$: $-\infty$. En $+\infty$: $f(x) = 2\times\dfrac{\ln X}{X}$ avec $X=\sqrt{x}\to+\infty$: 0 (croissances comparées).

b. $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\sqrt{x}-\ln x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$ (on multiplie haut et bas par $2\sqrt{x}$). f **croît sur** $\left]0\,;\mathrm{e}^2\right]$, **décroît sur** $\left[\mathrm{e}^2\,;+\infty\right[$, maximum $f\left(\mathrm{e}^2\right) = \dfrac{2}{\mathrm{e}} \approx 0{,}74$.

Exercice 5 — Tangente et position relative ●●○

a. $f(0)=1$ et $f'(x)=3x^2-3$, $f'(0)=-3$: $T : y=-3x+1$.

b. $f(x)-(-3x+1) = x^3$: **la courbe est sous** T **pour** $x<0$, **au-dessus pour** $x>0$; $(0\,;1)$ est un point d'inflexion.

Exercice 6 — La boîte de volume maximal ●●○

a. Le fond est un carré de côté $10-2x$ et la hauteur vaut x : $V(x)=x(10-2x)^2$.

b. $V'(x)=(10-2x)^2+x\times 2(10-2x)\times(-2)=(10-2x)\big(10-2x-4x\big)=(10-2x)(10-6x)$.

c. Sur $[0\,;5]$, $10-2x\geqslant 0$ et $10-6x\geqslant 0 \iff x\leqslant \dfrac{5}{3}$. **Volume maximal pour $x=\dfrac{5}{3}$ cm** :

$$V\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3}\times\left(\frac{20}{3}\right)^2=\frac{2\,000}{27}\approx 74{,}1 \text{ cm}^3.$$

Exercice 7 — Maximiser un bénéfice ●●○

a. $B'(x)=-2+\dfrac{10}{x}=\dfrac{10-2x}{x}$: B **croît sur** $[1\,;5]$, **décroît sur** $[5\,;10]$.

b. 500 **objets**, pour un bénéfice $B(5)=10\ln 5-5\approx 11{,}094$ milliers d'euros, soit $11\,094$ **€**.

Exercice 8 — Le point le plus proche ●●○

a. $AM^2=(x-2)^2+\left(\sqrt{x}-0\right)^2=x^2-4x+4+x=x^2-3x+4$.

b. AM est minimale quand AM^2 l'est. Le trinôme est minimal en $x=\dfrac{3}{2}$: $AM^2=\dfrac{9}{4}-\dfrac{9}{2}+4=\dfrac{7}{4}$.

$M\left(\dfrac{3}{2}\,;\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$ **et** $AM=\dfrac{\sqrt{7}}{2}\approx 1{,}32$.

Exercice 9 — Étude de (ln x)² − 2 ln x ●●○

a. $f(x)=\ln x\,(\ln x-2)=0 \iff \ln x=0$ ou $\ln x=2$: $x=1$ **ou** $x=\mathrm{e}^2$.

b. Avec $X=\ln x$: $X^2-2X=X(X-2)$. En 0, $X\to-\infty$: $+\infty$. En $+\infty$, $X\to+\infty$: $+\infty$.

c. $f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2(\ln x-1)}{x}$: f **décroît sur** $]0\,;\mathrm{e}]$, **croît sur** $[\mathrm{e}\,;+\infty[$, minimum $f(\mathrm{e})=-1$.

Exercice 10 — Une fonction auxiliaire pour un domaine ●●●

a. $g'(x)=\mathrm{e}^x-1$, négative pour $x\leqslant 0$, positive après : minimum $g(0)=0$. $g(x)\geqslant 0$.

b. $\mathrm{e}^x-x\geqslant 1>0$: **le dénominateur ne s'annule pas**.

c. En $+\infty$: $f(x)=\dfrac{\frac{x}{\mathrm{e}^x}}{1-\frac{x}{\mathrm{e}^x}}\to\dfrac{0}{1}=\mathbf{0}$. En $-\infty$: $f(x)=\dfrac{x}{x\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}-1\right)}=\dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x}-1}\to -1$.

d. $f'(x)=\dfrac{(\mathrm{e}^x-x)-x\,(\mathrm{e}^x-1)}{(\mathrm{e}^x-x)^2}=\dfrac{\mathrm{e}^x-x\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-x)^2}=\dfrac{(1-x)\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-x)^2}$. Maximum en 1 : $f(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}\approx 0{,}58$.

Exercice 11 — Comparer ln x et $\sqrt{x}$ ●●●

a. $d'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{x}-2}{2x}$ (en mettant au dénominateur $2x$ et en utilisant $\dfrac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$).

b. $d'(x) \geqslant 0 \iff \sqrt{x} \geqslant 2 \iff x \geqslant 4$: minimum $d(4) = 2 - \ln 4 \approx 0{,}61 > 0$. **Donc $d(x) > 0$, soit** $\ln x < \sqrt{x}$.

Exercice 12 — Retrouver une fonction et l'étudier ●●●

a. $f'(x) = a\,\mathrm{e}^x + (ax+b)\,\mathrm{e}^x = (ax+a+b)\,\mathrm{e}^x$. $f(0) = b = 1$ et $f'(0) = a + b = 0$: $a = -1, b = 1$, $f(x) = (1-x)\,\mathrm{e}^x$.

b. $f'(x) = -x\,\mathrm{e}^x$: f **croît sur** $]-\infty\,;0]$**, décroît sur** $[0\,;+\infty[$, maximum $f(0) = 1$. En $-\infty$: $\mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^x \to 0$ (croissances comparées) ; en $+\infty$: $-\infty$. $f(x) = 0 \iff x = 1$.

Exercice 13 — TYPE CONTRÔLE — Une étude complète avec ln ●●●

1. En -1 : avec $X = x + 1 \to 0^+$, $X \ln X \to 0$, donc $f(x) \to 1$. En $+\infty$:

$f(x) = x\left(\dfrac{x+1}{x}\ln(x+1) - 1\right)$ et la parenthèse tend vers $+\infty$: $+\infty$.

2. $f'(x) = \ln(x+1) + (x+1) \times \dfrac{1}{x+1} - 1 = \ln(x+1)$, négatif sur $]-1\,;0]$, positif après. f **décroît sur** $]-1\,;0]$**, croît sur** $[0\,;+\infty[$, minimum $f(0) = 0$.

3. $f(x) \geqslant 0$, soit $(x+1)\ln(x+1) \geqslant x$.

4. $f''(x) = \dfrac{1}{x+1} > 0$: f **est convexe**. $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$: **tangente** $y = 0$, et la courbe est au-dessus.

5. Sur $[0\,;+\infty[$, f est continue, strictement croissante, de 0 à $+\infty$: **une unique solution** α.
$f(1) = 2\ln 2 - 1 \approx 0{,}39 < 1$ et $f(2) = 3\ln 3 - 2 \approx 1{,}30 > 1$: $1 < \alpha < 2$.

Exercice 14 — TYPE CONTRÔLE — Encadrer ln(1 + x) ●●●

1. $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x} \leqslant 0$: g décroît, $g(0) = 0$, donc $g(x) \leqslant 0$, soit $\ln(1+x) \leqslant x$.

2. $h'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x = \dfrac{1-(1+x)+x(1+x)}{1+x} = \dfrac{x^2}{1+x} \geqslant 0$: h croît, $h(0) = 0$, donc $h(x) \geqslant 0$.

3. Avec $x = 0{,}1$: $0{,}095 \leqslant \ln(1{,}1) \leqslant 0{,}1$.

4. $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} \leqslant \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}$, donc $1 - \dfrac{1}{2n} \leqslant n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \leqslant 1$. Par les gendarmes, **la limite vaut** 1.

5. $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ et exp est continue : **la limite vaut** e.



La méthode pas à pas est dans la fiche magique **« Fonctions dérivées »** (Les fiches magiques terminale spé maths, page 32).

Exercice 15 BAC 2023 **Une étude avec x ln x** ●●○

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par: $f(x) = 3x + 1 - 2x\ln(x)$.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. On cherche les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

- **2.**On sait que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} (3x+1-2x\ln(x)) = 1$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = 1$.
- **3.**$f(x) = x(3-2\ln(x))+1$.

  $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (3-2\ln(x)) = -\infty$.

  On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} x(3-2\ln(x)) = -\infty$ et donc que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

4.

a. Sur $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = 3+0-2\times\ln(x)-2x\times\dfrac{1}{x} = 3-2\ln(x)-2 = 1-2\ln(x)$.

b. On étudier le signe de f' sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

$$f'(x) > 0 \iff 1-2\ln(x) > 0 \iff \frac{1}{2} > \ln(x) \iff x < \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$$

$$f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = 3\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+1-2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\times\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = 3\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+1-2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{2} = 3\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+1-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+1 \approx 4{,}3.$$

On en déduit le tableau des variations de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

x	0		$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
Signe de f'	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f	‖ 1	↗	$2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+1$	↘	$-\infty$

5.

a. Le maximum de la fonction f vaut $2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+1 > 0$; on complète le tableau des variations de f.

x	0		$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$		α		$+\infty$
Variations de f	‖ 1	↗	$2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+1$	↘	0	↘	$-\infty$

La fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ donc continue sur cet intervalle.

- **b.**Sur l'intervalle $\left]-\infty\ ,\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[$, la fonction f est strictement positive donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.

- **c.** Sur l'intervalle $\left]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\ ;\ +\infty\right[$, la fonction f est continue et strictement décroissante; elle passe d'une valeur positive à une valeur négative donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique sur cet intervalle. On l'appelle α.

On en déduit que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur $]0\ ;\ +\infty[$, et que cette solution appartient à l'intervalle $\left]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\ ;\ +\infty\right[$.

d. Le signe de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$ est donné par le tableau:

x	0		$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$		α		$+\infty$
Variations de f	$\|\|$	1	↗	$2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+1$	↘	0	↘ $-\infty$
Signe de f	$\|\|$		$+$		0	$-$	

$f(x)>0$ sur $]0\ ;\ \alpha[$, $f(\alpha)=0$ et $f(x)<0$ sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$.

Donc $f(x)>0$ sur $]0\ ;\ \alpha[$, $f(\alpha)=0$ et $f(x)<0$ sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$.

6. On considère une primitive quelconque de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. On la note F.

La fonction F a pour dérivée la fonction f qui est positive sur $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\ ;\ \alpha\right[$; donc F est croissante sur cet intervalle, ce qui contredit l'affirmation proposée.

7.

a. Pour étudier la convexité de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$, on calcule la dérivée seconde f'':

$f''(x)=0-2\times\dfrac{1}{x}=-\dfrac{2}{x}<0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$; on en déduit que la fonction f est concave sur $]0\ ;\ +\infty[$ et que sur cet intervalle, la courbe $\mathcal{C}_f$ est située au dessous des ses tangentes.

b. Soit T la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

T a pour équation $y=f'(1)\,(x-1)+f(1)$.

- $f(x)=3x+1-2x\ln(x)$ donc $f(1)=3\times1+1-2\times1\times\ln(1)=4$
- $f'(x)=1-2\ln(x)$ donc $f'(1)=1-2\times\ln(1)=1$

Donc T a pour équation $y=1\,(x-1)+4$ soit $y=x+3$.

c. La courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de ses tangentes donc de la tangente T et donc, pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, on a $f(x)\leqslant x+3$.

$$f(x)\leqslant x+3 \iff 3x+1-2x\ln(x)\leqslant x+3 \iff 2x-2\leqslant 2x\ln(x) \iff \frac{2x}{2x}-\frac{2}{2x}\leqslant\ln(x)$$
$$\iff 1-\frac{1}{x}\leqslant\ln(x)$$

Donc, pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, on a: $\ln(x)\geqslant 1-\dfrac{1}{x}$.

Le sujet complet du bac 2023 (La Réunion, jour 1) corrigé →

Exercice 16 BAC 2024 Étude de x ln(x²) – 1/x ●●●

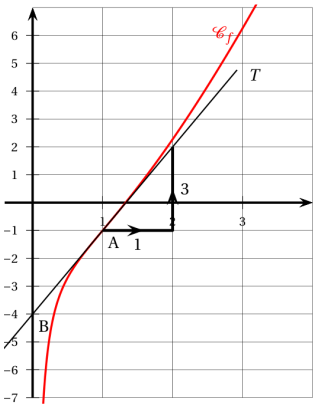
Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{x}.$$

Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f, ainsi que la droite (T), tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point A de coordonnées $(1\ ;\ -1)$.

Cette tangente passe également par le point B$(0\ ;\ -4)$.



1. Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 est le nombre dérivé $f'(1)$; on lit sur le graphique

$$f'(1) = \frac{3}{1} = 3.$$

L'ordonnée à l'origine est égale à -4, donc l'équation réduite de la tangente (T) est

$$M(x\ ;\ y) \in (T) \iff y = 3x - 4.$$

2. - il semble que f est concave sur]0 ; 1[;
   - il semble que f est convexe sur $]1\ ;\ +\infty[$.

Le point A semble être un point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Partie B : étude analytique

1.

- On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(x^2\right)=+\infty$; donc par produit de limites $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.
- Avec $f(x)=2x\ln x-\dfrac{1}{x}$, on sait que $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$ et $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty$ (l'axe des ordonnées est asymptote verticale de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de zéro.

2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

a. Les fonctions $x\longmapsto x$, $x\longmapsto\ln\left(x^2\right)$ et $x\longmapsto-\dfrac{1}{x}$ sont dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ et l'on a :

$$f'(x)=\ln\left(x^2\right)+x\times\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}=\ln\left(x^2\right)+2+\frac{1}{x^2}\text{ ou }f'(x)=2\ln x+2+\frac{1}{x^2}\text{ sur }]0\ ;\ +\infty[.$$

b. En dérivant $f'(x)$ on obtient :

$$f''(x)=\frac{2}{x}-\frac{2x}{x^4}=\frac{2}{x}-\frac{2}{x^3}=\frac{2x^2-2}{x^3}=\frac{2\left(x^2-1\right)}{x^3}=\frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}.$$

3.

a. Comme $x^3>0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$, le signe de $f''(x)$ est celui de $(x+1)(x-1)$ et comme $x+1>1>0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $x-1$.

Conclusion :

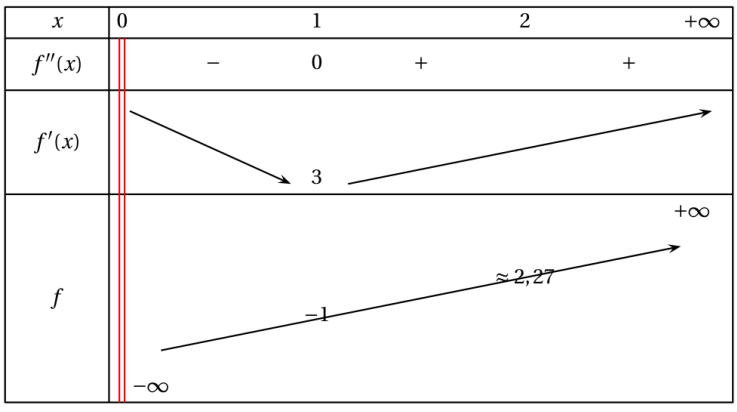
- Sur $]0\ ;\ 1[$, $x<1$, $f''(x)<0$: la fonction est concave ;
- Sur $]1\ ;\ +\infty[$, $x>1$, $f''(x)>0$: la fonction est convexe ;
- pour $x=1$, la dérivée seconde s'annule en changeant de signe : le point A est le point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$.

b. Du signe de $f''(x)$ on en déduit les variations de f' qui est décroissante sur]0 ; 1[puis croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$, donc $f'(1)=2+1=3$ (vu à la question **1.**).

Comme 3 est le minimum de f', on en déduit que $f'(x)>0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ et par conséquent la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4.

a. Tableau de variations de f :



Sur l'intervalle]1 ; 2[la fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante avec $f(1) < 0$ et $f(2) > 0$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un nombre unique $\alpha \in]1\ ;\ 2[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

b. La calculatrice donne $f(1{,}3) \approx -0{,}09$ et $f(1{,}4) \approx 0{,}23$ donc $1{,}3 < \alpha < 1{,}4$, puis $f(1{,}32) \approx -0{,}02$ et $f(1{,}33) \approx 0{,}007$, d'où $1{,}32 < \alpha < 1{,}33$ et enfin

$f(1{,}327) \approx -0{,}003$ et $f(1{,}328) \approx 0{,}0004$, donc $\alpha \approx 1{,}33$ au centième près.

On sait que α est solution de $f(x) = 0 \iff x\ln\left(x^2\right) - \dfrac{1}{x} = 0 \iff$

$x\ln\left(x^2\right) = \dfrac{1}{x} \iff \ln\left(x^2\right) = \dfrac{1}{x^2}$ et enfin par croissance de la fonction exponentielle :

$\exp\left(\ln\left(x^2\right)\right) = \exp\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \iff x^2 = \exp\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

α vérifie cette équation donc $\alpha^2 = \exp\left(\dfrac{1}{\alpha^2}\right)$.

Le sujet complet du bac 2024 (Amérique du Nord, jour 1) corrigé →



La méthode pas à pas est dans la fiche magique **« Fonctions dérivées »** (Les fiches magiques terminale spé maths, page 32).

LES FICHES MAGIQUES TERMINALE SPÉ MATHS

Révise toute la terminale spé maths avec les fiches magiques



- **41 fiches claires et illustrées** : tout le programme de spécialité maths de terminale, une notion par page.
- **Des vidéos méthode** accessibles par QR code sur les fiches.
- **Des exercices corrigés** après chaque fiche pour vérifier que tout est acquis.

campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

ANNALES BAC MATHS TERMINALE 2027

Prépare le bac avec les vrais sujets



- **75 sujets types** tirés des vrais sujets du bac, classés par chapitre.
- **3 bacs blancs complets** pour s'entraîner en conditions réelles.
- Des **corrigés avec la rédaction attendue**, des conseils et un aide-mémoire.

campusxyz.fr/produit/annales-bac-2027-terminale-spe-maths