Exercice 1 Valeurs à connaître ●○○

Simplifie chaque nombre.

a. $\ln\left(e^3\right)$

b. $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$

c. $e^{\ln 7}$

d. $\ln\sqrt{e}$

e. $e^{2\ln 3}$

f. $\ln\left(e^2\right) - \ln\left(e^{-1}\right)$

Exercice 2 Écrire en fonction de ln 2 ●○○

Écris chaque nombre sous la forme $a\ln 2 + b$, avec a et b entiers ou rationnels.

a. $\ln 8$

b. $\ln\left(\frac{1}{4}\right)$

c. $\ln 32 - \ln 2$

d. $\ln\sqrt{2}$

e. $\ln 12 - \ln 3$

f. $\ln(16\,e)$

Exercice 3 Équations simples ●○○

Résous chaque équation, après avoir précisé les valeurs de x pour lesquelles elle a un sens.

a. $\ln x = 2$ **b.** $\ln x = -1$ **c.** $\mathrm{e}^x = 5$

d. $\ln(2x - 1) = 0$ **e.** $\mathrm{e}^{3x+1} = 4$

Exercice 4 Inéquations simples ●○○

Résous chaque inéquation, en commençant par l'ensemble des x pour lesquels elle a un sens.

a. $\ln x > 3$ **b.** $\ln(x - 2) \leqslant 0$

c. $\mathrm{e}^x < 2$ **d.** $3 - 2\ln x \geqslant 0$

Exercice 5 — Dériver avec ln ●●○

Calcule la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle donné.

a. $f(x) = x \ln x$ sur $]0\,;+\infty[$

b. $g(x) = \ln\left(x^2+1\right)$ sur $\mathbb{R}$

c. $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$

d. $k(x) = \ln(3x-2)$ sur $\left]\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$

Exercice 6 — Limites et croissances comparées ●●○

Détermine chaque limite.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(x^2+3x+5\right)$

b. $\lim\limits_{x\to0^+} \left((\ln x)^2 - 3\ln x\right)$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - x)$

e. $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x$

Exercice 7 Équations avec des sommes de ln ●●○

Résous chaque équation après avoir déterminé l'ensemble sur lequel elle a un sens.

a. $\ln(x+3)+\ln(x-1)=\ln 5$

b. $2\ln x=\ln(4x-3)$

Exercice 8 Poser X = ln x ou X = e^x ●●○

Résous chaque équation à l'aide d'un changement de variable.

a. $(\ln x)^2-3\ln x+2=0$ sur $]0\,;+\infty[$

b. $e^{2x}-4e^x+3=0$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 9 La voiture qui perd de la valeur ●●○

Une voiture achetée $20\,000$ € perd $15\,\%$ de sa valeur chaque année. On note V_n sa valeur, en euro, au bout de n années.

a. Exprime V_n en fonction de n.

b. À l'aide du logarithme, détermine au bout de combien d'années la voiture vaudra moins de $8\,000$ €.

Exercice 10 Variations d'une fonction avec ln ●●○

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x - 2\ln x$.

a. Détermine les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Montre que $f'(x) = \dfrac{x-2}{x}$ et dresse le tableau de variations de f.

c. Déduis-en que $x > 2\ln x$ pour tout $x > 0$.

Exercice 11 La courbe de ln(x)/x ●●●

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, de courbe $\mathscr{C}$.

a. Détermine les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}$?

b. Étudie les variations de f et donne son maximum.

c. Donne une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

Exercice 12 — Comparer ln x et x – 1 ●●●

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \ln x - x + 1$.

a. Étudie les variations de g.

b. Déduis-en que, pour tout $x > 0$, $\ln x \leqslant x - 1$. Quand y a-t-il égalité ?

c. Sans calculatrice, justifie que $\ln(1{,}01) \leqslant 0{,}01$.

Exercice 13 — Une fonction ln(u) ●●●

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(x^2 - 4x + 5\right)$.

a. Justifie que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Calcule $f'(x)$ et dresse le tableau de variations de f (avec les limites).

c. Résous l'équation $f(x) = \ln 2$.

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE **Une étude avec fonction auxiliaire** ●●●

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.

1. Étudie les variations de g.
2. Calcule $g(1)$, puis déduis-en le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \dfrac{\ln x}{x}$, de courbe $\mathscr{C}$, et D la droite d'équation $y = x - 1$.

1. Détermine les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Montre que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$, puis dresse le tableau de variations de f.
3. Étudie la position relative de $\mathscr{C}$ et de D.
4. Déduis de la question 2 que $\ln x \leqslant x^2 - x$ pour tout $x > 0$.

Exercice 15 TYPE CONTRÔLE **Une équation qu'on ne sait pas résoudre** ●●●

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln x - x$, de courbe $\mathscr{C}$.

1. Détermine les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Montre que $f'(x) = \ln x$, puis dresse le tableau de variations de f.
3. Résous l'équation $f(x) = 0$.
4. Donne une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse e.
5.
   a. Montre que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur $[1\,;+\infty[$ et justifie que $\alpha > \mathrm{e}$.
   b. À l'aide de la calculatrice, donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
   c. L'équation $f(x) = 1$ a-t-elle des solutions sur $]0\,;1[$?

Exercice 16 BAC 2025 Une fonction avec ln(x)/x² ●●●

Bac spé maths 2025, Nouvelle-Calédonie, jour 2, exercice 4

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} + 1$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

   En déduire les éventuelles asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_f$.

2. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

   $$f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$$

3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

4.

   a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution, notée α, sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   b. Donner un encadrement du réel α d'amplitude $0{,}01$.

   c. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

   $$g(x) = \ln(x)$$

   On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé d'origine O. On considère un réel x strictement positif et le point M de la courbe C_g d'abscisse x. On note OM la distance entre les points O et M.

   a. Exprimer la quantité OM^2 en fonction du réel x.

   b. Montrer que, lorsque le réel x parcourt l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, la quantité OM^2 admet un minimum en α.

   c. La valeur minimale de la distance OM, lorsque le réel x parcourt l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, est appelée distance du point O à la courbe $\mathcal{C}_g$. On note d cette distance.

   Exprimer d à l'aide de α.

Exercice 17 BAC 2026 Retrouver une fonction avec ln ●●●

Bac spé maths 2026, Métropole, jour 1, exercice 4

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = a + \frac{b\ln(x+1)}{x+1}.$$

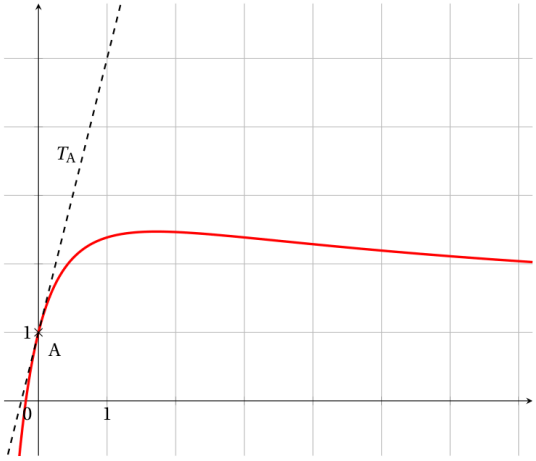
où a et b sont des réels, et ln désigne la fonction logarithme népérien.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]-1;+\infty[$.

On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Partie A

L'objectif de cette partie est de déterminer les valeurs de a et b de sorte que la courbe représentative de la fonction f sur $]-1;+\infty[$ corresponde à celle tracée dans le repère orthonormé ci-dessous :



On précise que la droite T_A est la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point $A(0;1)$.

1. Justifier que $a = 1$.
2. En utilisant le graphique :
   a. Donner la valeur de $f'(0)$.
      Justifier.
   b. Donner le signe de $f''(1)$.
      Justifier.
3.
   a. Montrer que pour tout réel x appartenant à $]-1;+\infty[$, on a :
      $$f'(x) = \frac{b(1-\ln(x+1))}{(x+1)^2}$$
   b. En déduire la valeur de b.

Partie B

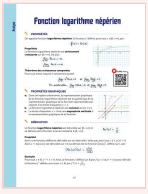
On admet dans la suite de l'exercice que la fonction f est définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{4\ln(x+1)}{x+1}$$

1. Justifier que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f.
2. Résoudre l'inéquation $1 - \ln(x+1) > 0$ sur $]-1;+\infty[$.
3. On admet que $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$.

   Dresser le tableau de variation complet de la fonction f en indiquant la valeur exacte de son extremum. Justifier.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 1{,}5$ admet une unique solution dans l'intervalle $[2;+\infty[$.

   En donner une valeur arrondie à 10^{-1}.
5.
   a. Montrer que :
   $$\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\ln 3\right)^2.$$
   b. En déduire l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.



LA FICHE MAGIQUE QUI VA AVEC

« Fonction logarithme népérien »

Propriétés, limites, dérivée et courbe de la fonction ln réunies sur une seule fiche.

Les fiches magiques terminale spé maths : campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

CAMPUS XYZ

Corrigés

Exercices sur le logarithme népérien en terminale spé maths

Exercice 1 Valeurs à connaître ●○○

Pour tout réel a, $\ln\left(\mathrm{e}^{a}\right) = a$; pour tout $b > 0$, $\mathrm{e}^{\ln b} = b$.

a. 3

b. $\dfrac{1}{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{-1}$, donc -1.

c. 7

d. $\sqrt{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$, donc $\dfrac{1}{2}$.

e. $\mathrm{e}^{2\ln 3} = \left(\mathrm{e}^{\ln 3}\right)^{2} = 3^{2} = \mathbf{9}$.

f. $2 - (-1) = \mathbf{3}$.

Exercice 2 Écrire en fonction de ln 2 ●○○

On utilise $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ et $\ln\left(a^{n}\right) = n\ln a$.

a. $\ln 8 = \ln\left(2^{3}\right) = \mathbf{3\ln 2}$.

b. $\ln\left(\dfrac{1}{4}\right) = -\ln 4 = -\ln\left(2^{2}\right) = \mathbf{-2\ln 2}$.

c. $\ln 32 - \ln 2 = \ln 16 = \ln\left(2^{4}\right) = \mathbf{4\ln 2}$.

d. $\ln\sqrt{2} = \ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right) = \mathbf{\dfrac{1}{2}\ln 2}$.

e. $\ln 12 - \ln 3 = \ln 4 = \mathbf{2\ln 2}$.

f. $\ln(16\,\mathrm{e}) = \ln 16 + \ln \mathrm{e} = \mathbf{4\ln 2 + 1}$.

Exercice 3 Équations simples ●○○

Pour $x > 0$: $\ln x = a \iff x = \mathrm{e}^{a}$. Pour tout réel x et $b > 0$: $\mathrm{e}^{x} = b \iff x = \ln b$.

a. Sur $]0\,;+\infty[$: $x = \mathrm{e}^{2}$.

b. Sur $]0\,;+\infty[$: $x = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

c. Sur $\mathbb{R}$: $x = \ln 5$.

d. Il faut $2x - 1 > 0$, soit $x > \dfrac{1}{2}$. $\ln(2x-1) = 0 \iff 2x - 1 = 1 \iff x = 1$, qui convient.

e. $3x + 1 = \ln 4 \iff x = \dfrac{\ln 4 - 1}{3}$ (environ $0{,}13$).

Exercice 4 — Inéquations simples ●○○

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$: elle conserve l'ordre.

a. Pour $x>0$: $\ln x>3 \iff x>\mathrm{e}^3$. $S=\left]\mathrm{e}^3\,;+\infty\right[$.

b. Il faut $x>2$. $\ln(x-2)\leqslant 0=\ln 1 \iff x-2\leqslant 1 \iff x\leqslant 3$. $S=]2\,;3]$.

c. $\mathrm{e}^x<2 \iff x<\ln 2$. $S=]-\infty\,;\ln 2[$.

d. Pour $x>0$: $3-2\ln x\geqslant 0 \iff \ln x\leqslant \dfrac{3}{2} \iff x\leqslant \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$. $S=\left]0\,;\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right]$.

> N'oublie jamais la condition $x>0$ (ou « ce qui est dans le $\ln$ est strictement positif ») : elle fait partie de la réponse.

Exercice 5 — Dériver avec ln ●●○

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ et, si $u>0$, $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$.

a. Produit uv avec $u=x$ et $v=\ln x$: $f'(x)=1\times\ln x+x\times\dfrac{1}{x}=\boldsymbol{\ln x+1}$.

b. $u(x)=x^2+1, u'(x)=2x$: $g'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

c. Quotient : $h'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x-\ln x\times 1}{x^2}=\boldsymbol{\dfrac{1-\ln x}{x^2}}$.

d. $k'(x)=\dfrac{3}{3x-2}$.

Exercice 6 — Limites et croissances comparées ●●○

À retenir : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=0$ (croissances comparées).

a. $x^2+3x+5\to+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$: par composition, $+\infty$.

b. On pose $X=\ln x\to-\infty$: $X^2-3X=X(X-3)$ est le produit de deux facteurs qui tendent vers $-\infty$, d'où $+\infty$.

c. $\dfrac{\ln x}{x^2}=\dfrac{\ln x}{x}\times\dfrac{1}{x}$: produit de deux facteurs qui tendent vers 0, d'où 0.

d. Forme « $\infty-\infty$ » : $\ln x-x=x\left(\dfrac{\ln x}{x}-1\right)$. La parenthèse tend vers -1 et $x\to+\infty$, d'où $-\infty$.

e. C'est une limite de cours (croissances comparées) : 0.

Exercice 7 — Équations avec des sommes de ln ●●○

a. Il faut $x+3>0$ et $x-1>0$, soit $x>1$. Sur $]1\,;+\infty[$:

$\ln\big((x+3)(x-1)\big)=\ln 5 \iff (x+3)(x-1)=5 \iff x^2+2x-8=0$.

$\Delta=4+32=36$, racines $\dfrac{-2-6}{2}=-4$ et $\dfrac{-2+6}{2}=2$. Seul 2 est dans $]1\,;+\infty[$: $S=\{2\}$.

b. Il faut $x>0$ et $4x-3>0$, soit $x>\dfrac{3}{4}$. Alors $2\ln x=\ln\left(x^2\right)$ et l'équation devient $x^2=4x-3$, soit

$x^2-4x+3=0$, de racines 1 et 3. Les deux sont supérieures à $\dfrac{3}{4}$: $S=\{1\,;3\}$.

> Sans la condition du départ, on garderait $x=-4$ en a., alors que $\ln(-1)$ n'existe pas.

Exercice 8 — Poser X = ln x ou X = eˣ ●●○

a. On pose $X=\ln x$: $X^2-3X+2=0$, de racines $X=1$ et $X=2$ (car $1+2=3$ et $1\times 2=2$).

$\ln x=1 \iff x=\mathrm{e}$ et $\ln x=2 \iff x=\mathrm{e}^2$. $S=\left\{\mathrm{e}\,;\mathrm{e}^2\right\}$.

b. $\mathrm{e}^{2x}=\left(\mathrm{e}^x\right)^2$. On pose $X=\mathrm{e}^x$: $X^2-4X+3=0$, de racines 1 et 3.

$\mathrm{e}^x=1 \iff x=0$ et $\mathrm{e}^x=3 \iff x=\ln 3$. $S=\{0\,;\ln 3\}$.

Exercice 9 — La voiture qui perd de la valeur ●●○

a. Perdre $15\,\%$, c'est multiplier par $0{,}85$: $V_n=20\,000\times 0{,}85^n$.

b.

$$\begin{aligned} V_n<8\,000 &\iff 0{,}85^n<0{,}4\\ &\iff n\ln 0{,}85<\ln 0{,}4\\ &\iff n>\frac{\ln 0{,}4}{\ln 0{,}85}\approx 5{,}64 \end{aligned}$$

L'inégalité change de sens car $\ln 0{,}85<0$. **Au bout de 6 années**, la voiture vaudra moins de $8\,000$ €.

> Diviser par un logarithme d'un nombre entre 0 et 1, c'est diviser par un nombre négatif : on retourne l'inégalité.

Exercice 10 — Variations d'une fonction avec ln ●●○

a. En 0 : $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$, donc $-2\ln x\to+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$.

En $+\infty$: $f(x)=x\left(1-2\times\dfrac{\ln x}{x}\right)$ et $\dfrac{\ln x}{x}\to 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

b. $f'(x)=1-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x-2}{x}$. Sur $]0\,;+\infty[$, $x>0$: f' a le signe de $x-2$.

f **est décroissante sur** $]0\,;2]$ **et croissante sur** $[2\,;+\infty[$, de minimum $f(2)=2-2\ln 2\approx 0{,}61$.

c. Le minimum de f est strictement positif, donc $f(x)>0$ pour tout $x>0$, c'est-à-dire $x>2\ln x$.

Exercice 11 La courbe de ln(x)/x ●●●

a. En 0 : $\ln x \to -\infty$ et $\dfrac{1}{x} \to +\infty$, donc $f(x) \to -\infty$: **la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale**.

En $+\infty$: $f(x) \to 0$ (croissances comparées) : **l'axe des abscisses est asymptote horizontale**.

b. $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$, du signe de $1 - \ln x$, positif pour $x \leqslant \mathrm{e}$.

f **est croissante sur** $]0\,;\mathrm{e}]$**, décroissante sur** $[\mathrm{e}\,;+\infty[$, de maximum $f(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}37$.

c. $f(1) = 0$ et $f'(1) = \dfrac{1-0}{1} = 1$, donc $y = f'(1)(x-1) + f(1)$, soit $y = x - 1$.

Exercice 12 Comparer ln x et x – 1 ●●●

a. $g'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$, du signe de $1 - x$ car $x > 0$. g **est croissante sur** $]0\,;1]$ **et décroissante sur** $[1\,;+\infty[$.

b. g admet un maximum en 1 : $g(1) = 0 - 1 + 1 = 0$. Donc $g(x) \leqslant 0$, soit $\ln x \leqslant x - 1$, avec **égalité seulement pour** $x = 1$.

c. Avec $x = 1{,}01$: $\ln(1{,}01) \leqslant 1{,}01 - 1 = \mathbf{0{,}01}$.

> Graphiquement : la courbe de $\ln$ est sous sa tangente $y = x - 1$ au point d'abscisse 1.

Exercice 13 Une fonction ln(u) ●●●

a. $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$: le trinôme $x^2 - 4x + 5$ garde le signe de $a = 1$, il est **strictement positif sur** $\mathbb{R}$.

b. $f'(x) = \dfrac{2x - 4}{x^2 - 4x + 5}$, du signe de $2x - 4$ car le dénominateur est positif.

f **est décroissante sur** $]-\infty\,;2]$**, croissante sur** $[2\,;+\infty[$, de minimum $f(2) = \ln 1 = 0$.

En $\pm\infty$, $x^2 - 4x + 5 \to +\infty$, donc $f(x) \to +\infty$ par composition.

c. $\ln$ est strictement croissante : $f(x) = \ln 2 \iff x^2 - 4x + 5 = 2 \iff x^2 - 4x + 3 = 0$. $S = \{1\,;3\}$.

Exercice 14 — TYPE CONTRÔLE — Une étude avec fonction auxiliaire ●●●

Partie A

1. $g'(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$. Sur $]0\,;+\infty[$, les deux termes sont positifs : g **est strictement croissante**.

2. $g(1) = 1 - 1 + 0 = 0$. Comme g est strictement croissante : $g(x) < 0$ **sur** $]0\,;1[$ **et** $g(x) > 0$ **sur** $]1\,;+\infty[$.

Partie B

1. En 0 : $\dfrac{\ln x}{x} = \ln x \times \dfrac{1}{x} \to -\infty$, donc $-\dfrac{\ln x}{x} \to +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

   En $+\infty$: $\dfrac{\ln x}{x} \to 0$ et $x - 1 \to +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. $\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)' = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$, donc

$$f'(x) = 1 - \frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

   f' a le signe de g : f **est décroissante sur** $]0\,;1]$**, croissante sur** $[1\,;+\infty[$, de minimum $f(1) = 0$.

3. $f(x) - (x-1) = -\dfrac{\ln x}{x}$, du signe de $-\ln x$.

   $\mathscr{C}$ **est au-dessus de** D **sur** $]0\,;1[$**, en dessous sur** $]1\,;+\infty[$, et elles se coupent au point $(1\,;0)$.

4. Le minimum de f vaut 0, donc $f(x) \geqslant 0 : x - 1 \geqslant \dfrac{\ln x}{x}$. En multipliant par $x > 0 : \ln x \leqslant x^2 - x$.

Exercice 15 — TYPE CONTRÔLE — Une équation qu'on ne sait pas résoudre ●●●

1. En $0 : x\ln x \to 0$ (croissances comparées) et $x \to 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

   En $+\infty$: $f(x) = x(\ln x - 1)$ avec $x \to +\infty$ et $\ln x - 1 \to +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. $(x\ln x)' = \ln x + 1$, donc $f'(x) = \ln x + 1 - 1 = \boldsymbol{\ln x}$.
   $\ln x < 0$ sur $]0\,;1[$ et $\ln x > 0$ sur $]1\,;+\infty[$: f **est décroissante sur** $]0\,;1]$**, croissante sur** $[1\,;+\infty[$, de minimum $f(1) = -1$.

3. $f(x) = x(\ln x - 1) = 0 \iff \ln x = 1$ (car $x \neq 0$) $\iff x = \mathrm{e}$.

4. $f(\mathrm{e}) = 0$ et $f'(\mathrm{e}) = 1 : y = x - \mathrm{e}$.

5.

   a. Sur $[1\,;+\infty[$, f est continue et strictement croissante, de $f(1) = -1$ à $+\infty$. Comme $1 \in [-1\,;+\infty[$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 1$ **a une unique solution** α sur $[1\,;+\infty[$.
   $f(\mathrm{e}) = 0 < 1 = f(\alpha)$ et f est croissante sur $[1\,;+\infty[$, donc $\alpha > \mathrm{e}$.

   b. À la calculatrice : $f(3{,}59) \approx 0{,}9986 < 1$ et $f(3{,}60) \approx 1{,}0114 > 1$. $3{,}59 < \alpha < 3{,}60$.

   c. Sur $]0\,;1[$, f est décroissante de 0 (limite en 0) à $-1 : f(x) < 0 < 1$. **Aucune solution sur** $]0\,;1[$.

Exercice 16 BAC 2025 **Une fonction avec ln(x)/x²** ●●●

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ,\ +\infty[$ par:

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} + 1.$$

1. On calcule les limites de f en 0 et en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^2 = 0^+\end{array}\right\} \overset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{\ln(x)}{x^2} = -\infty \implies \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(\frac{\ln(x)}{x^2}+1\right) = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = -\infty}$$

Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = -\infty$, la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.

$$\text{Par croissance comparée } \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0 \implies \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x^2}+1\right) = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ la courbe $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $y = 1$ pour asymptote horizontale en $+\infty$.

2. La fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x^2 - 2x\times\ln(x)}{(x^2)^2} = \frac{x-2x\ln(x)}{x^4} = \frac{\cancel{x}(1-2\ln(x))}{x^{\cancel{4}3}} = \boxed{\frac{1-2\ln(x)}{x^3}}$$

3. Sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ on a $x^3 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $1-2\ln(x)$.

$$1-2\ln(x)\geqslant 0 \iff -2\ln(x)\geqslant -1 \iff \ln(x)\leqslant\frac{1}{2} \iff x\leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \qquad (\text{car } x\mapsto \mathrm{e}x \text{ est croissante})$$

$1-2\ln(x)\geqslant 0 \iff -2\ln(x)\geqslant -1 \iff \ln(x)\leqslant\frac{1}{2} \iff x\leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ (car $x\mapsto \mathrm{e}^x$ est croissante)

x	0		$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1+2\mathrm{e}}{2\mathrm{e}}$	↘	1

1 1

$$f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)^2}+1 = \frac{\frac{1}{2}}{\mathrm{e}^{2\times\frac{1}{2}}}+1 = \frac{1}{2\mathrm{e}}+1 = \frac{1+2\mathrm{e}}{2\mathrm{e}} \approx 1{,}184$$

$$f\left(\mathrm{e}\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)^2}+1 = \frac{\frac{1}{2}}{\mathrm{e}2\times\frac{1}{2}}+1 = \frac{1}{2\mathrm{e}}+1 = \frac{1+2\mathrm{e}}{2\mathrm{e}} \approx 1{,}184$$

4.

a. Sur l'intervalle $\left]0\ ;\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right]$ la fonction f est continue et strictement croissante avec $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = -\infty$ et

$f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1+2\mathrm{e}}{2\mathrm{e}} > 0$, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.

Sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\ ;\ +\infty\right[$ la fonction f est continue et strictement décroissante avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution.

Finalement l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\ ;\ +\infty[$.

b. À la calculatrice, on trouve:

$$\boxed{0{,}65 < \alpha < 0{,}66}$$

c. D'après les questions précédentes et puisque la fonction f est croissante sur $\left]0\ ;\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right]$ et décroissante sur $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\ ;\ +\infty\right[$, la fonction f est strictement négative sur $]0\ ;\ \alpha[$, s'annule en α et est strictement positive sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$.

5.

a. Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. Le triangle OHM est rectangle en H, on peut donc appliquer le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{OM}^2 = \mathrm{OH}^2 + \mathrm{HM}^2 = \boxed{x^2 + [\ln(x)]^2}$$

b. On considère la fonction h définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = x^2 + [\ln(x)]^2$. Elle est dérivable puisque somme de fonctions dérivables, et sa dérivée est :

$$h'(x) = 2x + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) = \frac{2x^2 + 2\ln(x)}{x} = \frac{2\cancel{x}\left(1 + \dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)}{\cancel{x}} = 2x\left(1 + \frac{\ln(x)}{x^2}\right) = 2x \times f(x)$$

Or, pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, on a $2x > 0$, donc $h'(x)$ est du signe de $f(x)$.

Donc, d'après la question **4.c.**, $h'(x)$ est négatif sur $]0\ ;\ \alpha]$ et positif sur $[\alpha\ ;\ +\infty[$.

Donc h admet un minimum en $x = \alpha$.

La quantité OM^2 admet donc un minimum en α.

c. Pour $x = \alpha$, on a $\mathrm{OM}^2 = \alpha^2 + (\ln(\alpha))^2$.

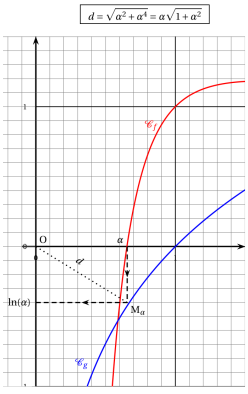
α est la solution de l'équation $f(x) = 0$, donc $f(\alpha) = 0$.

Donc $\dfrac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} + 1 = 0 \iff \ln(\alpha) = -\alpha^2 \implies (\ln(\alpha))^2 = \alpha^4$

Le minimum de OM^2 est donc $\alpha^2 + \alpha^4$.

Puisque la quantité OM^2 admet un minimum en α et que d est la valeur minimale de OM :

$$\boxed{d = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4} = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}}$$



Le sujet complet du bac 2025 (Nouvelle-Calédonie, jour 2) corrigé →



La méthode pas à pas est dans la fiche magique **« Fonction logarithme népérien »** (Les fiches magiques terminale spé maths, page 40).

Exercice 17 BAC 2026 **Retrouver une fonction avec ln** ●●●

Partie A

1. D'après l'énoncé, le point A$(0;1)$ est sur la courbe représentative de f.

On a donc :

$$\begin{aligned} f(0)=1 &\iff a+\frac{b\ln(0+1)}{0+1}=1 \\ &\iff a+\frac{b\ln(1)}{1}=1 \\ &\iff a=1 \quad \text{car } \ln(1)=0 \end{aligned}$$

On a donc bien $a=1$.

2.

a. La valeur de $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0, c'est-à-dire de la tangente T_{A}.

Cette tangente passe par A et par B$(1;5)$.

Son coefficient directeur est donc : $\dfrac{5-1}{1-0}=4$.

On a donc $f'(0)=4$.

b. Sur l'intervalle $[0;2]$, au moins, la fonction f est manifestement concave.

Ainsi, on aura f'' à valeurs négatives sur au moins $[0;2]$.

Notamment, on a $f''(1)$ négatif.

3.

a. f est dérivable sur son ensemble de définition.

Soit x appartenant à $]-1;+\infty[$:

On peut dire que : $x\longmapsto \ln(x+1)$ a pour dérivée, par composition : $x\longmapsto \dfrac{1}{x+1}$.

Ainsi pour x appartenant à $]-1;+\infty[$:

$$f'(x)=0+\frac{b\times\dfrac{1}{x+1}\times(x+1)-1\times b\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{b-b\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{b\big(1-\ln(x+1)\big)}{(x+1)^2}$$

b. D'après la question **2. a.**, on a $f'(0)=4$.

$$\begin{aligned} f'(0)=4 &\iff \frac{b\big(1-\ln(0+1)\big)}{(0+1)^2}=4 \\ &\iff \frac{b\big(1-\ln(1)\big)}{1^2}=4 \\ &\iff b(1-0)=4 \\ &\iff b=4 \end{aligned}$$

On en déduit que $b=4$.

Partie B

1. D'après la propriété des croissances comparées : $\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{\ln(y)}{y} = 0$.

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$ donc, avec $y = x+1$, par composition, on en déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$.

Par limite de la somme et du produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + 4\times\dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 1+4\times 0 = 1$.

f a une limite finie égale à 1, quand x tend vers $+\infty$.

Par définition, la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

2. Résolvons :

$$\begin{aligned} 1-\ln(x+1) > 0 &\iff 1 > \ln(x+1) \\ &\iff \mathrm{e}^1 > x+1 \quad \text{car la fonction exp est strictement croissante sur } \mathbb{R} \\ &\iff \mathrm{e}-1 > x \end{aligned}$$

Sur $]-1;+\infty[$, l'ensemble des solutions de l'équation est $]-1;\mathrm{e}-1[$.

3. On a les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, l'une calculée à la question **1.**, l'autre admise.

D'après la question **3. a.** de la **partie A**, on a, pour tout x réel strictement supérieur à 1:

$$f'(x) = \frac{4\big(1-\ln(x+1)\big)}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2}\times\big(1-\ln(x+1)\big).$$

Or : $\forall x\in]-1;+\infty[, \quad \dfrac{4}{(x+1)^2} > 0$

Pour tout x strictement supérieur à 1, le signe du nombre dérivé $f'(x)$ est donc donné par le signe de l'expression $1-\ln(x+1)$.

On a établi ce signe à la question précédente.

Le changement de variations de f interviendra donc pour $x = \mathrm{e}-1$.

$$f(\mathrm{e}-1) = 1+\frac{4\ln(\mathrm{e}-1+1)}{\mathrm{e}-1+1} = 1+\frac{4\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}} = 1+\frac{4}{\mathrm{e}} = 1+4\mathrm{e}^{-1}.$$

On a donc le tableau de variation complet de la fonction f :

x	-1		$\mathrm{e}-1$		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
variations de f	‖ $-\infty$	↗	$1+4\mathrm{e}^{-1}$	↘	1

4. e est inférieur à 3, donc $\mathrm{e}-1$ est inférieur à 2 (on a : $\mathrm{e}-1\approx 1{,}72$).

Sur l'intervalle $[2;+\infty[$, f est continue (car dérivable) et strictement décroissante.

De plus 1,5 est une valeur intermédiaire entre $f(2) = 1+\dfrac{4\ln(3)}{3} \approx 2{,}46$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

D'après le corollaire au théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones (dit aussi théorème de la bijection), l'équation $f(x) = 1{,}5$ admet une unique solution dans l'intervalle $[2; +\infty[$.

À la calculatrice, on obtient 25,1 comme valeur approchée arrondie à 10^{-1} de cette solution.

5.

a. Posons u définie sur $]-1; +\infty[$ par : $u : x \longmapsto \ln(x+1)$.

On a : $u' : x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}$.

On reconnaît donc, pour tout x dans $[0; 2]$: $\dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = \ln(x+1) \times \dfrac{1}{x+1} = u(x) \times u'(x)$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}\big(\ln(x+1)\big)^2\right]_0^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\big(\ln(2+1)\big)^2\right) - \left(\frac{1}{2}\big(\ln(0+1)\big)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\big(\ln 3\big)^2 - \frac{1}{2}\big(\ln 1\big)^2 \\ &= \frac{1}{2}\big(\ln 3\big)^2 \quad \text{car } \ln(1) = 0\end{aligned}$$

b. Comme la fonction f est une fonction continue et positive sur $[0; 2]$, l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$ correspond à : $\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 \left(1 + \frac{4\ln(x+1)}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^2 1\,\mathrm{d}x + 4\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= 2 + 4 \times \frac{1}{2}\big(\ln 3\big)^2 \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= 2 + 2\big(\ln 3\big)^2\end{aligned}$$

En unité d'aire, l'aire demandée est donc $2 + 2\big(\ln 3\big)^2$

Le sujet complet du bac 2026 (Métropole, jour 1) corrigé →



La méthode pas à pas est dans la fiche magique **« Fonction logarithme népérien »** (Les fiches magiques terminale spé maths, page 40).

LES FICHES MAGIQUES TERMINALE SPÉ MATHS

Révise toute la terminale spé maths avec les fiches magiques



- **41 fiches claires et illustrées** : tout le programme de spécialité maths de terminale, une notion par page.
- **Des vidéos méthode** accessibles par QR code sur les fiches.
- **Des exercices corrigés** après chaque fiche pour vérifier que tout est acquis.

campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

ANNALES BAC MATHS TERMINALE 2027

Prépare le bac avec les vrais sujets



- **75 sujets types** tirés des vrais sujets du bac, classés par chapitre.
- **3 bacs blancs complets** pour s'entraîner en conditions réelles.
- Des **corrigés avec la rédaction attendue**, des conseils et un aide-mémoire.

campusxyz.fr/produit/annales-bac-2027-terminale-spe-maths