Exercice 1 Limites et opérations ●○○

Détermine chaque limite.

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x^2 + 3x - 1\right)$

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 + x\right)$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 - \dfrac{1}{x^2}\right)$

d. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\mathrm{e}^x + 2\right)$

Exercice 2 Limites en un réel ●○○

Détermine chaque limite en étudiant le signe du dénominateur.

a. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{x - 2}$

b. $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{3}{x - 2}$

c. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5}{x^2}$

d. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x + 1}{1 - x}$

Exercice 3 — Trouver les asymptotes ●○○

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$, de courbe $\mathscr{C}$.

a. Détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Détermine les limites de f à gauche et à droite de 3.

c. Déduis-en les asymptotes à $\mathscr{C}$.

Exercice 4 — Lever les formes indéterminées ●○○

Détermine chaque limite.

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 - 5x^2 + 1\right)$

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2+1}{x^2-4}$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x^2+2}$

d. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3}{x^2+1}$

Exercice 5 — Limites de fonctions composées ●●○

Détermine chaque limite en repérant une composition.

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{4 + \dfrac{1}{x}}$

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x^2}$

c. $\lim\limits_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

d. $\lim\limits_{x \to 0^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

e. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 6 — Croissances comparées avec l'exponentielle ●●○

Détermine chaque limite.

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3}$

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,\mathrm{e}^x$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x}$

d. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\mathrm{e}^x - x^2\right)$

Exercice 7 Comparaison et gendarmes ●●○

Détermine chaque limite à l'aide d'une inégalité.

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x}$

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \cos x)$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + \sin x}{x + 1}$

Exercice 8 Avec la quantité conjuguée ●●○

Détermine chaque limite.

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x} - x\right)$

b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$

Exercice 9 — Reconnaître un nombre dérivé ●●○

Reconnais un taux d'accroissement pour déterminer chaque limite.

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ **b.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ **c.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

Exercice 10 — Trois asymptotes ●●○

Soit $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\,;1\}$, de courbe $\mathscr{C}$.

a. Montre que f est paire.

b. Détermine les limites de f en $+\infty$, et à gauche et à droite de 1.

c. Déduis-en toutes les asymptotes de $\mathscr{C}$.

Exercice 11 Retrouver une fonction avec ses asymptotes ●●●

Soit $f(x) = \dfrac{ax+b}{x-2}$, avec a et b réels. Sa courbe passe par le point $(0\,;-1)$ et admet la droite d'équation $y = 3$ pour asymptote en $+\infty$.

a. Détermine a et b.

b. Détermine la limite de f à droite de 2.

Exercice 12 Quotients d'exponentielles ●●●

Détermine chaque limite.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{x}+x}$

Exercice 13 TYPE CONTRÔLE **Une courbe entre deux asymptotes** ●●●

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$, de courbe $\mathscr{C}$.

1. Détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interprète-les graphiquement.
2. Montre que $f'(x) = \dfrac{3\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$, puis dresse le tableau de variations de f.
3. Résous l'équation $f(x) = 0$.
4. Montre que $f(x) = 2 - \dfrac{3}{\mathrm{e}^x + 1}$. Déduis-en la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite d'équation $y = 2$.

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE **Une fonction avec e puissance 1/x** ●●●

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

1. En posant $X = \dfrac{1}{x}$, détermine la limite de g en 0.

2. Détermine la limite de g en $+\infty$.

3. Montre que $g'(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$ et dresse le tableau de variations de g.

4.

   a. Montre que $g(x) - x = \dfrac{\mathrm{e}^X - 1}{X}$ avec $X = \dfrac{1}{x}$.

   b. Déduis-en $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(g(x) - (x+1)\big)$ et interprète graphiquement.

Exercice 15 BAC 2024 Une fonction logistique ●●○

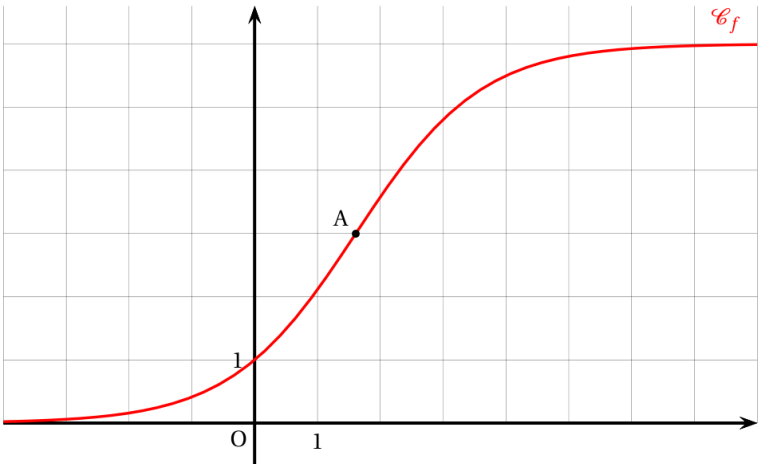
Bac spé maths 2024, Métropole, Antilles-Guyane (septembre), jour 2, exercice 3

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}}$$

On a représenté sur le schéma ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f.



1. Montrer que le point A de coordonnées $(\ln 5\ ;\ 3)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$.
2. Montrer que la droite d'équation $y = 6$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.
3.
   a. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x, on a :
   $$f'(x) = \frac{30\mathrm{e}^{-x}}{\left(1+5\mathrm{e}^{-x}\right)^2}.$$
   b. En déduire le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.
4. On admet que :
   - **5.** f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on note f'' sa dérivée seconde ;
   - **6.** pour tout réel x,
   $$f''(x) = \frac{30\mathrm{e}^{-x}\left(5\mathrm{e}^{-x}-1\right)}{\left(1+5\mathrm{e}^{-x}\right)^3}.$$

   a. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$. On montrera en particulier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion.
   b. Justifier que pour tout réel x appartenant à $]-\infty\ ;\ \ln 5]$, on a: $f(x) \geqslant \frac{5}{6}x + 1$.
7. On considère une fonction F_k définie sur $\mathbb{R}$ par $F_k(x) = k\ln\left(\mathrm{e}^x + 5\right)$, où k est une constante réelle.
   a. Déterminer la valeur du réel k de sorte que F_k soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   b. En déduire que l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 5$ est égale à $6\ln\left(\frac{5}{3}\right)$.

Partie B

L'objectif de cette partie est d'étudier l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad y' = y - \frac{1}{6}y^2.$$

On rappelle qu'une solution de l'équation (E) est une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x réel, on a :

$$u'(x) = u(x) - \frac{1}{6}[u(x)]^2.$$

1. Montrer que la fonction f définie dans la partie A est une solution de l'équation différentielle (E).
2. Résoudre l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$.

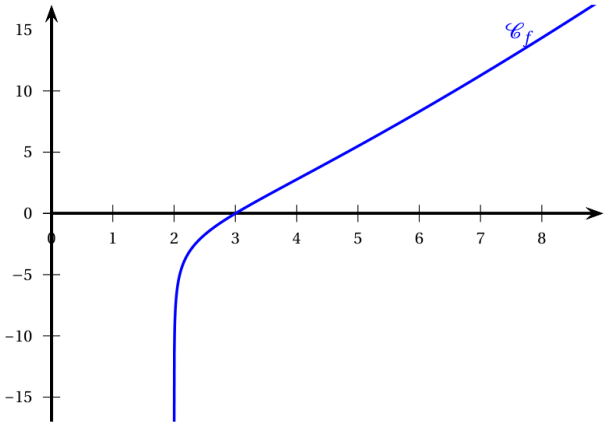
Exercice 16 BAC 2025 Limites d'une fonction avec ln ●●●

Bac spé maths 2025, Polynésie, jour 2, exercice 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]2\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x-2).$$

Une partie de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



1. Conjecturer, à l'aide du graphique, le sens de variation de f ses limites aux bornes de son ensemble de définition ainsi que les éventuelles asymptotes.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]2\ ;\ +\infty[$.
3. Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x)$.

   Ce résultat confirme-t-il l'une des conjectures faites à la question 1. ?
4. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2\ ;\ +\infty[$:

   $$f'(x) = \ln(x-2) + \frac{x}{x-2}.$$
5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]2\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f'(x)$.

   a. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2\ ;\ +\infty[$, on a:

   $$g'(x) = \frac{x-4}{(x-2)^2}.$$

   b. On admet que $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} g(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

   En déduire le tableau des variations de la fonction g sur $]2\ ;\ +\infty[$. On fera apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction g.

   c. En déduire que, pour tout x appartenant à $]2\ ;\ +\infty[$, $g(x) > 0$.

   d. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]2\ ;\ +\infty[$.
6. Étudier la convexité de la fonction f sur $]2\ ;\ +\infty[$ et préciser les coordonnées d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.
7. Combien de valeurs de x existe-t-il pour lesquelles la courbe représentative de f admet une tangente de coefficient directeur égal à 3 ?



LA FICHE MAGIQUE QUI VA AVEC

« Limites de fonctions »

Limites de référence, asymptotes et croissances comparées réunies sur une seule fiche.

Les fiches magiques terminale spé maths : campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

CAMPUS XYZ

Corrigés

Exercices sur les limites de fonctions en terminale spé maths

Exercice 1 Limites et opérations ●○○

a. $2x^2 \to +\infty$ et $3x - 1 \to +\infty$: par somme, $+\infty$.

b. $x^3 \to -\infty$ et $x \to -\infty$: par somme, $-\infty$.

c. $\dfrac{1}{x^2} \to 0 : 3$.

d. $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0 : 2$.

Exercice 2 Limites en un réel ●○○

Si le numérateur tend vers un réel non nul et le dénominateur vers 0, la limite est infinie : son signe est donné par la règle des signes.

a. Pour $x > 2$, $x - 2 \to 0^+ : +\infty$.

b. Pour $x < 2$, $x - 2 \to 0^-$ et $3 > 0 : -\infty$.

c. $x^2 \to 0^+ : +\infty$.

d. $x + 1 \to 2$ et, pour $x > 1$, $1 - x \to 0^- : -\infty$.

Exercice 3 Trouver les asymptotes ●○○

a. $f(x) = \dfrac{x\left(2 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{3}{x}\right)} = \dfrac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}}$, donc $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 2$.

b. $2x + 1 \to 7$. Pour $x > 3$, $x - 3 \to 0^+ : +\infty$; pour $x < 3$, $x - 3 \to 0^- : -\infty$.

c. **La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale** en $\pm\infty$, et **la droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale**.

Exercice 4 Lever les formes indéterminées ●○○

On factorise par le terme de plus haut degré.

a. $x^3\left(1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{x^3}\right)$: la parenthèse tend vers 1, $+\infty$.

b. $\dfrac{3 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} \to 3 : 3$.

c. $\dfrac{1}{x} \times \dfrac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x^2}} \to 0 \times 1 : 0$.

d. $2x \times \dfrac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}$, avec $2x \to -\infty : -\infty$.

Exercice 5 — Limites de fonctions composées ●●○

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{X\to b} g(X) = c$, alors $\lim\limits_{x\to a} g\big(u(x)\big) = c$.

a. $4 + \dfrac{1}{x} \to 4$ et $\sqrt{X} \to 2$ quand $X \to 4$: 2.

b. $-x^2 \to -\infty$ et $\mathrm{e}^X \to 0$ quand $X \to -\infty$: 0.

c. $\dfrac{1}{x} \to +\infty$: $+\infty$.

d. $\dfrac{1}{x} \to -\infty$: 0.

e. $1 + \dfrac{1}{x} \to 1$ et $\ln 1 = 0$: 0.

Exercice 6 — Croissances comparées avec l'exponentielle ●●○

À connaître : pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\,\mathrm{e}^x = 0$: l'exponentielle l'emporte.

a. $+\infty$ (croissances comparées).

b. 0 (croissances comparées).

c. $x^2\,\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}}$ et $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} \to +\infty$: 0.

d. Forme « $\infty - \infty$ » : $\mathrm{e}^x - x^2 = x^2\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} - 1\right)$ et la parenthèse tend vers $+\infty$: $+\infty$.

Exercice 7 — Comparaison et gendarmes ●●○

a. Pour $x > 0$: $-\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$ et les deux bornes tendent vers 0 : 0 (gendarmes).

b. $x + \cos x \geqslant x - 1$ et $x - 1 \to +\infty$: $+\infty$ (comparaison).

c. Pour $x > 0$: $\dfrac{2x-1}{x+1} \leqslant \dfrac{2x+\sin x}{x+1} \leqslant \dfrac{2x+1}{x+1}$, et les deux bornes tendent vers 2 : 2.

Exercice 8 — Avec la quantité conjuguée ●●○

a. $\sqrt{x^2+4x} - x = \dfrac{x^2+4x-x^2}{\sqrt{x^2+4x}+x} = \dfrac{4x}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1\right)} = \dfrac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}$ pour $x > 0$. Le dénominateur tend vers 2 : 2.

b. $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \dfrac{(1+x)-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1} : \dfrac{1}{2}$.

Exercice 9 — Reconnaître un nombre dérivé ●●○

Si f est dérivable en a : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$.

a. Avec $f=\exp$ et $a=0$: $\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^0}{x-0}\to\exp'(0)=\mathrm{e}^0:1$.

b. Avec $f(x)=\ln(1+x)$, $f(0)=0$ et $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$: $f'(0)=1$.

c. Avec $f=\sin$, $\sin 0=0$ et $\sin'=\cos$: $\cos 0=1$.

Exercice 10 — Trois asymptotes ●●○

a. L'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0 et $f(-x)=\dfrac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1}=f(x)$: f **est paire**.

b. En $+\infty$: $\dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}\to 1$. En 1 : $x^2+1\to 2$ et $x^2-1=(x-1)(x+1)$ a le signe de $x-1$ près de 1.

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=+\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-\infty$.

c. Par symétrie, on a les mêmes résultats en $-\infty$ et en -1 : **asymptotes** $y=1$, $x=1$ **et** $x=-1$.

Exercice 11 — Retrouver une fonction avec ses asymptotes ●●●

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$ (quotient des termes de plus haut degré), donc $a=3$. $f(0)=\dfrac{b}{-2}=-1$, donc $b=2$.

b. $3x+2\to 8$ et $x-2\to 0^+$: $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=+\infty$.

Exercice 12 — Quotients d'exponentielles ●●●

a. En $+\infty$, on divise par e^{2x} : $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\to 1$.

En $-\infty$, pas de forme indéterminée : $\mathrm{e}^{2x}\to 0$ et $\mathrm{e}^x\to 0$, donc $\dfrac{0-0}{0+1}=0$.

b. On divise par e^x : $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1+x\,\mathrm{e}^{-x}}$. Or $x\,\mathrm{e}^{-x}=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\to 0$: 1.

> On factorise toujours par le terme qui « domine » : ici l'exponentielle de plus grand exposant.

Exercice 13 TYPE CONTRÔLE Une courbe entre deux asymptotes ●●●

1. En $-\infty$: $\mathrm{e}^x \to 0$, donc $f(x) \to \dfrac{-1}{1} = \mathbf{-1}$. En $+\infty$: $f(x) = \dfrac{2 - \mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}} \to 2$.

Les droites d'équations $y = -1$ et $y = 2$ sont asymptotes horizontales, en $-\infty$ et en $+\infty$.

2.

$$f'(x) = \frac{2\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x + 1\right) - \left(2\mathrm{e}^x - 1\right)\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x + 1\right)^2}$$
$$= \frac{2\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x + 1\right)^2} = \frac{3\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x + 1\right)^2}$$

$f'(x) > 0$: **f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$**, de -1 à 2.

3. $f(x) = 0 \iff 2\mathrm{e}^x = 1 \iff x = \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2$.

4. $2 - \dfrac{3}{\mathrm{e}^x + 1} = \dfrac{2\mathrm{e}^x + 2 - 3}{\mathrm{e}^x + 1} = f(x)$. Comme $\dfrac{3}{\mathrm{e}^x + 1} > 0$, $f(x) < 2$: **$\mathscr{C}$ est toujours en dessous de la droite** $y = 2$.

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE Une fonction avec e puissance 1/x ●●●

1. Quand $x \to 0^+$, $X \to +\infty$ et $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} \to +\infty$ (croissances comparées). $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$.

2. $\dfrac{1}{x} \to 0$ donc $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \to 1$, et $x \to +\infty$: $+\infty$.

3. $\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, donc $g'(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + x \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$.

Du signe de $1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$: **g décroît sur $]0\,;1]$, croît sur $[1\,;+\infty[$**, de minimum $g(1) = \mathrm{e}$.

4.

a. $g(x) - x = x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \dfrac{\mathrm{e}^X - 1}{X}$.

b. Quand $x \to +\infty$, $X \to 0$ et $\dfrac{\mathrm{e}^X - 1}{X} \to 1$ (nombre dérivé de $\exp$ en 0). Donc $g(x) - (x+1) \to 0$: **la courbe de g se rapproche de la droite d'équation $y = x + 1$** (asymptote oblique).

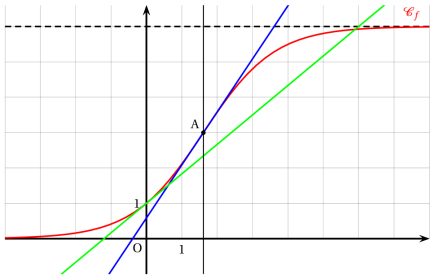


La méthode pas à pas est dans la fiche magique **« Limites de fonctions »** (Les fiches magiques terminale spé maths, page 24).

Exercice 15 BAC 2024 Une fonction logistique ●●○

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \dfrac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}}$.



1. On a $f(\ln 5) = \dfrac{6}{1+5\mathrm{e}^{-\ln 5}}$.

Or $\mathrm{e}^{-\ln 5} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 5}} = \dfrac{1}{5}$, donc $f(\ln 5) = \dfrac{6}{1 \quad 5 \quad \frac{1}{5}} = \dfrac{6}{2} = 3$. Donc A $(\ln 5 ; 3) \in \mathscr{C}_f$.

2. On sait que $= 0$, donc $^{-x} = 1$ et $(x) = 6$.

1. On a $f(\ln 5) = \dfrac{6}{1+5\mathrm{e}^{-\ln 5}}$.

   Or $\mathrm{e}^{-\ln 5} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 5}} = \dfrac{1}{5}$, donc $f(\ln 5) = \dfrac{6}{1+5\times\frac{1}{5}} = \dfrac{6}{2} = 3$. Donc A$(\ln 5\,;\,3) \in \mathcal{C}_f$.

2. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+5\mathrm{e}^{-x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 6$.

   Donc la droite d'équation $y = 6$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

3.

   a. Pour tout réel: $f'(x) = -6\times\dfrac{(1+5\mathrm{e}^{-x})'}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^2} = -\dfrac{6\times5\times(-1)\mathrm{e}^{-x}}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^2} = \dfrac{30\mathrm{e}^{-x}}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^2}$

   b. On sait que quel que soit $x\in\mathbb{R}$, $30\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $(1+5\mathrm{e}^{-x})^2 > 0$; donc $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$: la fonction f est croissante (strictement) sur $\mathbb{R}$..

   D'autre part $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+5\mathrm{e}^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

   Donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

   Enfin $f(0) = \dfrac{6}{1+5\times1} = \dfrac{6}{6} = 1$: d'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$\ln 5$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	0	↗	1	↗	3	↗	6

4.

   a. Comme $30\mathrm{e}^{-x} > 0$, $1+5\mathrm{e}^{-x} > 0$ et donc $(1+5\mathrm{e}^{-x})^3 > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $5\mathrm{e}^{-x}-1$:

   - b.

     $5\mathrm{e}^{-x}-1 = 0 \iff 5\mathrm{e}^{-x} = 1 \iff \mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{5} \Rightarrow -x = \ln\dfrac{1}{5} \iff -x = -\ln 5 \iff x = \ln 5$

     ;
   - c.$5\mathrm{e}^{-x}-1 > 0 \Rightarrow x > \ln 5$;
   - d.$5\mathrm{e}^{-x}-1 < 0 \Rightarrow x < \ln 5$.

   Conclusion : f est convexe sur l'intervalle $]-\infty\,;\,\ln 5[$, concave sur $]\ln 5\,;\,+\infty[$ et a en $\ln 5$ un point d'inflexion car la dérivée seconde change de signe en ce point: il s'agit du point A.

   e. Une équation de la tangente T_0 à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est :

   $M(x\,;\,y) \in T_0 \iff y - f(0) = f'(0)(x-0)$.

   On a vu que $f(0) = 1$ et $f'(0) = \dfrac{30\mathrm{e}^0}{(1+5\mathrm{e}^0)^2} = \dfrac{30}{36} = \dfrac{5}{6}$.

   Donc $M(x\,;\,y) \in T_0 \iff y-1 = \dfrac{5}{6}(x-0) \iff y = \dfrac{5}{6}x+1$.

   Or on a vu que sur l'intervalle $]-\infty\,;\,\ln 5[$, la fonction f est convexe et par conséquent que sa courbe représentative $\mathcal{C}$ est au dessus de toutes ses tangentes menées en un point de l'intervalle $]-\infty\,;\,\ln 5[$, donc en particulier au dessus de la tangente T_0 en $x = 0$, donc numériquement :

$$f(x) \geqslant \frac{5}{6}x + 1 \quad \text{sur }]-\infty\,;\,\ln 5[.$$

5. On considère une fonction F_k définie sur $\mathbb{R}$ par $F_k(x) = k\ln\left(\mathrm{e}^x + 5\right)$, où k est une constante réelle.

a. F_k est une fonction composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (car $\mathrm{e}^x + 5 > 0$), elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$: elle est une primitive de f si :

$$F_k'(x) = f(x) \iff k\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 5} = \frac{6}{1 + 5\mathrm{e}^{-x}},$$

soit en multipliant chaque terme de $F_k'(x)$ par e^{-x} :

$$k\frac{1}{1 + 5\mathrm{e}^{-x}} = \frac{6}{1 + 5\mathrm{e}^{-x}} \iff k = 6.$$

Donc $F_6(x) = 6\ln\left(\mathrm{e}^x + 5\right)$.

b. On a vu que $f(0) = 1 > 0$ et la fonction est croissante ; elle est donc positive sur l'intervalle $[0\,;\,\ln 5]$.

L'aire demandée $\mathcal{A}$ est donc égale (en unités d'aire) à :

$$\mathcal{A} = \int_0^{\ln 5} f(x)\,\mathrm{d}x = [F_6(x)]_0^{\ln 5} = F_6(\ln 5) - F_6(0) = 6\ln\left(\mathrm{e}^{\ln 5} + 5\right) - 6\ln\left(\mathrm{e}^0 + 5\right)$$
$$= 6\ln 10 - 6\ln 6 = 6[\ln 10 - \ln 6] = 6\ln\frac{10}{6} = 6\ln\frac{5}{3}.$$

Partie B

L'objectif de cette partie est d'étudier l'équation différentielle: $(E) \qquad y' = y - \frac{1}{6}y^2$.

1. On a

$$f(x) - \frac{1}{6}[f(x)]^2 = \frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{6} \times \frac{36}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^2}$$
$$= \frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}} - \frac{6}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{6\,(1+5\mathrm{e}^{-x}) - 6}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{30\mathrm{e}^{-x}}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^2} = f'(x)$$

Donc f est bien une solution de l'équation (E).

2.

- **3.** Les solutions de l'équation $y' = -y$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto K\mathrm{e}^{-x}$ avec $K \in \mathbb{R}$;
- **4.** La fonction constante $x \longmapsto \frac{1}{6}$ est la seule fonction constante solution de l'équation à résoudre ;
- **5.** Les fonctions solutions de l'équation différentielle proposée sont les fonctions définies par :

$$x \longmapsto \frac{1}{6} + K\mathrm{e}^{-x} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

6.

a. On a donc : $h'(x) = -h(x) + \frac{1}{6}$

Or si $h(x) = \frac{1}{g(x)}$, alors $h'(x) = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$.

L'équation précédente devient :

$-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2} = -\frac{1}{g(x)} + \frac{1}{6}$ soit en multipliant par $[g(x)]^2$

$-g'(x) = -g(x) + \frac{1}{6}[g(x)]^2 \iff g'(x) = g(x) - \frac{1}{6}[g(x)]^2$ ce qui signifie que la fonction g est une solution de l'équation différentielle $y' = y - \frac{1}{6}y^2$.

b.

$$g_m(x) = \frac{6}{1+6m\mathrm{e}^{-x}}.$$

Puisque m est positif, alors $6m\mathrm{e}^{-x}$ l'est aussi et $1 + m\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 > 0$, donc finalement $g_m(x) > 0$ quel que soit le réel x. La fonction h_m définie par $h_m(x) = \frac{1}{g_m(x)}$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

Or $h_m(x) = \frac{1}{g_m(x)} = \frac{1+6m\mathrm{e}^{-x}}{6} = \frac{1}{6} + m\mathrm{e}^{-x}$ et on reconnait une solution de l'équation différentielle de la question **2.**.

On a ensuite vu à la question **3. a.** que si la fonction h_m était une solution de $y' = -y + \frac{1}{6}$, alors g_m était elle solution de l'équation $y' = y - \frac{1}{6}y^2$.

Le sujet complet du bac 2024 (Métropole, Antilles-Guyane (septembre), jour 2) corrigé →

Exercice 16 BAC 2025 **Limites d'une fonction avec ln** ●●●

1. Par lecture graphique, il semble que :
   - **2.** la fonction f est strictement croissante sur son ensemble de définition ;
   - **3.** $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$, $\mathcal{C}_f$ semblant présenter une asymptote d'équation $x = 2$;
   - **4.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

5. Résolvons l'équation sur $]2\ ;\ +\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff x\ln(x-2) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou bien } \ln(x-2) = 0 \quad \text{d'après la règle du produit nul} \\ &\iff \ln(x-2) = 0 \quad \text{car } x > 2 \text{ donc } x \neq 0 \\ &\iff \exp\big(\ln(x-2)\big) = \exp(0) \quad \text{car exp est strictement croissante sur } \mathbb{R} \\ &\iff x - 2 = 1 \\ &\iff x = 3 \end{aligned}$$

   L'équation a une unique solution : $x = 3$.

6. On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} x - 2 = 0^+$ et donc, en posant $y = x - 2$, par composition, on en déduit :

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \ln(x-2) = \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \ln(y) = -\infty.$$

   Par ailleurs, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} x = 2$, donc, par limite du produit : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} [x \times \ln(x-2)] = -\infty$.

   Cela confirme à la fois la conjecture sur la limite en 2 (en effet, comme f n'est définie que sur $]2\ ;\ +\infty]$, la limite en 2 est la limite à droite en 2), et cela confirme aussi la conjecture sur l'asymptote d'équation $x = 2$, qui est l'interprétation graphique de cette limite.

7. Si $u : x \longmapsto x - 2$ alors $u' : x \longmapsto 1$.

   Ainsi $x \longmapsto \ln(x-2)$ est la composée $\ln \circ u$ et donc se dérive en :

$$x \longmapsto \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{x-2}.$$

   On dérive un produit de fonctions dérivables sur $]2\ ;\ +\infty[$.

   Pour tout réel strictement supérieur à 2, on a :

$$f'(x) = 1 \times \ln(x-2) + x \times \frac{1}{x-2} = \ln(x-2) + \frac{x}{x-2}.$$

   On arrive bien à l'expression annoncée pour $f'(x)$.

8. a. On a :

$$\begin{aligned} g'(x) = f''(x) &= \frac{1}{x-2} + \frac{1\times(x-2) - x\times 1}{(x-2)^2} \\ &= \frac{1}{(x-2)} + \frac{-2}{(x-2)^2} = \frac{x-2}{(x-2)^2} + \frac{-2}{(x-2)^2} \\ &= \frac{x-4}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

   On arrive bien à la forme demandée.

   b. $g'(x)$ est le quotient de $(x-4)$ par $(x-2)^2$.

Le dénominateur étant le carré d'un réel non nul, il est strictement positif, donc $g'(x)$ a le signe de $(x-4)$. On peut donc établir le tableau de variations suivant :

x	2		4		$+\infty$
signe de $x-4$	‖	$-$	0	$+$	
signe de $g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de g	‖ $+\infty$	↘	$2+\ln(2)$	↗	$+\infty$

On a : $g(4) = f'(4) = \ln(4-2) + \dfrac{4}{\quad} = \ln(2) + \dfrac{4}{2} = 2+\ln(2).$

On a : $g(4) = f'(4) = \ln(4-2) + \dfrac{4}{4-2} = \ln(2) + \dfrac{4}{2} = 2+\ln(2).$

c. En observant le tableau de variations précédent, on a :

$2 > 1 \implies \ln(2) > 0$ donc on a $g(4) \geqslant 2 > 0$.

Donc, les variations de g indiquent que g atteint un minimum égal à $g(4) > 0$, pour $x = 4$.

On en déduit que la fonction g est à valeurs strictement positives sur $]2\ ;\ +\infty[$.

d. Puisque g est la fonction dérivée f', on en déduit que f' est à valeurs strictement positives sur $]2\ ;\ +\infty[$, et donc que f est strictement croissante sur $]2\ ;\ +\infty[$.

9. On a établi les variations de $g = f'$ à la question **5. b.** :

- **10.**sur $]2\ ;\ 4]$, f' est décroissante, donc f est concave;
- **11.**sur $[4\ ;\ +\infty[$, f' est croissante, donc f est convexe.

f change de convexité en $x = 4$, donc le point de coordonnées $(4\ ;\ f(4))$, est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

On a $f(4) = 4 \times \ln(4-2) = 4\ln(2) = \ln\left(2^4\right) = \ln(16)$.

Les coordonnées exactes du point d'inflexion sont donc $(4\ ;\ \ln(16))$.

12. $\mathcal{C}_f$ admet une tangente de coefficient directeur égal à 3 au point d'abscisse x si et seulement si $f'(x) = 3$, ou encore $g(x) = 3$.

On a $g(4) = 2+\ln(2) \approx 2{,}7$. On a donc :

- **13.**Sur $]2\ ;\ 4]$, g est strictement décroissante, et continue (car dérivable), et 3 est une valeur strictement comprise entre $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = +\infty$ et $g(4) = 2+\ln(2) \approx 2{,}7$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, il existe une unique solution à l'équation $g(x) = 3$ dans l'intervalle $]2\ ;\ 4]$, notée α;
- **14.**De façon analogue, sur $]4\ ;\ +\infty[$, g est strictement croissante, et continue (car dérivable), et 3 est une valeur strictement comprise entre $\lim\limits_{x\to 4} g(x) \approx 2{,}7$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$. Il existe aussi une unique solution à l'équation $g(x) = 3$ dans l'intervalle $]4\ ;\ +\infty[$, notée β ;

Ainsi, l'équation $f'(x) = 3$ équivalente à $g(x) = 3$ admet exactement deux solutions α et β sur $]2\ ;\ +\infty[$.

Il y a donc exactement deux valeurs de x (α et β) pour lesquelles la tangente à $\mathcal{C}_f$ a un coefficient directeur égal à 3.

Le sujet complet du bac 2025 (Polynésie, jour 2) corrigé →



La méthode pas à pas est dans la fiche magique **« Limites de fonctions »** (Les fiches magiques terminale spé maths, page 24).

LES FICHES MAGIQUES TERMINALE SPÉ MATHS

Révise toute la terminale spé maths avec les fiches magiques



- **41 fiches claires et illustrées** : tout le programme de spécialité maths de terminale, une notion par page.
- **Des vidéos méthode** accessibles par QR code sur les fiches.
- **Des exercices corrigés** après chaque fiche pour vérifier que tout est acquis.

campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

ANNALES BAC MATHS TERMINALE 2027

Prépare le bac avec les vrais sujets



- **75 sujets types** tirés des vrais sujets du bac, classés par chapitre.
- **3 bacs blancs complets** pour s'entraîner en conditions réelles.
- Des **corrigés avec la rédaction attendue**, des conseils et un aide-mémoire.

campusxyz.fr/produit/annales-bac-2027-terminale-spe-maths