Exercice 1 — Calculer des intégrales ●○○

Calcule chaque intégrale.

a. $\displaystyle\int_0^2 \left(3x^2 - 1\right) \mathrm{d}x$

b. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$

c. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$

d. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x$

Exercice 2 — Une aire sous une parabole ●○○

Dans un repère orthogonal d'unités 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée, on considère le domaine compris entre la courbe de $x \mapsto x^2$, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 3$.

Calcule son aire en unités d'aire, puis en cm^2.

Exercice 3 — Linéarité et relation de Chasles ●○○

On sait que $\int_0^2 f = 5$, $\int_2^5 f = -1$ et $\int_0^2 g = 3$. Calcule :

a. $\int_0^5 f$ **b.** $\int_0^2 (2f - 3g)$ **c.** $\int_2^0 f$

Exercice 4 — Valeur moyenne d'une fonction ●○○

Calcule la valeur moyenne de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

a. $f(x) = x^2$ sur $[0\,;3]$

b. $g(x) = \mathrm{e}^x$ sur $[0\,;\ln 2]$

Exercice 5 Reconnaître une forme composée ●●○

Calcule chaque intégrale.

a. $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$ **b.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ **c.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 6 Encadrer une intégrale ●●○

On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ (on ne sait pas calculer une primitive de e^{-x^2}).

a. Montre que, pour tout $x \in [0\,;1]$, $\mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1$.

b. Déduis-en un encadrement de I.

Exercice 7 L'aire entre deux courbes ●●○

Calcule l'aire du domaine compris entre les courbes d'équations $y = x$ et $y = x^2$, pour $x \in [0\,;1]$.

Exercice 8 Intégration par parties ●●○

À l'aide d'une intégration par parties, calcule $I = \displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Exercice 9 — Intégrer ln x ●●○

À l'aide d'intégrations par parties, calcule :

a. $J = \int_1^{\mathrm{e}} \ln x \, \mathrm{d}x$ (écris $\ln x = 1 \times \ln x$).

b. $K = \int_1^{\mathrm{e}} x \ln x \, \mathrm{d}x$.

Exercice 10 — Intégrale ou aire ? ●●○

a. Calcule $\int_0^{2\pi} \sin x \, \mathrm{d}x$.

b. Calcule l'aire du domaine compris entre la courbe de $\sin$ et l'axe des abscisses sur $[0\,;2\pi]$. Explique la différence.

Exercice 11 Une suite d'intégrales ●●●

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

a. Calcule I_0, puis $I_0 + I_1$ et déduis-en I_1.

b. Montre que $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$.

c. Montre que (I_n) est décroissante et que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

d. Déduis-en la limite de (I_n).

Exercice 12 Une fonction définie par une intégrale ●●●

Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t$.

a. Que vaut $F'(x)$? Et $F(1)$?

b. Étudie les variations de F et son signe.

c. Exprime $F(x)$ sans intégrale (voir l'exercice 9).

Exercice 13 TYPE CONTRÔLE **Une aire qui reste finie** ●●●

Soit $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$ sur $[0\,;+\infty[$. Pour $\lambda > 0$, on note $A(\lambda)$ l'aire du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = \lambda$.

1. Justifie que $A(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montre que $A(\lambda) = 1 - (\lambda + 1)\,\mathrm{e}^{-\lambda}$.
3. Détermine la limite de $A(\lambda)$ quand $\lambda \to +\infty$. Interprète.
4. Calcule la valeur moyenne de f sur $[0\,;2]$, arrondie au centième.
5. Vérifie que $G(x) = -(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f et retrouve le résultat de la question 2.

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE **La méthode des rectangles** ●●●

On veut une valeur approchée de $I = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. On partage $[0\,;1]$ en n intervalles de longueur $\dfrac{1}{n}$ et on pose $s_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$, avec $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

1. Justifie que f est décroissante sur $[0\,;1]$.
2. Explique, à l'aide d'un dessin, pourquoi $s_n \leqslant I \leqslant S_n$.
3. Calcule s_4 et S_4 à 10^{-3} près.
4. Complète la fonction Python qui renvoie s_n et S_n.

```
from math import exp
def rectangles(n):
    s = 0
    S = 0
    for k in range(n):
        S = S + exp(-(k/n)**2) / n
        s = ........
    return s, S
```

5. Pour $n = 10$, la fonction renvoie environ $(0{,}715\ ;\ 0{,}778)$. Montre que $S_n - s_n = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-1}}{n}$ et trouve n pour que l'encadrement ait une amplitude inférieure à 10^{-3}.

Exercice 15 BAC 2026 Une aire avec ln(x)/x² ●●●

Bac spé maths 2026, Centres étrangers, jour 1, exercice 4

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{x^2}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Partie A

1.

a. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de l'intervalle $]0;+\infty[$.

b. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. Pour tout réel strictement positif x, démontrer que

$$f'(x)=\frac{1-2\ln(x)}{x^3}$$

3. Dresser le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites et les valeurs exactes des éventuels extremums de la fonction.

4. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ, tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.

5. Vérifier que pour tout réel strictement positif x, on a

$$f''(x)=\frac{-5+6\ln(x)}{x^4}$$

6.

a. Étudier la convexité de la fonction f en précisant les coordonnées des éventuels points d'inflexion.

b. En déduire que, pour tout réel x appartenant à $\left]0;\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right]$, on a

$$x-1\geqslant\frac{\ln(x)}{x^2}$$

7. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $\left[\mathrm{e}^{\frac{5}{6}};+\infty\right[$, on a aussi

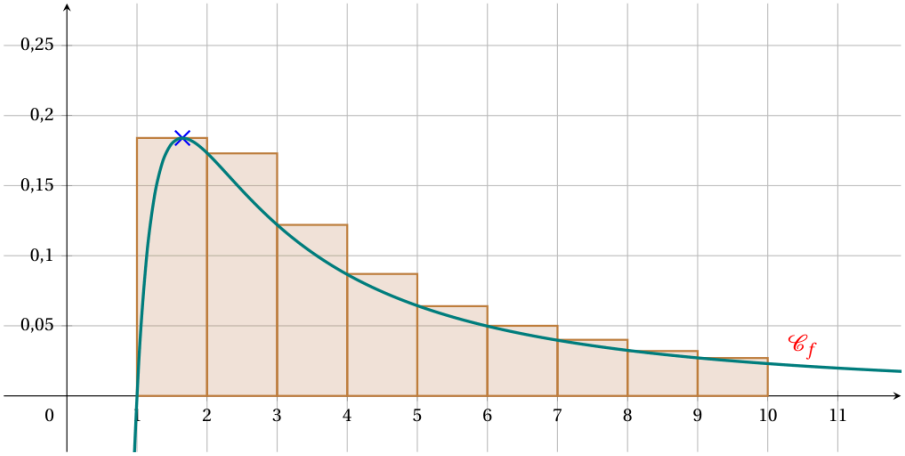
$$x-1\geqslant\frac{\ln(x)}{x^2}$$

Partie B

On considère la suite (I_n) définie, pour tout entier naturel non nul n, par :

$$I_n=\int_1^n\frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

1. Donner une interprétation graphique de I_n pour n un entier naturel non nul.
2. Démontrer que la suite (I_n) est croissante.
3. On souhaite calculer une approximation de $\int_1^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$ en déterminant la somme des aires des rectangles tracés dans le graphique ci-dessous.



Pour cela, on utilise le script suivant, écrit en langage Python.

```
from math import *
S=1/(2*exp(1))
for i in range (2,10):
S =...
print(S)
```

Recopier et compléter ce script afin qu'il réponde au problème posé.

4. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel non nul n,

$$I_n = \frac{n - 1 - \ln(n)}{n}$$

5. Calculer la limite de la suite (I_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 16 — BAC 2026 — Intégrer x(ln x)² ●●●

Bac spé maths 2026, Amérique du Nord, jour 2, exercice 4

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x(\ln x)^2.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = x\ln x$.
   a. Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a $f(x) = 4\left(g\left(\sqrt{x}\right)\right)^2$.
   b. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
3. Dans cette question, on étudie les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   a. Démontrer que sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = (\ln x)(2+\ln x)$.
   b. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   c. Donner la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$.
4. On considère l'équation $f(x) = 2$.
   a. Justifier que, sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, cette équation admet une unique solution.
   On note α cette solution.
   b. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.
5. Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle]0 ; 1].
   a. Donner une interprétation géométrique de $\displaystyle\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   b. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que :
   $$\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 - \int_a^1 x\ln x\,\mathrm{d}x.$$
   c. En utilisant à nouveau une intégration par parties, démontrer que :
   $$\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \frac{a^2}{2}\ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}.$$
   d. Déterminer la limite de $\displaystyle\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ quand a tend vers 0.



LA FICHE MAGIQUE QUI VA AVEC

« Primitive et intégrale »

Calculer une intégrale avec une primitive et l'interpréter comme une aire, sur une seule fiche.

Les fiches magiques terminale spé maths : campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

CAMPUS XYZ

Corrigés

Exercices sur le calcul intégral en terminale spé maths

Exercice 1 — Calculer des intégrales ●○○

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f.

a. $\left[x^3 - x\right]_0^2 = 8 - 2 = \mathbf{6}$.

b. $\left[\ln x\right]_1^{\mathrm{e}} = 1 - 0 = \mathbf{1}$.

c. $\left[\mathrm{e}^x\right]_0^1 = \mathrm{e} - \mathbf{1}$.

d. $\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = 1 - (-1) = \mathbf{2}$.

Exercice 2 — Une aire sous une parabole ●○○

La fonction est positive sur $[0\,;3]$: $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9$ **u.a.** Une unité d'aire vaut $2 \times 1 = 2$ cm², donc $\mathscr{A} = 18$ **cm²**.

Exercice 3 — Linéarité et relation de Chasles ●○○

a. Chasles : $5 + (-1) = \mathbf{4}$.

b. Linéarité : $2 \times 5 - 3 \times 3 = \mathbf{1}$.

c. Échanger les bornes change le signe : -5.

Exercice 4 — Valeur moyenne d'une fonction ●○○

$\displaystyle\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. $\displaystyle\mu = \frac{1}{3} \times 9 = \mathbf{3}$.

b. $\displaystyle\mu = \frac{1}{\ln 2}\left[\mathrm{e}^x\right]_0^{\ln 2} = \frac{2-1}{\ln 2} = \mathbf{\frac{1}{\ln 2}} \approx \mathbf{1{,}44}$.

Exercice 5 — Reconnaître une forme composée ●●○

a. $\displaystyle\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\right]_0^1 = \mathbf{\frac{\mathrm{e}-1}{2}}$.

b. $\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1 = \mathbf{\ln 2}$.

c. $\left[\ln\left(x^2+x\right)\right]_1^2 = \ln 6 - \ln 2 = \mathbf{\ln 3}$.

Exercice 6 — Encadrer une intégrale ●●○

a. Sur $[0\,;1]$, $0 \leqslant x^2 \leqslant x$, donc $-x \leqslant -x^2 \leqslant 0$ et, $\exp$ étant croissante, $\mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1$.

b. On intègre l'encadrement (les bornes sont dans l'ordre) : $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \leqslant I \leqslant 1$, soit $1-\mathrm{e}^{-1} \leqslant I \leqslant 1$ ($0{,}63 \leqslant I \leqslant 1$).

Exercice 7 — L'aire entre deux courbes ●●○

Sur $[0\,;1]$, $x^2 \leqslant x$: la droite est au-dessus de la parabole. $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^1 \left(x - x^2\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$ **u.a.**

> Aire entre deux courbes : on intègre (fonction du dessus) **−** (fonction du dessous).

Exercice 8 — Intégration par parties ●●○

On pose $u(x) = x$, $v'(x) = \mathrm{e}^x$, d'où $u'(x) = 1$, $v(x) = \mathrm{e}^x$:

$$\begin{aligned} I &= \Big[x\,\mathrm{e}^x\Big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e} - (\mathrm{e}-1) = 1 \end{aligned}$$

$I = 1$.

> $\displaystyle\int_a^b u\,v' = \Big[u\,v\Big]_a^b - \int_a^b u'\,v$: on dérive le facteur qui se simplifie (x, $\ln x$).

Exercice 9 — Intégrer ln x ●●○

a. $u = \ln x$, $v' = 1$: $J = \Big[x\ln x\Big]_1^{\mathrm{e}} - \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} 1\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - (\mathrm{e}-1) = \mathbf{1}$.

b. $u = \ln x$, $v' = x$, $v = \dfrac{x^2}{2}$: $K = \left[\dfrac{x^2}{2}\ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{\mathrm{e}^2-1}{4} = \mathbf{\frac{\mathrm{e}^2+1}{4}}$.

Exercice 10 — Intégrale ou aire ? ●●○

a. $\Big[-\cos x\Big]_0^{2\pi} = -1 - (-1) = \mathbf{0}$.

b. $\sin \geqslant 0$ sur $[0\,;\pi]$ et $\leqslant 0$ sur $[\pi\,;2\pi]$: $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 2 - (-2) = 4$ **u.a.**

L'intégrale compte **négativement** les parties sous l'axe : elle n'est égale à l'aire que si la fonction est positive.

Exercice 11 — Une suite d'intégrales ●●●

a. $I_0 = \Big[\ln(1+x)\Big]_0^1 = \ln 2$; $I_0 + I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+x}{1+x}\mathrm{d}x = 1$, donc $I_1 = 1 - \ln 2$.

b. $I_n + I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$.

c. Sur $[0\,;1]$, $x^{n+1} \leqslant x^n$, donc $I_{n+1} \leqslant I_n$: **décroissante**. L'intégrande est positif, donc $I_n \geqslant 0$; et $\dfrac{x^n}{1+x} \leqslant x^n$, d'où $I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

d. Par les gendarmes, $\lim I_n = 0$.

Exercice 12 — Une fonction définie par une intégrale ●●●

a. F est la primitive de $\ln$ qui s'annule en 1 : $F'(x) = \ln x$ **et** $F(1) = 0$.

b. $\ln x < 0$ sur $]0\,;1[$ et > 0 sur $]1\,;+\infty[$: F **décroît puis croît**, minimum $F(1) = 0$. Donc $F(x) \geqslant 0$.

c. $F(x) = \Big[t\ln t - t\Big]_1^x = x\ln x - x + 1$.

Exercice 13 — TYPE CONTRÔLE — Une aire qui reste finie ●●●

1. $f(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;+\infty[$: l'aire est l'intégrale.

2. $u = x, v' = \mathrm{e}^{-x}, v = -\mathrm{e}^{-x}$:

$$A(\lambda) = \Big[-x\,\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^\lambda + \int_0^\lambda \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda} + 1 - \mathrm{e}^{-\lambda} = 1 - (\lambda+1)\,\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

3. $\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda} \to 0$ et $\mathrm{e}^{-\lambda} \to 0$: $A(\lambda) \to 1$. Le domaine est infini, mais son aire tend vers 1 u.a.

4. $\mu = \dfrac{1}{2}A(2) = \dfrac{1 - 3\,\mathrm{e}^{-2}}{2} \approx 0{,}30$.

5. $G'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + (x+1)\,\mathrm{e}^{-x} = x\,\mathrm{e}^{-x}$; $G(\lambda) - G(0) = -(\lambda+1)\,\mathrm{e}^{-\lambda} + 1$.

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE La méthode des rectangles ●●●

1. $f'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 0$ sur $[0\,;1]$.
2. Sur chaque intervalle $\left[\dfrac{k-1}{n}\,;\dfrac{k}{n}\right]$, f décroît : le rectangle de hauteur $f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ (bord droit) est sous la courbe, celui de hauteur $f\left(\dfrac{k-1}{n}\right)$ (bord gauche) la contient. On additionne les aires.
3. $s_4 \approx 0{,}664$ **et** $S_4 \approx 0{,}822$.
4. `s = s + exp(-((k+1)/n)**2) / n`.
5. Les deux sommes ont les mêmes termes sauf $f(0) = 1$ dans S_n et $f(1) = \mathrm{e}^{-1}$ dans s_n :

$$S_n - s_n = \frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{n}.\frac{0{,}632}{n} < 10^{-3} \iff n > 632 : n = 633$$ **suffit**. (On trouve $I \approx 0{,}7468$.)

Exercice 15 BAC 2026 Une aire avec $\ln(x)/x^2$ ●●●

Partie A

1.

a.

- **b.**Limite en 0^+ :

  $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0^+ \end{cases}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

- **c.**Limite en $+\infty$:

  Par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$

d. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

donc la droite d'équation $x = 0$, c'est à dire l'axe des ordonnées, est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$

donc la droite d'équation $y = 0$, c'est à dire l'axe des abscisses, est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

2. Pour tout réel strictement positif x, $f(x) = \ln(x) \times x^{-2}$.

f est de la forme $u \times v$ avec $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v(x) = x^{-2} \end{cases}$.

On a : $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = -2x^{-3} \end{cases}$.

$f' = u'v + v'u$ donc pour tout réel strictement positif x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} \times x^{-2} + \ln(x) \times (-2x^{-3}) \\ &= \frac{1}{x} \times 1x^2 - \ln(x) \times \frac{2}{x^3} \\ &= \frac{1}{x^3} - \frac{2\ln(x)}{x^3} \\ &= \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3} \end{aligned}$$

3. x est strictement positif donc x^3 aussi donc $f'(x)$ est du signe de $1 - 2\ln(x)$.

$$\begin{aligned} 1 - 2\ln(x) > 0 &\iff 1 > 2\ln(x) \\ &\iff 1 > \ln(x^2) \\ &\iff \mathrm{e} > x^2 \\ &\iff \sqrt{\mathrm{e}} > x \quad \text{car } x > 0 \end{aligned}$$

$$f(\sqrt{\mathrm{e}}) = \frac{\ln(\sqrt{\mathrm{e}})}{\sqrt{\mathrm{e}}^2} = \frac{\frac{1}{2}\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}} = \frac{1}{2\mathrm{e}}.$$

Le tableau de variations est donc :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
variations de f	‖	$-\infty$ ↗	$\frac{1}{2e}$	↘	0

4. L'équation réduite de la droite Δ, tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Pour $a = 1$:

$$f'(1) = \frac{1 - 2\ln(1)}{1^3} = \frac{1 - 2 \times 0}{1} = 1 \quad \text{et} \quad f(1) = \frac{\ln(1)}{1^2} = \frac{0}{1} = 0.$$

Donc : $y = 1(x-1) + 0$ soit $y = x - 1$.

L'équation réduite de la droite Δ, tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A est : $y = x - 1$.

5. Pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = (1 - 2\ln(x)) \times x^{-3}$.

f' est de la forme $g \times h$ avec $\begin{cases} g(x) = 1 - 2\ln(x) \\ h(x) = x^{-3} \end{cases}$.

On a : $\begin{cases} g'(x) = 0 - 2 \times \dfrac{1}{x} \\ h'(x) = -3x^{-4} \end{cases}$.

$f'' = g'h + h'g$ donc pour tout réel strictement positif x :

$$f''(x) = \frac{-2}{x} \times x^{-3} + (1 - 2\ln(x)) \times (-3x^{-4}) = \frac{-2}{x} \times 1x^3 - (1 - 2\ln(x)) \times \frac{3}{x^4}$$
$$= \frac{-2}{x^4} - \frac{3(1 - 2\ln(x))}{x^4} = \frac{-2 - 3 + 6\ln(x)}{x^4} = \frac{-5 + 6\ln(x)}{x^4}$$

On a bien, pour tout réel strictement positif x, $f''(x) = \dfrac{-5 + 6\ln(x)}{x^4}$.

6.

a. Pour étudier la convexité de la fonction f, il faut étudier le signe de la dérivée seconde.

Sur $]0; +\infty[$, $x^4 > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $-5 + 6\ln(x)$.

$$-5 + 6\ln(x) > 0 \iff 6\ln(x) > 5$$
$$\iff \ln(x) > \frac{5}{6}$$
$$\iff x > e^{\frac{5}{6}}$$

On a donc :

$f''(x)$ est négatif sur $\left]0; e^{\frac{5}{6}}\right]$ et positif sur $\left[e^{\frac{5}{6}}; +\infty\right[$.

donc f est concave sur $\left]0;\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right]$ et convexe sur $\left[\mathrm{e}^{\frac{5}{6}};+\infty\right[$.

f'' s'annule en changeant de signe en $\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}$ et $f\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right)=\dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right)}{{\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}}^2}=\dfrac{\frac{5}{6}}{\mathrm{e}^{\frac{10}{6}}}=\dfrac{5}{6\mathrm{e}^{\frac{5}{3}}}$

Donc le point $\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{6}};\dfrac{5}{6\mathrm{e}^{\frac{5}{3}}}\right)$ est un point d'inflexion pour f.

b. f est concave sur $\left]0;\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right]$ donc, sur cet intervalle, la courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de ces tangentes, en particulier, en dessous de la tangente au point A (car $0<1<\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}$).

Donc pour tout réel x appartenant à $\left]0;\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right]$:

$f(x)\leqslant x-1 \iff \dfrac{\ln(x)}{x^2}\leqslant x-1$

7. Donc pour tout réel x appartenant à $\left]0;\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right]$:

- **8.**Pour tout réel x appartenant à $\left]0;\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right]$: $f(x)\leqslant x-1$ et donc, en particulier, $f\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right)\leqslant \mathrm{e}^{\frac{5}{6}}-1$.
- **9.**$\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}>\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ et f est décroissante sur $[\sqrt{e};+\infty[$ donc pour tout $x\geqslant \mathrm{e}^{\frac{5}{6}}$, $f(x)\leqslant f\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right)$
- **10.**Pour tout $x\geqslant \mathrm{e}^{\frac{5}{6}}$, $x-1\geqslant \mathrm{e}^{\frac{5}{6}}-1$

Pour tout $x\geqslant \mathrm{e}^{\frac{5}{6}}$, on a donc : $x-1\geqslant \mathrm{e}^{\frac{5}{6}}-1\geqslant f\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right)\geqslant f(x)$

Soit $x-1\geqslant \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

Partie B

1. Pour tout entier naturel non nul n :
   - **2.** $1 \leqslant n$
   - **3.** Sur l'intervalle $[1;n]$, $\ln(x) \geqslant 0$ et $x^2 \geqslant 1$ donc $f(x) \geqslant 0$

   donc I_n est égale à l'aire, en unité d'aire, de la surface délimitée par :
   - **4.** la courbe $\mathcal{C}_f$;
   - **5.** l'axe des abscisses ;
   - **6.** les droites d'équations $x = 1$ et $x = n$.

7. Soit n un entier naturel non nul.

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^{n+1} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - \int_1^{n} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^{n+1} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_n^{1} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_n^{n+1} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

   Or, sur l'intervalle $[1;+\infty[$, $f(x) \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ soit $I_{n+1} - I_n \geqslant 0$.

   La suite (I_n) est donc croissante.

8. On souhaite calculer une approximation de $\displaystyle\int_1^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$ en déterminant la somme des aires des rectangles tracés dans le graphique.

   Soit i un entier compris entre 1 et 9.

   Le i-ème rectangle a pour largeur 1 et pour hauteur le maximum de $f(x)$ pour $x \in [i;1+1]$

   Le premier rectangle a pour aire : $1 \times f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$

   ce qui est déjà stocké dans la variable S par la ligne : S = 1 /(2 * exp(1))

   Pour les rectangles suivants, la fonction f étant décroissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$, la hauteur sera $f(i)$ soit $\dfrac{\ln(i)}{i^2}$

   Pour i allant de 2 à 9, il faut donc rajouter à S, la valeur du i-ème rectangle soit $\dfrac{\ln(i)}{i^2}$.

   Remarque : en langage Python la commande log(c) renvoie la valeur de $\ln(c)$.

   Le programme complété est donc :

```
from math import *
S=1/(2*exp(1))
for i in range (2,10):
S = S + log(i)/(i**2)
print(S)
```

9. $\displaystyle I_n = \int_1^{n} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$

$x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ est de la forme uv' avec $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = \dfrac{1}{x^2} \end{cases}$

Ce qui implique : $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{-1}{x} \end{cases}$

Les fonctions u et v sont continues et dérivables sur $[1;n]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[1;n]$, donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

$$I_n = \left[\frac{-1}{x} \times \ln(x)\right]_1^n - \int_1^n \frac{1}{x} \times \frac{-1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{n} \times \ln(n) - \frac{-1}{1} \times \ln(1) - \int_1^n \frac{-1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

d'où $= \dfrac{-\ln(n)}{n} - \left[\dfrac{1}{x}\right]_1^n = -\dfrac{\ln(n)}{n} - \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{1}\right) = -\dfrac{\ln(n)}{n} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{n}{n}$

$$= \frac{-\ln(n) - 1 + n}{n}$$

pour tout entier naturel non nul n on a donc bien : $I_n = \dfrac{n - 1 - \ln(n)}{n}$.

10. $I_n = \dfrac{n - 1 - \ln(n)}{n} = 1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{\ln(n)}{n}$

$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \\ \text{Par croissances comparées,} \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0 \end{cases}$ donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 1$

Le sujet complet du bac 2026 (Centres étrangers, jour 1) corrigé →



La méthode pas à pas est dans la fiche magique **« Primitive et intégrale »** (Les fiches magiques terminale spé maths, page 54).

Exercice 16 BAC 2026 **Intégrer x(ln x)²** ●●●

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x(\ln x)^2$.

1. On cherche la limite de la fonction f en $+\infty$.

Pour tout réel x strictement positif, $f(x) = x\left(\ln x\right)^2 = x \times \ln(x) \times \ln(x)$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \end{cases}$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. Pour tout réel x > 0, on pose $g(x) = x\ln x$.

a. Soit $x \in]0\ ;\ +\infty[$,

$$4\left(g\left(\sqrt{x}\right)\right)^2 = 4\left(\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2 = 4\left(\sqrt{x} \times \frac{1}{2}\ln(x)\right)^2 = 4 \times x \times \frac{1}{4}\left(\ln x\right)^2 = x\left(\ln x\right)^2 = f(x)$$

On a bien : pour tout réel $x > 0$, on a $f(x) = 4\left(g\left(\sqrt{x}\right)\right)$.

b. On cherche $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to0} \sqrt{x} = 0 \\ \lim\limits_{X\to0} X\ln X = 0 \text{ par croissances comparées} \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to0} g(\sqrt{x}) = 0$

D'où, par produit, $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$.

3. On étudie les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

a. f est de la forme uv avec : $\forall x \in]0;+\infty[\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = (\ln x)^2 \end{cases}$

On a alors : $\forall x \in]0;+\infty[\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x \end{cases}$

Or : $f' = u'v + v'u$

Donc, $\forall x \in]0;+\infty[,\quad f'(x) = 1 \times (\ln x)^2 + x \times \dfrac{2\ln x}{x}$

$$= \ln x \times \ln x + 2\ln x$$
$$= (\ln x)(\ln x + 2)$$

Donc sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = (\ln x)(2 + \ln x)$.

b. On en déduit les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Étudions le signe de $f'(x)$:

$2 + \ln(x) > 0 \iff \ln x > -2 \iff x > \mathrm{e}^{-2}$

$\ln x > 0 \iff x > 1$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
signe de $\ln x$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $2+\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	0	↗	$f\left(\mathrm{e}^{-2}\right)$	↘	0	↗	$+\infty$

$\mathrm{e}^{-2}\left(\ln\left(\mathrm{e}^{-2}\right)\right)^2 \quad \mathrm{e}^{-2} \qquad 4\mathrm{e}^{-2}$

c. $f\left(\mathrm{e}^{-2}\right) = \mathrm{e}^{-2}\left(\ln\left(\mathrm{e}^{-2}\right)\right)^2 = \mathrm{e}^{-2} \times (-2)^2 = 4\mathrm{e}^{-2}$

Le maximum de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$ est $4\mathrm{e}^{-2}$.

4.

a. Sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$, le maximum est $4\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}54 < 2$ donc l'équation $f(x) = 2$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.

Sur l'intervalle $[1; +\infty[$:

- **b.** f est continue car dérivable ;
- **c.** f est strictement croissante ;
- **d.** $f(1) = 0 < 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty > 2$

Donc, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

donc l'équation admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

e. À l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 2{,}46$ donc : $2{,}4 < \alpha < 2{,}5$.

5. Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle]0 ; 1].

a. La fonction f est positive sur l'intervalle $[a; 1]$ donc $\displaystyle\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est égal à l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par les droites d'équation $x = a$ et $x = 1$, par l'axe des abscisses et la courbe.

b. $x \longmapsto x\left(\ln x\right)^2$ est de la forme $u'v$ avec $\begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = (\ln x)^2 \end{cases}$

Ce qui implique : $\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \\ v'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x}\ln(x) \end{cases}$

Les fonctions u et v sont continues et dérivables sur $[a\ ;\ 1]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[a\ ;\ 1]$, donc , d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^1 - \int_a^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\times(\ln x)^2\right]_a^1 - \int_a^1 \frac{x^2}{2}\times\frac{2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$

donc
$$= \frac{1^2}{2}(\ln 1)^2 - \frac{a^2}{2}(\ln a)^2 - \int_a^1 x\ln(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 - \int_a^1 x\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Ce qui est le résultat demandé.

c. $x \longmapsto x\ln x$ est de la forme $u'v$ avec $\begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = \ln x \end{cases}$

Ce qui implique : $\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \\ v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

Les fonctions u et v sont continues et dérivables sur $[a\ ;\ 1]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[a\ ;\ 1]$, donc , d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^1 - \int_a^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^1 x\ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\times\ln(x)\right]_a^1 - \int_a^1 \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1^2}{2}\ln(1) - \frac{a^2}{2}\ln(a) - \int_a^1 \frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x$$

donc
$$= -\frac{a^2}{2}\ln(a) - \left[\frac{1}{2}\times\frac{x^2}{2}\right]_a^1$$
$$= -\frac{a^2}{2}\ln(a) - \left[\frac{1}{2}\times\frac{1^2}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{a^2}{2}\right]$$
$$= -\frac{a^2}{2}\ln(a) - \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4}$$

$$\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 - \int_a^1 x\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

D'où :
$$= -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 - \left(-\frac{a^2}{2}\ln(a) - \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4}\right)$$
$$= -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \frac{a^2}{2}\ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}$$

Ce qui est le résultat demandé.

d. On cherche la limite de $\displaystyle\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ quand a tend vers 0.

$$\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \frac{a^2}{2}\ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4} = -\frac{1}{2}(a\ln a)^2 + \frac{a}{2}\times a\ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}.$$

Par croissances comparées : $\lim\limits_{a\to 0} a\ln a = 0$

donc : par produit $\lim\limits_{a\to 0} (a\ln a)^2 = 0$ et $\lim\limits_{a\to 0} \dfrac{a}{2} \times a\ln a = 0$.

De plus, $\lim\limits_{a\to 0} \dfrac{1}{4} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{1}{4}$

donc, par somme, $\lim\limits_{a\to 0} \displaystyle\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}$

Le sujet complet du bac 2026 (Amérique du Nord, jour 2) corrigé →



La méthode pas à pas est dans la fiche magique **« Primitive et intégrale »** (Les fiches magiques terminale spé maths, page 54).

LES FICHES MAGIQUES TERMINALE SPÉ MATHS

Révise toute la terminale spé maths avec les fiches magiques



- **41 fiches claires et illustrées** : tout le programme de spécialité maths de terminale, une notion par page.
- **Des vidéos méthode** accessibles par QR code sur les fiches.
- **Des exercices corrigés** après chaque fiche pour vérifier que tout est acquis.

campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

ANNALES BAC MATHS TERMINALE 2027

Prépare le bac avec les vrais sujets



- **75 sujets types** tirés des vrais sujets du bac, classés par chapitre.
- **3 bacs blancs complets** pour s'entraîner en conditions réelles.
- Des **corrigés avec la rédaction attendue**, des conseils et un aide-mémoire.

campusxyz.fr/produit/annales-bac-2027-terminale-spe-maths