Exercice 1 — Limites et opérations ●○○

Détermine la limite de chaque suite, définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

a. $u_n = 3n^2 + 2n - 1$

b. $v_n = 5 - \dfrac{2}{n}$

c. $w_n = \left(2 + \dfrac{1}{n}\right)(n + 3)$

d. $t_n = 1 - 4\sqrt{n}$

Exercice 2 — Limites de suites géométriques ●○○

Détermine la limite de chaque suite, définie pour tout entier naturel n.

a. $u_n = 2 \times 1{,}5^n$

b. $v_n = 7 \times 0{,}8^n$

c. $w_n = 4 - 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

d. $t_n = 1 - 2 \times 3^n$

Exercice 3 — Quotients de polynômes ●○○

Chaque limite donne une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Lève-la en factorisant par le terme de plus haut degré, puis conclus.

a. $u_n = \dfrac{3n^2 + 1}{n^2 + 5}$ **b.** $v_n = \dfrac{2n + 7}{n^2 + 1}$ **c.** $w_n = \dfrac{n^3 - 2n}{4n^2 + 1}$

Exercice 4 — La forme indéterminée ∞ − ∞ ●○○

Détermine la limite de chaque suite, définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

a. $u_n = n^2 - 5n$ **b.** $v_n = 2n - n^3$ **c.** $w_n = \sqrt{n} - n$

Exercice 5 — Quotients de puissances ●●○

Détermine la limite de chaque suite, définie pour tout entier naturel n.

a. $u_n = \dfrac{2^n + 5}{3^n}$ **b.** $v_n = \dfrac{4^n - 1}{4^n + 1}$

Exercice 6 — Le théorème des gendarmes ●●○

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose :

a. $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$ **b.** $v_n = \dfrac{2 + (-1)^n}{n + 1}$ **c.** $w_n = \dfrac{3n + \cos n}{n}$

Encadre chaque suite par deux suites qui ont la même limite, puis conclus.

Exercice 7 — Le théorème de comparaison ●●○

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = n + \sin n$ et $v_n = 3\cos n - n^2$.

a. Montre que $u_n \geqslant n - 1$ pour tout n, puis déduis-en la limite de (u_n).

b. Majore v_n par une suite qui tend vers $-\infty$ et conclus.

Exercice 8 — Limite d'une somme géométrique ●●○

Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{3^n}$ et $T_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$.

a. Montre que $S_n = \dfrac{3}{2}\left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$, puis détermine la limite de (S_n).

b. Exprime T_n en fonction de n et détermine sa limite.

Exercice 9 — Une suite auxiliaire géométrique ●●○

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 3$. On pose $v_n = u_n - 6$.

a. Montre que (v_n) est une suite géométrique dont tu donneras la raison et le premier terme.

b. Exprime v_n, puis u_n, en fonction de n.

c. Détermine la limite de la suite (u_n).

Exercice 10 — Un seuil avec Python ●●○

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2 \times 1{,}1^n$.

a. Détermine la limite de (u_n).

b. Complète la fonction pour qu'elle renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > 100$.

```
def seuil():
    n = 0
    u = 2
    while ........ :
        u = ........
        n = n + 1
    return n
```

c. À l'aide de la calculatrice, détermine la valeur renvoyée par la fonction.

Exercice 11 Avec la quantité conjuguée ●●●

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ et $v_n = \sqrt{n^2+n} - n$.

a. Pourquoi ne peut-on pas conclure directement ?

b. Montre que $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ et déduis-en la limite de (u_n).

c. Montre que $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}$ et déduis-en la limite de (v_n).

Exercice 12 — Encadrer pour trouver la limite ●●●

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{2n + 1}$.

a. Calcule u_0, u_1, u_2 et u_3.

b. Montre que, pour tout n, $\dfrac{n-1}{2n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n+1}{2n+1}$.

c. Déduis-en la limite de (u_n).

Exercice 13 — Une somme qui tend vers 1 ●●●

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n}$ (somme de n termes).

a. Calcule u_1 et u_2.

b. Justifie que, pour tout entier k compris entre 1 et n : $\dfrac{n}{n^2+n} \leqslant \dfrac{n}{n^2+k} \leqslant \dfrac{n}{n^2+1}$.

c. Déduis-en que $\dfrac{n^2}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n^2}{n^2+1}$, puis la limite de (u_n).

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE **Une suite homographique** ●●●

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{u_n + 3}$. On admet que $u_n > 0$ pour tout n.

1. Calcule u_1 et u_2.
2. On pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$. Montre que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$ et précise v_0.
3. Exprime v_n en fonction de n, puis montre que $u_n = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n}$.
4. Détermine la limite de la suite (u_n).
5. Justifie que la suite (u_n) est décroissante.
6. Complète la fonction pour qu'elle renvoie le plus petit n tel que $u_n < 1{,}01$, puis donne cette valeur à l'aide de la calculatrice.

```
def rang():
    u = 2
    n = 0
    while ........ :
        u = ........
        n = n + 1
    return n
```

Exercice 15 TYPE CONTRÔLE **Une somme qui tend vers l'infini** ●●●

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

1. Calcule u_1, puis des valeurs approchées de u_2 et u_3 à 10^{-3} près.
2. Étudie le sens de variation de la suite (u_n).
3. Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n$. Montre que $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
4. Déduis-en que $u_n \geqslant \sqrt{n}$ pour tout $n \geqslant 1$, puis la limite de (u_n).
5. On cherche le plus petit entier n tel que $u_n > 10$.
   a. Justifie sans calcul que cet entier est inférieur ou égal à 100.
   b. Écris une fonction Python qui renvoie cet entier. Elle renvoie 33 : interprète ce résultat.

Exercice 16 BAC 2025 Une suite arithmético-géométrique ●●○

Bac spé maths 2025, Asie, jour 2, exercice 2

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 30$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 10$.

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.
2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
3. Exprimer v_n en fonction de n pour tout n entier naturel.
4. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 20 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n). Justifier la réponse.

Partie B

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} w_0 = 45 \\ w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{2}u_n + 7 \end{cases}$$

1. Montrer que $w_1 = 44{,}5$.

On souhaite écrire une fonction suite, en langage Python, qui renvoie la valeur du terme w_n pour une valeur de n donnée. On donne ci-dessous une proposition pour cette fonction suite.

```
def suite(n):
    U=30
    W=45
for i in range (1,n+1):
    U=U/2+10
    W=W/2+U/2+7
return W
```

1. L'exécution de suite(1) ne renvoie pas le terme w_1. Comment modifier la fonction suite afin que l'exécution de suite(n) renvoie la valeur du terme w_n ?

2.

   a. Montrer, par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n on a :

   $$w_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$$

   b. On admet que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, on a : $0 \leqslant 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{10}{n}$.

   Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (w_n) ?

Exercice 17 BAC 2025 Une suite homographique et sa limite ●●●

Bac spé maths 2025, Amérique du Nord, jour 1, exercice 2

On considère la suite numérique (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Calculer le terme u_1.
2. On définit la suite (a_n) pour tout entier naturel n, par :

   $$a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$$

   On admet que la suite (a_n) est bien définie.

   a. Calculer a_0 et a_1.

   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

   $$a_n \geqslant 3n - 1$$

   d. En déduire la limite de la suite (a_n).
3. On souhaite étudier la limite de la suite (u_n).

   a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{a_n}{a_n - 1}$.

   b. En déduire la limite de la suite (u_n).
4. On admet que la suite (u_n) est décroissante.

   On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
def algo(p):
    u=2
    n=0
    while u-1>p:
        u=(2*u+1)/(u+2)
        n=n+1
    return (n,u)
```

   a. Interpréter les valeurs `n` et `u` renvoyées par l'appel de la fonction `algo(p)` dans le contexte de l'exercice.

   b. Donner, sans justifier, la valeur de n pour $p = 0{,}001$.



LA FICHE MAGIQUE QUI VA AVEC

« Limites de suites »

Limites de référence, opérations et formes indéterminées réunies sur une seule fiche.

Les fiches magiques terminale spé maths : campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

CAMPUS XYZ

Corrigés

Exercices sur les limites de suites en terminale spé maths

Exercices sur les limites de suites en terminale spé maths : corrigés

CAMPUS XYZ

Exercice 1 — Limites et opérations ●○○

On part des limites de référence : n, n^2 et $\sqrt{n}$ tendent vers $+\infty$, et $\dfrac{1}{n}$ tend vers 0.

a. $\lim 3n^2 = +\infty$ et $\lim(2n-1) = +\infty$: par somme, $\lim u_n = +\infty$.

b. $\lim \dfrac{2}{n} = 0$, donc $\lim v_n = 5$.

c. $\lim \left(2 + \dfrac{1}{n}\right) = 2$ et $\lim(n+3) = +\infty$: par produit (avec $2 > 0$), $\lim w_n = +\infty$.

d. $\lim \sqrt{n} = +\infty$, donc $\lim \left(-4\sqrt{n}\right) = -\infty$ et, par somme, $\lim t_n = -\infty$.

Exercice 2 — Limites de suites géométriques ●○○

Si $q > 1$, $\lim q^n = +\infty$; si $-1 < q < 1$, $\lim q^n = 0$.

a. $1{,}5 > 1$, donc $\lim 1{,}5^n = +\infty$ et, comme $2 > 0$, $\lim u_n = +\infty$.

b. $-1 < 0{,}8 < 1$, donc $\lim 0{,}8^n = 0$ et $\lim v_n = 0$.

c. $\lim \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, donc $\lim 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim w_n = 4$.

d. $\lim 3^n = +\infty$, donc $\lim \left(-2 \times 3^n\right) = -\infty$ et $\lim t_n = -\infty$.

Exercice 3 — Quotients de polynômes ●○○

a. Pour $n \geqslant 1$: $u_n = \dfrac{n^2\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{5}{n^2}\right)} = \dfrac{3+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{5}{n^2}}$. Le numérateur tend vers 3, le dénominateur vers 1 : $\lim u_n = 3$.

b. $v_n = \dfrac{n\left(2+\frac{7}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{2+\frac{7}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}$. Le premier facteur tend vers 0, le second vers 2 : $\lim v_n = 0$.

c. $w_n = \dfrac{n^3\left(1-\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(4+\frac{1}{n^2}\right)} = n \times \dfrac{1-\frac{2}{n^2}}{4+\frac{1}{n^2}}$. $n \to +\infty$ et le quotient tend vers $\dfrac{1}{4} > 0$: $\lim w_n = +\infty$.

> Pour un quotient de polynômes, la limite est celle du quotient des termes de plus haut degré : $\dfrac{3n^2}{n^2}, \dfrac{2n}{n^2}, \dfrac{n^3}{4n^2}$.

Exercice 4 — La forme indéterminée ∞ − ∞ ●○○

Chaque fois, on obtient « $+\infty - \infty$ » : on factorise par le terme qui l'emporte.

a. $u_n = n^2\left(1-\dfrac{5}{n}\right)$: $n^2 \to +\infty$ et $1-\dfrac{5}{n} \to 1$, donc $\lim u_n = +\infty$.

b. $v_n = n^3\left(\dfrac{2}{n^2}-1\right)$: $n^3 \to +\infty$ et $\dfrac{2}{n^2}-1 \to -1$, donc $\lim v_n = -\infty$.

c. $w_n = \sqrt{n}\,(1-\sqrt{n})$: $\sqrt{n} \to +\infty$ et $1-\sqrt{n} \to -\infty$, donc $\lim w_n = -\infty$.

Exercice 5 — Quotients de puissances ●●○

a. On sépare : $u_n = \dfrac{2^n}{3^n} + \dfrac{5}{3^n} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 5 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

$\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{1}{3}$ sont entre -1 et 1, donc les deux termes tendent vers 0 : $\lim u_n = 0$.

b. On divise le numérateur et le dénominateur par 4^n : $v_n = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n}$.

$\lim \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$, donc $\lim v_n = \dfrac{1}{1} = 1$.

> Avec des puissances, on factorise par la puissance de plus grande base.

Exercice 6 — Le théorème des gendarmes ●●○

a. $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$ et $n > 0$, donc $-\dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$. Les deux suites qui encadrent tendent vers 0 : d'après le théorème des gendarmes, $\lim u_n = 0$.

b. $(-1)^n$ vaut 1 ou -1, donc $1 \leqslant 2 + (-1)^n \leqslant 3$ et $\dfrac{1}{n+1} \leqslant v_n \leqslant \dfrac{3}{n+1}$. Les deux bornes tendent vers 0 : $\lim v_n = 0$.

c. $w_n = 3 + \dfrac{\cos n}{n}$ et $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\cos n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$, donc $3 - \dfrac{1}{n} \leqslant w_n \leqslant 3 + \dfrac{1}{n}$. Les deux bornes tendent vers 3 : $\lim w_n = 3$.

Exercice 7 — Le théorème de comparaison ●●○

a. $\sin n \geqslant -1$, donc $u_n \geqslant n - 1$. Or $\lim(n-1) = +\infty$: par comparaison, $\lim u_n = +\infty$.

b. $\cos n \leqslant 1$, donc $v_n \leqslant 3 - n^2$. Or $\lim\left(3 - n^2\right) = -\infty$: par comparaison, $\lim v_n = -\infty$.

> Pour aller vers $+\infty$, il faut **minorer** la suite ; pour aller vers $-\infty$, il faut la **majorer**.

Exercice 8 — Limite d'une somme géométrique ●●○

Pour $q \neq 1$: $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

a. Avec $q = \dfrac{1}{3}$: $S_n = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{2}\left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$.

$\lim \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$, donc $\lim S_n = \dfrac{3}{2}$.

b. Avec $q = 2$: $T_n = \dfrac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1$. Comme $\lim 2^{n+1} = +\infty$, $\lim T_n = +\infty$.

Exercice 9 — Une suite auxiliaire géométrique ●●○

a.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 6 = 0{,}5\,u_n + 3 - 6 \\ &= 0{,}5\,u_n - 3 = 0{,}5\,(u_n - 6) \\ &= 0{,}5\,v_n \end{aligned}$$

(v_n) **est géométrique de raison** $0{,}5$ et de premier terme $v_0 = 8 - 6 = 2$.

b. $v_n = 2 \times 0{,}5^n$, donc $u_n = v_n + 6 = 6 + 2 \times 0{,}5^n$.

c. $-1 < 0{,}5 < 1$, donc $\lim 0{,}5^n = 0$ et $\lim u_n = 6$.

> Le 6 n'est pas tiré au hasard : c'est la solution de $\ell = 0{,}5\,\ell + 3$, la valeur qui ne bouge pas.

Exercice 10 — Un seuil avec Python ●●○

a. $1{,}1 > 1$, donc $\lim 1{,}1^n = +\infty$ et $\lim u_n = +\infty$. La question b. a donc bien une réponse.

b. On continue tant que la suite n'a pas dépassé 100 ; chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par $1{,}1$:

```
while u <= 100 :
    u = 1.1*u
```

c. $u_{41} = 2 \times 1{,}1^{41} \approx 99{,}6$ et $u_{42} = 2 \times 1{,}1^{42} \approx 109{,}5$. **La fonction renvoie** 42.

Exercice 11 — Avec la quantité conjuguée ●●●

a. Les deux termes tendent vers $+\infty$: c'est la forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ».

b. On multiplie et on divise par la quantité conjuguée $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$:

$$u_n = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$= \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Le dénominateur tend vers $+\infty$: $\lim u_n = 0$.

c. De même : $v_n = \dfrac{(n^2+n)-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$.

Pour $n \geqslant 1$, $\sqrt{n^2+n} = \sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} = n\sqrt{1+\frac{1}{n}}$, donc

$$v_n = \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

$\sqrt{1+\frac{1}{n}} \to 1$, donc $\lim v_n = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 12 — Encadrer pour trouver la limite ●●●

a. $u_0 = 1\,;\, u_1 = 0\,;\, u_2 = \dfrac{3}{5}\,;\, u_3 = \dfrac{2}{7}$.

b. $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, donc $n-1 \leqslant n+(-1)^n \leqslant n+1$. On divise par $2n+1>0$, qui ne change pas le sens des inégalités.

c. $\dfrac{n-1}{2n+1} = \dfrac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} \to \dfrac{1}{2}$ et de même $\dfrac{n+1}{2n+1} \to \dfrac{1}{2}$. D'après le théorème des gendarmes,

$\lim u_n = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 13 Une somme qui tend vers 1 ●●●

a. $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $u_2 = \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{6} = \dfrac{12+10}{30} = \dfrac{11}{15}$.

b. $1 \leqslant k \leqslant n$ donne $n^2 + 1 \leqslant n^2 + k \leqslant n^2 + n$. Ces nombres sont positifs : en passant à l'inverse, l'ordre s'inverse, puis on multiplie par $n > 0$.

c. On additionne les n encadrements : $n \times \dfrac{n}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant n \times \dfrac{n}{n^2+1}$, c'est le résultat.

$\dfrac{n^2}{n^2+n} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1$ et $\dfrac{n^2}{n^2+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \to 1$: par les gendarmes, $\lim u_n = 1$.

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE Une suite homographique ●●●

1. $u_1 = \dfrac{8}{5} = 1{,}6$ et $u_2 = \dfrac{4 \times 1{,}6}{4{,}6} = \dfrac{32}{23} \approx 1{,}39$. $u_1 = 1{,}6$ **et** $u_2 = \dfrac{32}{23}$.

2. On remplace u_{n+1} par son expression :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}} = \frac{\frac{4u_n}{u_n+3} - 1}{\frac{4u_n}{u_n+3}} \\ &= \frac{4u_n - (u_n + 3)}{4u_n} = \frac{3u_n - 3}{4u_n} \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{u_n - 1}{u_n} = \frac{3}{4}\, v_n \end{aligned}$$

(v_n) **est géométrique de raison** $\dfrac{3}{4}$, de premier terme $v_0 = \dfrac{2-1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

3. $v_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$. De $v_n = 1 - \dfrac{1}{u_n}$, on tire $\dfrac{1}{u_n} = 1 - v_n$, donc $u_n = \dfrac{1}{1 - v_n} = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n}$.

4. $\lim \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$, donc le dénominateur tend vers 1 et $\lim u_n = 1$.

5. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ diminue quand n augmente, donc $1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ augmente ; ce dénominateur est positif, donc son inverse diminue : (u_n) **est décroissante**.

6. On continue tant que $u_n \geqslant 1{,}01$:

```
while u >= 1.01 :
    u = 4*u/(u+3)
```

À la calculatrice, $u_{13} \approx 1{,}012$ et $u_{14} \approx 1{,}009$: **la fonction renvoie** 14.

Exercice 15 TYPE CONTRÔLE Une somme qui tend vers l'infini ●●●

1. $u_1 = 1\,;\, u_2 = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 1{,}707\,;\, u_3 \approx 1{,}707 + 0{,}577 = 2{,}284.$

2. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} > 0$: **la suite est strictement croissante**.

3. $k \leqslant n$ donne $\sqrt{k} \leqslant \sqrt{n}$ (la racine est croissante), puis $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (l'inverse change l'ordre des nombres positifs).

4. Chacun des n termes de la somme est supérieur ou égal à $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, donc $u_n \geqslant n \times \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$.

   $\lim \sqrt{n} = +\infty$: par comparaison, $\lim u_n = +\infty$.

5.

   a. $u_{100} \geqslant \sqrt{100} = 10$, et l'inégalité est stricte car les termes $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ avec $k < 100$ sont strictement plus grands que $\dfrac{1}{10}$. Donc $u_{100} > 10$ et **l'entier cherché est au plus** 100.

   b.

```
from math import sqrt
def rang():
    n = 1
    u = 1
    while u <= 10 :
        n = n + 1
        u = u + 1/sqrt(n)
    return n
```

   $u_{32} \leqslant 10$ **et** $u_{33} > 10$: il faut additionner 33 termes pour dépasser 10.

> La minoration $u_n \geqslant \sqrt{n}$ suffit pour la limite, mais elle est grossière : $u_{33} \approx 10{,}1$ alors que $\sqrt{33} \approx 5{,}7$.



La méthode pas à pas est dans la fiche magique **« Limites de suites »** (Les fiches magiques terminale spé maths, page 14).

Exercice 16 BAC 2025 Une suite arithmético-géométrique ●●○

Partie A

1. $u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 10 = \frac{1}{2} \times 30 + 10 = 15 + 10 = 25$ et

   $u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 10 = \frac{1}{2} \times 25 + 10 = 12{,}5 + 10 = 22{,}5.$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$v_{n+1} = u_{n+1} - 20 = \left(\frac{1}{2}u_n + 10\right) - 20 = \frac{1}{2}u_n - 10 = \frac{1}{2}(u_n - 20) = \frac{1}{2}v_n.$$

   La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme

   $v_0 = u_0 - 20 = 30 - 20 = 10.$

3. Pour tout entier n, $v_n = v_0 \times q^n = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

4. Pour tout entier n, $u_n = v_n + 20 = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 20 = 20 + 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (q^n , avec $0 < q < 1$) donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 20$

Partie B

1. $w_1 = \frac{1}{2} \times u_0 + \frac{1}{2} \times 30 + 7 = \frac{1}{2} \times 45 + 15 + 7 = 22{,}5 + 22 = 44{,}5$

2. La fonction Python donnée ne calcule pas correctement w_1 car elle calcule u_1 avant de calculer w_1 il faut modifier l'ordre des opérations :

```
def suite(n):
    U = 30
    W = 45
    for i in range(1, n+1):
        W = W/2 + U/2 + 7
        U = U/2 + 10
    return W
```

3. (a)

Initialisation : Pour $n = 0$, $w_0 = 45$ et

$$10 \times 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 34 = 11 + 34 = 45$$

donc l'égalité est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $w_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$.

Alors

$$w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{2}u_n + 7 = \frac{1}{2}\left[10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34\right] + \frac{1}{2}\left[20 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] + 7$$

donc $w_{n+1} = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 17 + 10 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 7 =$

$$10(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 34$$

donc l'égalité est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion: l'égalité est vraie pour $n = 0$ et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n + 1$ donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

Pour tout entier naturel n, $w_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$. (b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{10}{n} = 0$ et pour tout entier $n \geqslant 4$, $0 \leqslant 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{10}{n}$ donc d'après le théorème d'encadrement

$\lim\limits_{n\to+\infty} 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

de plus $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (q^n avec $0 < q < 1$ donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 34$

Le sujet complet du bac 2025 (Asie, jour 2) corrigé →

Exercice 17 BAC 2025 Une suite homographique et sa limite ●●●

Pour cet exercice, on admet que les deux suites (a_n) et (u_n) sont bien définies, ce qui équivaut à admettre que les termes de la suite (u_n) sont tous différents de -2 (pour que la suite (u_n) soit bien définie) et de 1 (pour que (a_n) soit bien définie).

1. On a : $u_1 = \dfrac{2u_0+1}{u_0+2} = \dfrac{2\times 2+1}{2+2} = \dfrac{5}{4} = 1{,}25.$

2.

a. On a : $a_0 = \dfrac{u_0}{u_0-1} = \dfrac{2}{2-1} = 2$

et $a_1 = \dfrac{u_1}{u_1-1} = \dfrac{1,25}{1,25-1} = \dfrac{1,25}{0,25} = 5.$

b. Soit n un entier naturel.

$$a_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1} = \frac{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}-1} = \frac{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}-\dfrac{u_n+2}{u_n+2}}$$

On a, d'une part :

$$= \frac{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}}{\dfrac{2u_n+1-u_n-2}{u_n+2}} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}\times\frac{u_n+2}{u_n-1}$$
$$= \frac{2u_n+1}{u_n-1}$$

et, d'autre part :

$$3a_n - 1 = 3\times\frac{u_n}{u_n-1} - 1 = \frac{3u_n}{u_n-1} - \frac{u_n-1}{u_n-1} = \frac{3u_n-(u_n-1)}{u_n-1}$$
$$= \frac{2u_n+1}{u_n-1}$$

On constate donc bien que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

Autre méthode :

Soit n un entier naturel.

$$a_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1} = \frac{u_{n+1}-1+1}{u_{n+1}-1} = 1 + \frac{1}{u_{n+1}-1}$$
$$= 1 + \frac{1}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2} - \dfrac{u_n+2}{u_n+2}} = 1 + \frac{1}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}}$$
$$= 2 + \frac{u_n+2}{u_n-1} - 1$$
$$= \frac{2(u_n-1)+u_n+2}{u_n-1} - 1 = \frac{2u_n-2+u_n+2}{u_n-1} - 1$$
$$= \frac{3u_n}{u_n-1} - 1$$
$$= 3a_n - 1$$

c. Posons, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, l'affirmation P_n :

« $a_n \geqslant 3n-1$ ».

Initialisation : On a calculé $a_1 = 5$ et donc on a bien $5 \geqslant 3 \times 1 - 1 = 2$.

L'affirmation P_1 est donc vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul. On suppose que l'affirmation P_n est vraie, c'est-à-dire que $a_n \geqslant 3n-1$.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned}
a_n \geqslant 3n-1 &\implies 3a_n \geqslant 3(3n-1) \quad \text{car } 3>0 \\
&\implies 3a_n - 1 \geqslant 9n-3-1 \\
&\implies a_{n+1} \geqslant 9n-4 \quad \text{d'après la question } \mathbf{2.b.}\ 3an-1 = a_{n+1} \\
&\implies a_{n+1} \geqslant 3n+6n+3-7 \\
&\implies a_{n+1} \geqslant 3(n+1)+6k-7 \\
&\implies a_{n+1} \geqslant 3(n+1)-1+6n-6 \\
&\implies a_{n+1} \geqslant 3(n+1)-1+6(n-1) \\
&\implies a_{n+1} \geqslant 3(n+1)-1 \quad \text{car } 6(n-1) \geqslant 0
\end{aligned}$$

Si, pour un entier n naturel non nul (ce qui garantit $(n-1) \geqslant 0$), P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie également.

Conclusion : L'affirmation P_1 est vraie, et, pour tout entier naturel non nul n, la véracité de l'affirmation est héréditaire : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier naturel non nul n, on a : $a_n \geqslant 3n-1$.

d. Comme $3>0$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n-1 = +\infty$.

Par comparaison, puisque pour tout n non nul, on a $a_n \geqslant 3n-1$, on en déduit que la suite (a_n) diverge vers $+\infty$.

3.

a. Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
a_n = \frac{u_n}{u_n-1} &\iff a_n \times (u_n-1) = u_n \quad \text{car } u_n - 1 \neq 0 \\
&\iff a_n \times u_n - a_n - u_n = 0 \\
&\iff (a_n-1) \times u_n - a_n = 0 \\
&\iff (a_n-1) \times u_n = a_n \\
&\iff u_n = \frac{a_n}{a_n-1}
\end{aligned}$$

Pour la dernière étape, la division par $a_n - 1$ est légitime, puisque a_n est un quotient de deux nombres différents, car le dénominateur est égal au numérateur moins 1, donc a_n ne peut pas être égal à 1, donc $a_n - 1$ est non nul.

Ainsi, on a bien exprimé u_n en fonction de a_n avec la relation annoncée dans le question.

b. Avec les questions **2. a.** on a $a_0 = 2$ et avec **2. c.**, pour n naturel non nul, on a $a_n \geqslant 3n - 1 > 0$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, a_n est non nul.

On déduit donc de la question précédente que, pour tout n naturel, on a :

$$u_n = \frac{a_n}{a_n - 1} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{a_n}}.$$

Enfin, puisque (a_n) diverge vers $+\infty$, par limite du quotient, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$,

puis, par limite de la somme $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{a_n} = 1$,

enfin, par limite du quotient : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{a_n}} = 1$.

La suite (u_n) converge donc vers 1.

4. Puisqu'on admet que la suite (u_n) est décroissante, cela signifie que la suite est minorée par sa limite et donc que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant 1$ donc $u_n - 1 \geqslant 0$.

a. Cette fonction python initialise la variable `u` à 2, ce qui est la valeur de u_0 et la variable `n` à 0, ce qui est l'indice correspondant.

Puis, à chaque exécution de la boucle `while`, `u` se voit affecter le terme suivant dans la suite (u_n) et `n` se voit affecter l'entier suivant, donc l'indice correspondant au terme dont la valeur est stockée dans la variable `u`.

Cette boucle `while` tourne tant que l'écart entre le terme stocké dans la variable `u` et la limite 1 est strictement supérieur à la valeur `p`, qui est l'argument choisi pour invoquer la fonction.

Les valeurs `n` et `u` renvoyées par l'appel de la fonction `algo(p)` correspondent donc respectivement à l'indice et à la valeur du premier terme de la suite pour lequel l'écart entre le terme et la limite de la suite est inférieur ou égal à la valeur `p` choisie.

b. On parcourt la suite à la calculatrice, et on constate que $u_5 \approx 1{,}0027$, donc $u_5 - 1 > 0{,}001$ et $u_6 \approx 1{,}0009$, donc $u_6 - 1 \leqslant 0{,}001$.

La valeur de n pour $p = 0{,}001$ est donc 6 (et la valeur renvoyée pour `u` est donc une valeur approchée de u_6).

On peut aussi programmer la fonction python sur la calculatrice et faire l'appel `algo(0.001)`, qui renvoie `(6, 1.000914913083257)`

Le sujet complet du bac 2025 (Amérique du Nord, jour 1) corrigé →



La méthode pas à pas est dans la fiche magique **« Limites de suites »** (Les fiches magiques terminale spé maths, page 14).

LES FICHES MAGIQUES TERMINALE SPÉ MATHS

Révise toute la terminale spé maths avec les fiches magiques



- **41 fiches claires et illustrées** : tout le programme de spécialité maths de terminale, une notion par page.
- **Des vidéos méthode** accessibles par QR code sur les fiches.
- **Des exercices corrigés** après chaque fiche pour vérifier que tout est acquis.

campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

ANNALES BAC MATHS TERMINALE 2027

Prépare le bac avec les vrais sujets



- **75 sujets types** tirés des vrais sujets du bac, classés par chapitre.
- **3 bacs blancs complets** pour s'entraîner en conditions réelles.
- Des **corrigés avec la rédaction attendue**, des conseils et un aide-mémoire.

campusxyz.fr/produit/annales-bac-2027-terminale-spe-maths