Exercice 1 Simplifier des écritures ●○○

Écris chaque expression sous la forme e^{ax+b}, pour tout réel x.

a. $\mathrm{e}^{2x} \times \mathrm{e}^{-x}$

b. $\dfrac{(\mathrm{e}^{x})^{3}}{\mathrm{e}^{x+1}}$

c. $\sqrt{\mathrm{e}^{4x}} \times \mathrm{e}^{3}$

Exercice 2 Équations avec l'exponentielle ●○○

Résous dans $\mathbb{R}$:

a. $\mathrm{e}^{2x-1} = \mathrm{e}^{x+3}$

b. $\mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^{4x-3}$

c. $\mathrm{e}^{x} = -2$

d. $\mathrm{e}^{3x} = 7$

Exercice 3 Inéquations avec l'exponentielle ●○○

Résous dans $\mathbb{R}$:

a. $e^{x-2} > 1$ **b.** $e^{-x} \leqslant e$ **c.** $e^{2x} - 5 < 0$

Exercice 4 Limites avec l'exponentielle ●○○

Détermine chaque limite.

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{-3x} + 1\right)$ **b.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2 - e^{x}\right)$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - e^{x}\right)$ **d.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$

Exercice 5 — Dériver avec l'exponentielle ●●○

Calcule la dérivée de chaque fonction, puis factorise-la.

a. $f(x) = (2x - 1)\,\mathrm{e}^{x}$ sur $\mathbb{R}$

b. $g(x) = \mathrm{e}^{x^2 - 3x}$ sur $\mathbb{R}$

c. $h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x + 1}$ sur $]-1\,;+\infty[$

d. $k(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 6 — Variations de $x^2\,e^{-x}$ ●●○

Soit $k(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ (voir l'exercice 5).

a. Détermine les limites de k en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Dresse le tableau de variations de k.

Exercice 7 — Une équation du second degré déguisée ●●○

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 6 = 0$, puis l'inéquation $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 6 > 0$.

Exercice 8 — Décroissance radioactive ●●○

Le nombre de noyaux radioactifs d'un échantillon est $N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$, où t est en années.

a. Justifie que N est décroissante.

b. La demi-vie est la durée au bout de laquelle la moitié des noyaux a disparu. Calcule-la.

c. Au bout de combien d'années restera-t-il moins de $10\,\%$ des noyaux ?

Exercice 9 — Une fonction toujours positive ●●○

Soit $f(x) = x - 1 + \mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

a. Détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Étudie les variations de f, puis déduis-en le signe de $f(x)$.

Exercice 10 — La tangente qui passe par l'origine ●●○

Soit a un réel. On note T_a la tangente à la courbe de $\exp$ au point d'abscisse a.

a. Donne une équation de T_a.

b. Pour quelle valeur de a la tangente T_a passe-t-elle par l'origine du repère ? Donne alors son équation.

Exercice 11 — Combien de solutions pour $e^x = kx$? ●●●

Soit $k > 0$ et $f_k(x) = \mathrm{e}^x - kx$ sur $\mathbb{R}$.

a. Détermine les limites de f_k en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Montre que f_k admet un minimum égal à $k(1 - \ln k)$.

c. Déduis-en, selon k, le nombre de solutions de l'équation $\mathrm{e}^x = kx$.

Exercice 12 — Démontrer une croissance comparée ●●●

a. Soit $g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$ sur $[0\,;+\infty[$. En utilisant $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$, montre que g est croissante.

b. Déduis-en que $\mathrm{e}^x \geqslant \dfrac{x^2}{2}$ pour tout $x \geqslant 0$.

c. Démontre que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

Exercice 13 TYPE CONTRÔLE **Étude d'une fonction en e^{2x}** ●●●

Soit $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 3\,\mathrm{e}^{x} + 2$ sur $\mathbb{R}$, de courbe $\mathscr{C}$.

1. Détermine la limite de f en $-\infty$ et interprète-la. Détermine la limite en $+\infty$.
2. Résous $f(x) = 0$, puis étudie le signe de $f(x)$.
3. Calcule $f'(x)$ et dresse le tableau de variations de f.
4. Étudie la convexité de f.

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE La concentration d'un médicament ●●●

La concentration d'un médicament dans le sang, en mg/L, est $C(t) = 5t\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$, où $t \geqslant 0$ est en heures.

1. Détermine la limite de C en $+\infty$ et interprète.
2. Montre que $C'(t) = 5(1 - 0{,}5t)\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ et dresse le tableau de variations de C.
3. Le médicament est efficace quand $C(t) \geqslant 2$. Montre que l'équation $C(t) = 2$ a deux solutions $t_1 < t_2$ et encadre-les au centième. Pendant combien de temps le médicament est-il efficace ?
4. On admet que $C''(t) = 5(0{,}25t - 1)\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$. À quel instant la concentration diminue-t-elle le plus vite ?

Exercice 15 BAC 2024 Une fonction $(x^2 - 4)e^{-x}$ ●●○

Bac spé maths 2024, Amérique du Sud, jour 2, exercice 3

Partie 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x^2 - 4\right) \mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Justifier que pour tout réel x, $f'(x) = \left(-x^2 + 2x + 4\right) \mathrm{e}^{-x}$.
3. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie 2

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_{-2}^{0} x^n \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x$.

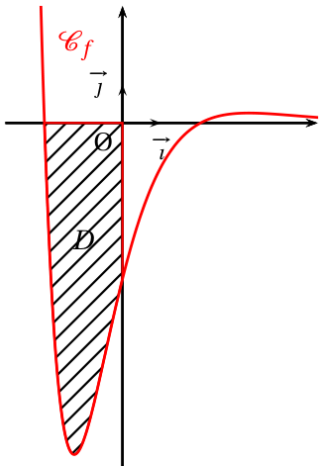
1. Justifier que $I_0 = \mathrm{e}^2 - 1$.
2. En utilisant une intégration par partie, démontrer l'égalité :
$$I_{n+1} = (-2)^{n+1}\mathrm{e}^2 + (n+1)I_n.$$
3. En déduire les valeurs exactes de I_1 et de I_2.

Partie 3

1. Déterminer le signe sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie dans la partie 1.
2. On a représenté ci-contre la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

   Le domaine D du plan hachuré ci-contre est délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

   Calculer la valeur exacte, en unité d'aire, de l'aire S du domaine D.



Exercice 16 BAC 2025 Une fonction avec x e⁻ˣ ●●●

Bac spé maths 2025, Amérique du Nord (secours), jour 2, exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2x - 1.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On appelle $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée seconde de f, c'est-à-dire la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A: Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$.
3. Montrer que pour tout réel x :
$$f''(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$$
4. Étudier la convexité de la fonction f.
5. Étudier les variations de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations en y faisant apparaître la valeur exacte de l'extremum.

   Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
6. En déduire le signe de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, puis justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
7. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.

   Donner un encadrement de α, au centième près.
8. On considère la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$.

   Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite Δ.

Partie B : Calcul d'aire

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine D_n délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$. On note

$$I_n = \int_1^n x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_n en fonction de n.
2.
   a. Justifier que l'aire du domaine D_n est I_n.

   b. Calculer la limite de l'aire du domaine D_n quand n tend vers $+\infty$.



LA FICHE MAGIQUE QUI VA AVEC

« Limites de fonctions »

Limites de l'exponentielle et croissances comparées réunies sur une seule fiche.

Les fiches magiques terminale spé maths : campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

CAMPUS XYZ

Corrigés

Exercices sur la fonction exponentielle en terminale spé maths

Exercice 1 — Simplifier des écritures ●○○

$\mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{a+b}$, $\dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} = \mathrm{e}^{a-b}$, $(\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{na}$.

a. e^x

b. $\dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{x+1}} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{2x-1}}$

c. $\sqrt{\mathrm{e}^{4x}} = \mathrm{e}^{2x}$, donc e^{2x+3}.

Exercice 2 — Équations avec l'exponentielle ●○○

$\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \iff a = b$, et $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout x.

a. $2x - 1 = x + 3 \iff x = 4$.

b. $x^2 - 4x + 3 = 0$, de racines 1 **et** 3.

c. **Aucune solution** : une exponentielle est toujours strictement positive.

d. $3x = \ln 7 \iff x = \dfrac{\ln 7}{3}$.

Exercice 3 — Inéquations avec l'exponentielle ●○○

$\exp$ est strictement croissante : $\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b \iff a < b$.

a. $\mathrm{e}^{x-2} > \mathrm{e}^0 \iff x > 2 : S =]2\,;+\infty[$.

b. $-x \leqslant 1 \iff x \geqslant -1 : S = [-1\,;+\infty[$.

c. $\mathrm{e}^{2x} < 5 \iff 2x < \ln 5 : S = \left]-\infty\,;\dfrac{\ln 5}{2}\right[$.

Exercice 4 — Limites avec l'exponentielle ●○○

a. $-3x \to -\infty$ donc $\mathrm{e}^{-3x} \to 0 : 1$.

b. $\mathrm{e}^x \to 0 : 2$.

c. $x - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^x} - 1\right)$ et $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x} \to 0 : -\infty$.

d. Taux d'accroissement de $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ en 0 : la limite vaut $g'(0) = 2\,\mathrm{e}^0 = \boldsymbol{2}$.

Exercice 5 — Dériver avec l'exponentielle ●●○

a. $f'(x) = 2\,\mathrm{e}^x + (2x-1)\,\mathrm{e}^x = \boldsymbol{(2x+1)\,\mathrm{e}^x}$.

b. $g'(x) = (2x-3)\,\mathrm{e}^{x^2-3x}$.

c. $h'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(x+1) - \mathrm{e}^x}{(x+1)^2} = \dfrac{\boldsymbol{x\,\mathrm{e}^x}}{\boldsymbol{(x+1)^2}}$.

d. $k'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x} - x^2\,\mathrm{e}^{-x} = \boldsymbol{x(2-x)\,\mathrm{e}^{-x}}$.

> On factorise par l'exponentielle, toujours strictement positive : le signe de la dérivée est celui du facteur restant.

Exercice 6 — Variations de $x^2\,\mathrm{e}^{-x}$ ●●○

a. En $-\infty$: $x^2 \to +\infty$ et $\mathrm{e}^{-x} \to +\infty$: $+\infty$. En $+\infty$: $k(x) = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} \to 0$ (croissances comparées) : 0.

b. $k'(x) = x(2-x)\,\mathrm{e}^{-x}$: négative sur $]-\infty\,;0]$, positive sur $[0\,;2]$, négative sur $[2\,;+\infty[$. k **décroît jusqu'à** $k(0) = 0$**, croît jusqu'à** $k(2) = 4\,\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}54$**, puis décroît vers** 0.

Exercice 7 — Une équation du second degré déguisée ●●○

On pose $X = \mathrm{e}^x > 0$: $X^2 + X - 6 = 0$, $\Delta = 25$, racines $X = 2$ et $X = -3$.

- $X = -3$ est impossible (une exponentielle est positive) ; $\mathrm{e}^x = 2 \iff x = \ln 2$. $S = \{\ln 2\}$.
- $X^2 + X - 6 = (X-2)(X+3)$ et $X + 3 > 0$: l'inéquation équivaut à $X > 2$, soit $x > \ln 2$.

Exercice 8 — Décroissance radioactive ●●○

a. $N'(t) = -0{,}1\, N_0\, \mathrm{e}^{-0{,}1t} < 0$: N **est décroissante**.

b. $\mathrm{e}^{-0{,}1t} = \dfrac{1}{2} \iff -0{,}1t = -\ln 2 \iff t = 10 \ln 2$: **environ 6,9 ans**.

c. $\mathrm{e}^{-0{,}1t} < 0{,}1 \iff -0{,}1t < \ln 0{,}1 \iff t > 10 \ln 10 \approx 23{,}03$: **au bout de 24 ans**.

Exercice 9 — Une fonction toujours positive ●●○

a. En $+\infty$: $x - 1 \to +\infty$ et $\mathrm{e}^{-x} \to 0$: $+\infty$. En $-\infty$: $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(1 + (x-1)\,\mathrm{e}^x\right)$; $(x-1)\,\mathrm{e}^x \to 0$ (croissances comparées) et $\mathrm{e}^{-x} \to +\infty$: $+\infty$.

b. $f'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1 \iff x \geqslant 0$. f **décroît sur** $]-\infty\,;0]$, **croît sur** $[0\,;+\infty[$, minimum $f(0) = 0$. Donc $f(x) \geqslant 0$ **pour tout** x, soit $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$.

Exercice 10 — La tangente qui passe par l'origine ●●○

a. $T_a : y = \mathrm{e}^a(x - a) + \mathrm{e}^a$.

b. Avec $x = 0, y = 0$: $\mathrm{e}^a(1 - a) = 0 \iff a = 1$ (car $\mathrm{e}^a \neq 0$). $a = 1$ **et** $T_1 : y = \mathrm{e}\,x$.

Exercice 11 — Combien de solutions pour $\mathrm{e}^x = kx$? ●●●

a. En $-\infty$: $\mathrm{e}^x \to 0$ et $-kx \to +\infty$: $+\infty$. En $+\infty$: $f_k(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - k\right) \to +\infty$: $+\infty$.

b. $f_k'(x) = \mathrm{e}^x - k \geqslant 0 \iff x \geqslant \ln k$: minimum en $\ln k$, égal à $f_k(\ln k) = k - k\ln k = k(1 - \ln k)$.

c. Le minimum est positif si $k < \mathrm{e}$, nul si $k = \mathrm{e}$, négatif si $k > \mathrm{e}$. Avec le corollaire du TVI sur chaque intervalle : **aucune solution si** $0 < k < \mathrm{e}$**, une solution si** $k = \mathrm{e}$**, deux solutions si** $k > \mathrm{e}$.

Exercice 12 — Démontrer une croissance comparée ●●●

a. $g'(x) = \mathrm{e}^x - x \geqslant x + 1 - x = 1 > 0$: g **est croissante**.

b. $g(0) = 1$, donc $g(x) \geqslant 1 > 0$ pour $x \geqslant 0$: $\mathrm{e}^x \geqslant \dfrac{x^2}{2}$.

c. Pour $x > 0$: $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \geqslant \dfrac{x}{2}$, et $\dfrac{x}{2} \to +\infty$. Par comparaison, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \to +\infty$.

Exercice 13 — TYPE CONTRÔLE — Étude d'une fonction en e^{2x} ●●●

1. En $-\infty$: $\mathrm{e}^{2x} \to 0$ et $\mathrm{e}^x \to 0$: 2, **la droite** $y = 2$ **est asymptote**. En $+\infty$: $f(x) = \mathrm{e}^{2x}\left(1 - 3\,\mathrm{e}^{-x} + 2\,\mathrm{e}^{-2x}\right) \to +\infty$.

2. Avec $X = \mathrm{e}^x$: $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$, donc $f(x) = (\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x - 2)$. **Solutions** 0 **et** $\ln 2$. Tableau de signes : $f > 0$ **sur** $]-\infty\,;0[$ **et sur** $]\ln 2\,;+\infty[$, $f < 0$ **sur** $]0\,;\ln 2[$.

3. $f'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x} - 3\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(2\,\mathrm{e}^x - 3)$, positive pour $x \geqslant \ln\dfrac{3}{2}$. f **décroît sur** $\left]-\infty\,;\ln\dfrac{3}{2}\right]$ **puis croît**, de minimum

   $f\left(\ln\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{9}{4} - \dfrac{9}{2} + 2 = -\dfrac{1}{4}$.

4. $f''(x) = 4\,\mathrm{e}^{2x} - 3\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(4\,\mathrm{e}^x - 3)$: **concave sur** $\left]-\infty\,;\ln\dfrac{3}{4}\right]$**, convexe sur** $\left[\ln\dfrac{3}{4}\,;+\infty\right[$.

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE **La concentration d'un médicament** ●●●

1. $C(t) = 10 \times \dfrac{0{,}5t}{\mathrm{e}^{0{,}5t}}$ et $\dfrac{X}{\mathrm{e}^{X}} \to 0$ quand $X \to +\infty$: $C(t) \to 0$, le médicament est éliminé.
2. $C'(t) = 5\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 5t \times (-0{,}5)\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} = 5(1 - 0{,}5t)\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$, positive pour $t \leqslant 2$. C **croît sur** $[0\,;2]$**, décroît sur** $[2\,;+\infty[$, maximum $C(2) = 10\,\mathrm{e}^{-1} \approx 3{,}68$ mg/L.
3. Sur $[0\,;2]$, C est continue, strictement croissante, de 0 à $3{,}68$: une solution t_1. Sur $[2\,;+\infty[$, de $3{,}68$ vers 0 : une solution t_2. $0{,}51 < t_1 < 0{,}52$ **et** $5{,}08 < t_2 < 5{,}09$: efficace pendant **environ** $4{,}57$ **h**, soit 4 h 34 min.
4. C'' a le signe de $0{,}25t - 1$: C' décroît sur $[0\,;4]$ puis croît. C' **est minimale (la baisse est la plus rapide) à** $t = 4$ **h**, point d'inflexion de la courbe.



La méthode pas à pas est dans la fiche magique **« Limites de fonctions »** (Les fiches magiques terminale spé maths, page 24).

Exercice 15 — BAC 2024 — Une fonction $(x^2 - 4)e^{-x}$ ●●○

Partie 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x^2 - 4\right) \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Limites :
   - : en $-\infty$: de $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 - 4 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ on en déduit par produit de limites que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$;
   - : en $+\infty$ $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x} - 4\mathrm{e}^{-x}$: on sait que

   $\lim\limits_{x \to +\infty} 4\mathrm{e}^{-x} = 0$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0$ (puissances comparées), donc :

   $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
2. f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Sur cet intervalle :

   $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} + \left(x^2 - 4\right) \times (-1)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(2x - x^2 + 4) = \left(-x^2 + 2x + 4\right) \mathrm{e}^{-x}$.
3. On sait que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $-x^2 + 2x + 4$.

   On a $-x^2 + 2x + 4 = -\left(x^2 - 2x - 4\right) = -\left[(x-1)^2 - 1 - 4\right] = -\left[(x-1)^2 - 5\right] =$

   $-x^2 + 2x + 4 = -\left(x - 1 + \sqrt{5}\right)\left(x - 1 - \sqrt{5}\right)$: ce trinôme a deux racines $1 - \sqrt{5}$ et $1 + \sqrt{5}$.

   On sait que le trinôme a le signe de $a = -1$, donc est négatif sauf sur l'intervalle

   $\left[1 - \sqrt{5}\,;\, 1 + \sqrt{5}\right]$ où il est positif.

   On a donc le tableau de variations :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$		0		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	$\approx -8{,}5$	↗	-4	↗	$\approx 0{,}25$	↘	0

a $f\left(1-\sqrt{5}\right) = \left(2-2\sqrt{5}\right)\mathrm{e}^{\sqrt{5}-1} \approx -8{,}5$;

$1+\sqrt{5}\right) = \left(2+2\sqrt{5}\right)\mathrm{e}^{\sqrt{5}-+1} \approx 0{,}25$;

   On a $f\left(1 - \sqrt{5}\right) = \left(2 - 2\sqrt{5}\right)\mathrm{e}^{\sqrt{5}-1} \approx -8{,}5$;

   $f\left(1 + \sqrt{5}\right) = \left(2 + 2\sqrt{5}\right)\mathrm{e}^{\sqrt{5}-+1} \approx 0{,}25$;

   $f(0) = -4$

Partie 2

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_{-2}^{0} x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1. $I_0 = \displaystyle\int_{-2}^{0} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_{-2}^{0} = -\mathrm{e}^{0} - \mathrm{e}^{2} = \mathrm{e}^{2} - 1.$

2. On calcule I_n en faisant une intégration par partie : on a

$$\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^{-x} & u'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \\ v'(x) = x^n & v(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$$ on a

$$I_n = \left[\mathrm{e}^{-x} \times \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} -\mathrm{e}^{-x}\frac{x^{n+1}}{n+1} = 0 - \frac{(-2)^{n+1}\mathrm{e}^2}{n+1} + \frac{1}{n+1}\int_{-2}^{0} \mathrm{e}^{-x}x^{n+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$-\frac{(-2)^{n+1}\mathrm{e}^2}{n+1} + \frac{I_{n+1}}{n+1},$$

donc $I_n = -\dfrac{(-2)^{n+1}\mathrm{e}^2}{n+1} + \dfrac{I_{n+1}}{n+1}$ et en multipliant chaque membre par $n+1$,

$(n+1)I_n = -(-2)^{n+1}\mathrm{e}^2 + I_{n+1} \iff I_{n+1} = (-2)^{n+1}\mathrm{e}^2 + (n+1)I_n.$

Rem. On peut aussi intégrer par partie I_{n+1}.

3. L'égalité précédente donne avec :

- $n = 0$: $I_1 = (-2)^1\mathrm{e}^2 + I_0 = -2\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^2 - 1 = -\mathrm{e}^2 - 1$,
- $n = 1$: $I_2 = (-2)^2\mathrm{e}^2 + I_1 = 4\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}^2 - 2 = 2\mathrm{e}^2 - 2$.

Partie 3

1. f a le signe du trinôme $x^2 - 4$ car quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$.

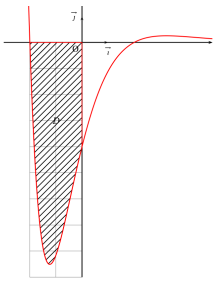
Comme $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ ce trinôme a le signe de $a = 1$ donc est positif, sauf sur l'intervalle borné par les deux racines soit sur l'intervalle $]-2\,;\,2[$ où $f'x) < 0$.

Donc sur l'intervalle $]-2\,;\,2[$, $f(x) < 0$ et sur $]-\infty\,;\,-2[\cup]2\,;\,+\infty[$, $f(x) > 0$.

2. $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -2 t on vient de voir que sur l'intervalle $]-2\,,\,0[$, $f(x) < 0$, donc l'aire S du domaine D est égale à l'opposé de l'intégrale de la fonction d de $x = -2$ à $x = 0$.

$$\text{aire}(D) = -\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-2}^{0} \left(x^2 - 4\right)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\int_{-2}^{0} x^2\mathrm{e}^{-x} + 4\int_{-2}^{0} \mathrm{e}^{-x} = -I_2 + 4I_0 = 4\left(-\mathrm{e}^2 - 1\right) - \left(2\mathrm{e}^2 - 2\right) = 2\mathrm{e}^2 - 2 \approx 12$$

(ce que l'on peut conforter avec la figure).



Exercice 4

Le sujet complet du bac 2024 (Amérique du Sud, jour 2) corrigé →

Exercice 16 BAC 2025 **Une fonction avec x e^{-x}** ●●●

Partie A : Étude de la fonction f

1.

- **2.** Déterminons la limite quand x tend vers $-\infty$:

  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x\left(\mathrm{e}^{-x} + 2\right) - 1.$

  Avec $y = -x$, par composition, on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{y \to +\infty} \mathrm{e}^{y} = +\infty$.

  Donc, par limite de la somme : $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} + 2 = +\infty$.

  Par limite du produit, il vient : $\lim\limits_{x \to -\infty} x\left(\mathrm{e}^{x} + 2\right) = -\infty$.

  Enfin, par limite de la somme : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x\left(\mathrm{e}^{-x} + 2\right) - 1 = -\infty$.

- **3.** Déterminons la limite quand x tend vers $+\infty$:

  D'après la propriété des croissances comparées : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty$.

  Par limite de l'inverse : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$.

  Par ailleurs, 2 étant positif : $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 1 = +\infty$.

  Par limite de la somme on en déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{-x} + 2x - 1 = +\infty$.

4. On a admis que la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$. f est la somme d'une fonction affine et d'un produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, on a :

$f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + x \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) + 2 = (1 - x)\mathrm{e}^{-x} + 2.$

5. On a admis que f' est dérivable :

Pour tout réel x, on a :

$f''(x) = -1 \times \mathrm{e}^{-x} + (1 - x) \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) + 0 = \left(-1 - (1 - x)\right)\mathrm{e}^{-x} = (x - 2)\mathrm{e}^{-x}.$

On arrive bien à l'expression annoncée.

6. La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, donc $f''(x)$ est du signe de $(x - 2)$.

- **7.** Sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 2]$, $(x - 2) \leqslant 0$, donc f'' est à valeurs négatives et donc f est **concave** sur $]-\infty\ ;\ 2]$.
- **8.** Sur l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$, $(x - 2) \geqslant 0$, donc f'' est à valeurs positives et donc f est **convexe** sur $[2\ ;\ +\infty[$.

9.

- **10.** Sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 2]$, f est concave, donc f' est décroissante.
- **11.** Sur l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$, f est convexe, donc f' est croissante.

f' atteindra donc un minimum pour $x = 2$. On a :

$f'(2) = (1 - 2)\mathrm{e}^{-2} + 2 = 2 - \mathrm{e}^{-2}$

On peut donc établir le tableau de variations (sans limites, car non attendues ici) de f'.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f'		↘	$2 - \mathrm{e}^{-2}$	↗	

12. Comme on a $-2 < 0$, on en déduit, par croissance de la fonction exponentielle : $\mathrm{e}^{-2} \leqslant \mathrm{e}^{0}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-2} \leqslant \mathrm{e}^{0} &\implies \mathrm{e}^{-2} \leqslant 1 \\
&\implies -\mathrm{e}^{-2} \geqslant -1 \quad \text{car } -1 < 0 \\
&\implies 2 - \mathrm{e}^{-2} \geqslant 2 - 1 \\
&\implies 2 - \mathrm{e}^{-2} \geqslant 1
\end{aligned}$$

Le minimum de f' est donc un réel supérieur à 1, donc strictement positif.

On en déduit que f' est donc une fonction à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, en conséquence, f est effectivement une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

13. f est une fonction **continue** (car dérivable) et **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$. De plus 0 est une **valeur intermédiaire** entre $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

En vertu du corollaire au théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, on en déduit qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.

Par exploration à la calculatrice, on peut donner pour α l'encadrement au centième près suivant : $0{,}37 < \alpha < 0{,}38$.

14. Pour tout x réel, on a :

$f(x) - (2x - 1) = x\mathrm{e}^{-x}$.

Comme la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, on en déduit que cette différence entre l'ordonnée $f(x)$ d'un point sur C_f et celle $2x - 1$ du point partageant la même abscisse sur Δ est du signe de x.

Sur $\mathbb{R}^-$, la différence est donc négative, et on en déduit que la courbe C_f est **au-dessous** de la droite Δ.

Sur $\mathbb{R}^+$, au contraire, la différence est positive, et donc la courbe C_f est **au-dessus** de la droite Δ.

Partie B : Calcul d'aire

1. Pour tout x réel, on pose : $u'(x) = \mathrm{e}^{-x}$ et $v(x) = x$.

On a donc, pour tout x réel : $v'(x) = 1$ et, par exemple : $u(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_1^n x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^n v(x) \times u'(x) \,\mathrm{d}x \\
&= \Big[u(x) \times v(x)\Big]_1^n - \int_1^n v'(x) \times u(x) \,\mathrm{d}x \quad \text{c'est la formule d'intégration par parties} \\
&= \Big[-\mathrm{e}^{-x} \times x\Big]_1^n - \int_1^n 1 \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \mathrm{d}x \\
&= \left(-n\mathrm{e}^{-n}\right) - \left(-\mathrm{e}^{-1}\right) + \int_1^n \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité de l'intégrale.} \\
&= \mathrm{e}^{-1} - n\mathrm{e}^{-n} + \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_1^n \\
&= \mathrm{e}^{-1} - n\mathrm{e}^{-n} + \left(-\mathrm{e}^{-n} - \left(-\mathrm{e}^{-1}\right)\right) \\
&= 2\mathrm{e}^{-1} - (n+1)\mathrm{e}^{-n}
\end{aligned}$$

On arrive donc à l'expression : $I_n = 2\mathrm{e}^{-1} - (n+1)\mathrm{e}^{-n}$.

2.

a. Le domaine décrit est donc situé entre la courbe C_f et la droite Δ, pour les abscisses comprises entre 1 et n. Le nombre n étant choisi entier naturel non nul, l'ensemble des abscisses concernées est donc inclus dans $\mathbb{R}^+$, où la courbe C_f est au-dessus de la droite Δ, d'après la question **A. 8.**, c'est-à-dire que :

$\forall x \in [1\,;\,n], \quad 2x - 1 \leqslant f(x)$.

Pour obtenir l'aire de D_n, il faut donc intégrer la différence $f(x) - (2x - 1)$, entre 1 et n (car $1 \leqslant n$).

Comme, pour tout x réel, on a : $f(x) - (2x - 1) = x\mathrm{e}^{-x}$, l'aire de D_n (exprimée en unité d'aire) est donc bien égale à I_n.

b. On a, pour tout n entier naturel : $I_n = 2\mathrm{e}^{-1} - (n+1)\mathrm{e}^{-n} = 2\mathrm{e}^{-1} - n\mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^{-n}$.

Avec le même raisonnement que celui tenu à la question **A. 1.**, on a :

$\lim\limits_{n\to+\infty} n\mathrm{e}^{-n} = 0$.

On a également : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^n} = 0$.

On a donc, par limite de la somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 2\mathrm{e}^{-1}$.

On est donc dans la situation d'un domaine dont le périmètre tend vers $+\infty$, puisqu'il s'étend sur une amplitude en abscisse qui tend vers $+\infty$, mais dont la surface reste majorée.

Le sujet complet du bac 2025 (Amérique du Nord (secours), jour 2) corrigé →



La méthode pas à pas est dans la fiche magique **« Limites de fonctions »** (Les fiches magiques terminale spé maths, page 24).

LES FICHES MAGIQUES TERMINALE SPÉ MATHS

Révise toute la terminale spé maths avec les fiches magiques



- **41 fiches claires et illustrées** : tout le programme de spécialité maths de terminale, une notion par page.
- **Des vidéos méthode** accessibles par QR code sur les fiches.
- **Des exercices corrigés** après chaque fiche pour vérifier que tout est acquis.

campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

ANNALES BAC MATHS TERMINALE 2027

Prépare le bac avec les vrais sujets



- **75 sujets types** tirés des vrais sujets du bac, classés par chapitre.
- **3 bacs blancs complets** pour s'entraîner en conditions réelles.
- Des **corrigés avec la rédaction attendue**, des conseils et un aide-mémoire.

campusxyz.fr/produit/annales-bac-2027-terminale-spe-maths