Exercices sur l'orthogonalité dans l'espace en terminale spé maths

CAMPUS XYZ

Exercice 1 — Produit scalaire en coordonnées ●○○

Dans un repère orthonormé, on donne $\vec{u}(1\,;-2\,;3)$, $\vec{v}(4\,;1\,;-1)$ et $\vec{w}(2\,;1\,;0)$.

a. Calcule $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

b. Parmi ces vecteurs, lesquels sont orthogonaux ?

Exercice 2 — Écrire l'équation d'un plan ●○○

Détermine une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par $A(1\,;2\,;-1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2\,;-1\,;3)$.

Exercice 3 Lire une équation de plan ●○○

Soit $\mathscr{P} : x - 2y + z - 4 = 0$.

a. Donne un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

b. Les points $A(2\,;0\,;2)$ et $B(1\,;1\,;1)$ appartiennent-ils à $\mathscr{P}$?

Exercice 4 Un vecteur normal au plan (ABC) ●○○

On donne $A(1\,;0\,;0)$, $B(0\,;2\,;0)$, $C(0\,;0\,;3)$ et $\vec{n}(6\,;3\,;2)$.

a. Montre que $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

b. Déduis-en une équation cartésienne de (ABC).

Exercice 5 — Intersection d'une droite et d'un plan ●●○

Soit $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ et $\mathscr{P} : x + y + z - 2 = 0$. Détermine $d \cap \mathscr{P}$.

Exercice 6 — Projeté orthogonal et distance ●●○

Soit $\mathscr{P} : x + 2y + 2z - 1 = 0$ et $A(3\,;1\,;4)$.

a. Donne une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale à $\mathscr{P}$.

b. Déduis-en le projeté orthogonal H de A sur $\mathscr{P}$.

c. Calcule la distance de A au plan $\mathscr{P}$.

Exercice 7 — Calculer un angle ●●○

On donne $A(1\,;0\,;0)$, $B(0\,;1\,;0)$ et $C(0\,;0\,;1)$.

Calcule $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, puis la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Exercice 8 — Plans parallèles ou perpendiculaires ●●○

On considère $\mathscr{P}_1 : x-y+2z=1$, $\mathscr{P}_2 : 2x-2y+4z=5$ et $\mathscr{P}_3 : x+y=3$.

Étudie la position de $\mathscr{P}_1$ par rapport à $\mathscr{P}_2$, puis par rapport à $\mathscr{P}_3$.

Exercice 9 La droite perpendiculaire à un plan ●●○

Soit $\mathscr{P} : 3x - y + z - 18 = 0$ et $A(2\,;-1\,;0)$. Détermine le point H où la perpendiculaire à $\mathscr{P}$ passant par A coupe $\mathscr{P}$, puis la distance AH.

Exercice 10 Une diagonale orthogonale à un plan ●●○

$ABCDEFGH$ est un cube ($ABCD$ en bas, E au-dessus de A, F au-dessus de B...), muni du repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

a. Montre que $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BD}$ et à $\overrightarrow{BE}$.

b. Déduis-en une équation du plan (BDE).

Exercice 11 Distance d'un point à une droite ●●●

Soit $d : x = t, y = 1 + t, z = -t$ ($t \in \mathbb{R}$) et $A(1\,;2\,;3)$.

a. Soit M le point de d de paramètre t. Exprime $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}$, où $\vec{u}(1\,;1\,;-1)$ dirige d.

b. Déduis-en le projeté orthogonal H de A sur d, puis la distance de A à d.

Exercice 12 Volume et aire dans un tétraèdre ●●●

On reprend O l'origine, $A(1\,;0\,;0)$, $B(0\,;2\,;0)$, $C(0\,;0\,;3)$ et $(ABC) : 6x + 3y + 2z - 6 = 0$ (exercice 4).

a. Calcule le volume du tétraèdre $OABC$, de base OAB et de hauteur OC.

b. Calcule la distance de O au plan (ABC) avec la formule $\dfrac{|ax_O + by_O + cz_O + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

c. Déduis-en l'aire du triangle ABC.

Exercice 13 TYPE CONTRÔLE **Plan, projeté et volume** ●●●

On donne $A(1\,;1\,;0)$, $B(2\,;0\,;1)$, $C(0\,;1\,;2)$ et $D(4\,;3\,;2)$.

1. Montre que A, B et C définissent un plan.
2. Montre que $\vec{n}(2\,;3\,;1)$ est normal à (ABC) et donne une équation de ce plan.
3. Le point D appartient-il à (ABC) ?
4. Détermine le projeté orthogonal H de D sur (ABC). Que remarques-tu ?
5. Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, puis l'aire du triangle ABC, et enfin le volume du tétraèdre $ABCD$.

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE **Deux plans perpendiculaires** ●●●

On considère $\mathscr{P}_1 : x + y - z = 1$, $\mathscr{P}_2 : 2x - y + z = 2$ et le point $A(3\,;1\,;0)$.

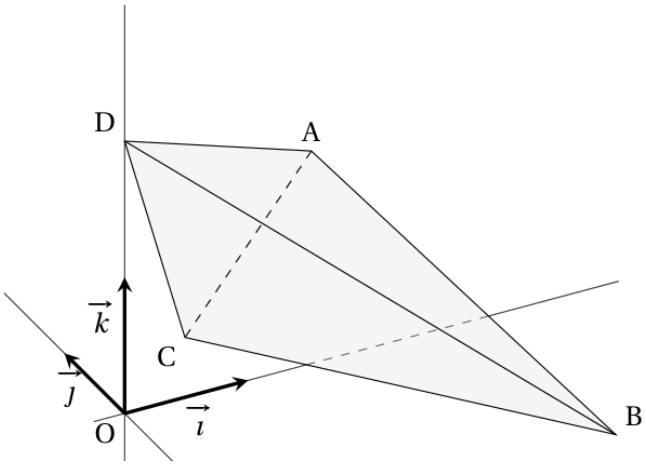
1. Montre que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires.
2. Montre que leur intersection est la droite $\Delta : x = 1, y = t, z = t$.
3. Calcule les distances de A à $\mathscr{P}_1$ et à $\mathscr{P}_2$.
4. Détermine le projeté orthogonal H de A sur Δ et la distance AH.
5. Vérifie que $AH^2 = d_1^2 + d_2^2$, où d_1 et d_2 sont les distances de la question 3. Explique pourquoi.

Exercice 15 BAC 2026 Plan, normale et distance ●●○

Bac spé maths 2026, Métropole, jour 2, exercice 1

Dans le repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points :

A$(2; 1; 1)$, B$(3; -2; 0)$, C$(0; -1; 1)$ et D$(0; 0; 2)$.



1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.
2.
   a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).
   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :
   $$x - y + 4z - 5 = 0.$$
3. Vérifier qu'une représentation paramétrique de la droite Δ passant par D et orthogonale au plan (ABC) est donnée par :
   $$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$
4. Montrer que le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) est le point H$\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{4}{3}\right)$.
5.
   a. Montrer que le triangle ABC est isocèle en B.
   b. Montrer que l'aire du triangle ABC est $3\sqrt{2}$.
6.
   a. En déduire que le volume du tétraèdre ABCD est égal à 1.

      On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par: $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$, *où* $\mathcal{B}$ *est l'aire d'une base et* h *la hauteur relative à cette base.*
   b. On admet que la distance du point A au plan (BCD) est égale à $\sqrt{2}$.

      En déduire l'aire du triangle BCD.
7. Dans cette question, on note D_k le point ayant pour coordonnées $(0; 0; k)$, où k est un réel.
   a. Déterminer la valeur de k pour laquelle les points A, B, C et D_k sont coplanaires.

      Quel est alors le projeté orthogonal du point D_k sur le plan (ABC)?
   b. Peut-on trouver une valeur de k telle que A soit le projeté orthogonal de D_k sur le plan (ABC) ?

Exercice 16 BAC 2026 Un plan, une droite, un projeté ●●●

Bac spé maths 2026, Asie, jour 2, exercice 3

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}\right)$, on considère les points

$$\mathrm{A}(1;2;3),\quad \mathrm{B}(-1;3;1),\quad \mathrm{C}(2;1;6)\quad \text{et}\quad \mathrm{D}(3;-2;-1).$$

1.

a. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

b. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

c. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2.

a. Déterminer une équation paramétrique de la droite (d), perpendiculaire au plan (ABC) et passant par le point D.

b. Déterminer les coordonnées du point H qui est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

c. En déduire que la distance du point D au plan (ABC) est égale à $3\sqrt{2}$.

3.

a. Montrer que

$$\cos\left(\widehat{\mathrm{BAC}}\right) = -\frac{3\sqrt{11}}{11}$$

b. En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\widehat{\mathrm{BAC}}\right)$.

c. Montrer que l'aire du triangle ABC vaut $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

4. Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule suivante :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\times\mathcal{B}\times h\,,\qquad \text{où } \mathcal{B} \text{ est l'aire d'une base et } h \text{ la hauteur qui lui est associée.}$$



LA FICHE MAGIQUE QUI VA AVEC

« Équation cartésienne d'un plan »

Vecteur normal et équation cartésienne d'un plan, avec la méthode, sur une seule fiche.

Les fiches magiques terminale spé maths : campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

CAMPUS XYZ

Corrigés

Exercices sur l'orthogonalité dans l'espace en terminale spé maths

Exercices sur l'orthogonalité dans l'espace en terminale spé maths : corrigés

CAMPUS XYZ

Exercice 1 — Produit scalaire en coordonnées ●○○

$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$ et $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ dans un repère orthonormé.

a. $\vec{u}\cdot\vec{v}=4-2-3=-1$, $\|\vec{u}\|=\sqrt{14}$, $\|\vec{v}\|=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

b. $\vec{u}\cdot\vec{w}=2-2+0=0$: $\vec{u}\perp\vec{w}$. $\vec{v}\cdot\vec{w}=8+1=9\neq 0$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}\neq 0$.

Exercice 2 — Écrire l'équation d'un plan ●○○

$\mathscr{P}$ a une équation de la forme $2x-y+3z+d=0$. $A\in\mathscr{P}$: $2-2-3+d=0$, donc $d=3$.

$\mathscr{P}$: $2x-y+3z+3=0$.

Exercice 3 — Lire une équation de plan ●○○

a. $\vec{n}(1\,;-2\,;1)$ (les coefficients de x, y et z).

b. $2-0+2-4=0$: $A\in\mathscr{P}$. $1-2+1-4=-4\neq 0$: $B\notin\mathscr{P}$.

Exercice 4 — Un vecteur normal au plan (ABC) ●○○

a. $\overrightarrow{AB}(-1\,;2\,;0)$ et $\overrightarrow{AC}(-1\,;0\,;3)$ ne sont pas colinéaires, et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-6+6=0$, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-6+6=0$: $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, **il est normal à** (ABC).

b. $6x+3y+2z+d=0$ et $A\in(ABC)$: $d=-6$. (ABC) : $6x+3y+2z-6=0$.

Exercice 5 — Intersection d'une droite et d'un plan ●●○

On remplace dans l'équation : $(1+t)+(2-t)+(3+2t)-2=0 \iff 4+2t=0 \iff t=-2$. d **coupe** $\mathscr{P}$ **au point** $(-1\,;4\,;-1)$.

Exercice 6 — Projeté orthogonal et distance ●●○

a. Δ est dirigée par $\vec{n}(1\,;2\,;2)$: $x=3+t$, $y=1+2t$, $z=4+2t$.

b. $(3+t)+2(1+2t)+2(4+2t)-1=0 \iff 12+9t=0 \iff t=-\dfrac{4}{3}$: $H\left(\dfrac{5}{3}\,;-\dfrac{5}{3}\,;\dfrac{4}{3}\right)$.

c. $\overrightarrow{AH}=-\dfrac{4}{3}\vec{n}$ et $\|\vec{n}\|=3$: $AH=4$.

> Méthode du bac : droite orthogonale au plan passant par A, intersection avec le plan, puis distance AH.

Exercice 7 Calculer un angle ●●○

$\overrightarrow{AB}(-1\,;1\,;0)$, $\overrightarrow{AC}(-1\,;0\,;1)$: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1$ et $AB=AC=\sqrt{2}$. $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$:

$\widehat{BAC}=60^\circ$. De plus $BC=\sqrt{2}$: ABC **est équilatéral**.

Exercice 8 Plans parallèles ou perpendiculaires ●●○

- $\vec{n_2}(2\,;-2\,;4)=2\vec{n_1}$: plans parallèles. Le point $(1\,;0\,;0)$ de $\mathscr{P}_1$ ne vérifie pas $2x-2y+4z=5$: **strictement parallèles**.
- $\vec{n_1}\cdot\vec{n_3}=1-1+0=0$: $\mathscr{P}_1$ **et** $\mathscr{P}_3$ **sont perpendiculaires**.

Exercice 9 La droite perpendiculaire à un plan ●●○

La droite : $x=2+3t$, $y=-1-t$, $z=t$. Dans $\mathscr{P}$:

$6+9t+1+t+t-18=0 \iff 11t=11 \iff t=1$. $H(5\,;-2\,;1)$ et

$AH=\|\vec{n}\|=\sqrt{9+1+1}=\sqrt{\mathbf{11}}$.

Exercice 10 Une diagonale orthogonale à un plan ●●○

a. $\overrightarrow{AG}(1\,;1\,;1)$, $\overrightarrow{BD}(-1\,;1\,;0)$, $\overrightarrow{BE}(-1\,;0\,;1)$: les deux produits scalaires valent $-1+1=0$.

b. $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (BDE), donc normal : $x+y+z+d=0$, et $B(1\,;0\,;0)$ donne $d=-1$. (BDE) : $x+y+z-1=0$.

Exercice 11 Distance d'un point à une droite ●●●

a. $\overrightarrow{AM}(t-1\,;t-1\,;-t-3)$, donc $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=t-1+t-1+t+3=\mathbf{3t+1}$.

b. H est le point où $\overrightarrow{AM}\perp\vec{u}$: $t=-\dfrac{1}{3}$, $H\left(-\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{2}{3}\,;\dfrac{1}{3}\right)$. $\overrightarrow{AH}\left(-\dfrac{4}{3}\,;-\dfrac{4}{3}\,;-\dfrac{8}{3}\right)$,

$AH=\dfrac{4}{3}\sqrt{1+1+4}=\dfrac{\mathbf{4\sqrt{6}}}{\mathbf{3}}\approx\mathbf{3{,}27}$.

Exercice 12 Volume et aire dans un tétraèdre ●●●

a. OAB est rectangle en O : aire $\dfrac{1\times2}{2}=1$. $V=\dfrac{1}{3}\times1\times3=\mathbf{1}$.

b. $\dfrac{|-6|}{\sqrt{36+9+4}}=\mathbf{\dfrac{6}{7}}$.

c. Avec la base ABC : $V=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}_{ABC}\times\dfrac{6}{7}=1$, donc $\mathscr{A}_{ABC}=\dfrac{7}{2}$.

Exercice 13 TYPE CONTRÔLE Plan, projeté et volume ●●●

1. $\overrightarrow{AB}(1\,;-1\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1\,;0\,;2)$ ne sont pas colinéaires.
2. $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2-3+1=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-2+0+2=0$. Équation $2x+3y+z+d=0$ avec A : $2x+3y+z-5=0$.
3. $8+9+2-5=14\neq 0$: **non**.
4. Droite : $(4+2t\,;3+3t\,;2+t)$.
   $2(4+2t)+3(3+3t)+(2+t)-5=0 \iff 14+14t=0 \iff t=-1 : H(2\,;0\,;1)$, **c'est le point** B.
5. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1+0+2=1$, $AB=\sqrt{3}$, $AC=\sqrt{5}$: $\cos\widehat{A}=\dfrac{1}{\sqrt{15}}$, $\sin\widehat{A}=\sqrt{\dfrac{14}{15}}$.

   $\mathscr{A}=\dfrac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{\dfrac{14}{15}}=\boxed{\dfrac{\sqrt{14}}{2}}$. Hauteur $DB=\|\vec{n}\|=\sqrt{14}$: $V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{14}}{2}\times\sqrt{14}=\boxed{\dfrac{7}{3}}$.

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE Deux plans perpendiculaires ●●●

1. $\vec{n_1}(1\,;1\,;-1)\cdot\vec{n_2}(2\,;-1\,;1)=2-1-1=0$: **perpendiculaires**.
2. En additionnant les équations : $3x=3$, $x=1$; puis $y-z=0$, soit $y=z=t$. $\Delta : (1\,;t\,;t)$.
3. $d_1=\dfrac{|3+1-0-1|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ et $d_2=\dfrac{|6-1+0-2|}{\sqrt{6}}=\dfrac{3}{\sqrt{6}}$.
4. $\overrightarrow{AM}(-2\,;t-1\,;t)\cdot(0\,;1\,;1)=2t-1=0 : t=\dfrac{1}{2}$, $H\left(1\,;\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$, $AH=\sqrt{4+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}}=\boxed{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}$.
5. $d_1^2+d_2^2=3+\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{2}=AH^2$: c'est le théorème de Pythagore dans le plan perpendiculaire à Δ passant par A, où les deux plans se coupent à angle droit.



La méthode pas à pas est dans la fiche magique **« Équation cartésienne d'un plan »** (Les fiches magiques terminale spé maths, page 70).

Exercice 15 BAC 2026 **Plan, normale et distance** ●●○

1. Déterminons les coordonnées des vecteurs :

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A} \\ y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A} \\ z_\mathrm{B}-z_\mathrm{A} \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} 3-2 \\ -2-1 \\ 0-1 \end{pmatrix}$ finalement : $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$. De même, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ces vecteurs ont des coordonnées non proportionnelles, donc ils ne sont pas colinéaires.

Les points A, B et C ne sont pas alignés, donc ils définissent un plan.

2.

a. On est dans un repère orthonormé, donc on peut utiliser la formule analytique du produit scalaire :

- **b.** $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 1\times 1 - 1\times(-3) + 4\times(-1) = 1+3-4 = 0$;
- **c.** $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 1\times(-2) - 1\times(-2) + 4\times 0 = -2+2+0 = 0$;
- **d.** $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont deux vecteurs non colinéaires qui forment une base du plan (ABC).

  $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à ces deux vecteurs, donc c'est un vecteur normal du plan (ABC).

e. Si $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ est normal à (ABC), alors, par propriété, une équation de (ABC) peut avoir la forme :

$1\times x + (-1)\times y + 4\times z + d = 0$, où d est un réel.

Comme A est un point de (ABC), on doit avoir : $x_\mathrm{A} - y_\mathrm{A} + 4z_\mathrm{A} + d = 0$.

$$\begin{aligned} x_\mathrm{A} - y_\mathrm{A} + 4z_\mathrm{A} + d = 0 &\iff 2 - 1 + 4\times 1 + d = 0 \\ &\iff 5 + d = 0 \\ &\iff d = -5 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (ABC) est donc bien : $x - y + 4z - 5 = 0$.

3. Si la droite Δ est orthogonale au plan (ABC), alors, par définition, elle doit être dirigée par un vecteur normal au plan (ABC), donc ici, on en déduit que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ dirige la droite Δ.

Comme la droite Δ passe par le point $\mathrm{D}(0;0;2)$, une représentation paramétrique de la droite Δ est donnée par :

$$\begin{cases} x = x_\mathrm{D} + x_{\overrightarrow{n}}\times t \\ y = y_\mathrm{D} + y_{\overrightarrow{n}}\times t \\ z = z_\mathrm{D} + z_{\overrightarrow{n}}\times t \end{cases} \text{ avec } t\in\mathbb{R}$$

En remplaçant par les valeurs connues, on a bien : $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2+4t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

4. Le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) est l'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

Comme c'est un point de la droite Δ, il existe un réel t_0 tel que les coordonnées de ce point sont $(t_0; -t_0; 2+4t_0)$.

C'est aussi un point de (ABC) sont ses coordonnées vérifient l'équation du plan.

Autrement dit, t_0 est solution de l'équation :

$$t_0 - (-t_0) + 4(2 + 4t_0) - 5 = 0 \iff t_0 + t_0 + 8 + 16t_0 - 5 = 0$$
$$\iff 18t_0 = -3$$
$$\iff t_0 = \frac{-1}{6}$$

Le point H a donc pour coordonnées : $\left(\frac{-1}{6}; -\frac{-1}{6}; 2 + 4 \times \frac{-1}{6}\right)$ soit $\mathrm{H}\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{4}{3}\right)$.

5.

a. Comme le repère est orthonormé :

- **b.** $\mathrm{AB} = \sqrt{(3-2)^2 + (-2-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+9+1} = \sqrt{11}$;
- **c.** $\mathrm{CB} = \sqrt{(3-0)^2 + (-2-(-1))^2 + (0-1)^2} = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$;

Les longueurs sont égales, donc le triangle est bien isocèle en B.

d.

- **e.** Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal est aussi une médiane (et une médiatrice).

  La hauteur issue de B est donc le segment [BI], où I est le milieu de [AC].

  I a donc pour coordonnées : $\mathrm{I}\left(\frac{x_\mathrm{A} + x_\mathrm{C}}{2}; \frac{y_\mathrm{A} + y_\mathrm{C}}{2}; \frac{z_\mathrm{A} + z_\mathrm{C}}{2}\right)$ soit $(1; 0; 1)$.

- **f.** L'aire d'un triangle est donnée par : $\mathcal{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$.

  Ici, on choisit comme base le segment [AC] et la hauteur correspondante, [BI].

- **g.** La distance AC est : $\mathrm{AC} = \sqrt{(0-2)^2 + (-1-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

  La distance BI est : $\mathrm{BI} = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{9} = 3$.

On a donc : $\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}} = \frac{\mathrm{AC} \times \mathrm{BI}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \times 3}{2} = 3\sqrt{2}$.

6.

a. Avec les questions précédentes, on a calculé l'aire du triangle ABC, qui est l'une des quatre bases possibles pour le tétraèdre.

Si on choisit ABC comme base de ABCD, alors la hauteur correspondante est la distance séparant le quatrième sommet (ici D), du plan contenant la base ABC, c'est-à-dire le plan (ABC).

Cette distance est donc la distance séparant D de son projeté orthogonal sur (ABC), c'est-à-dire H, dont on a déterminé les coordonnées à la question **4.**.

$$\mathrm{DH} = \sqrt{\left(\frac{-1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 2\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{36}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On a donc : $\mathcal{V}_{\mathrm{ABCD}} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{\mathrm{ABC}} \times \mathrm{DH} = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{3 \times 2}{2} = 1$.

Le volume du tétraèdre est bien égal à 1.

b. En faisant le même raisonnement, mais avec la base BCD et la hauteur associée, issue de A, que l'on peut noter h, on en déduit : $\mathcal{V}_{\mathrm{ABCD}} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{\mathrm{BCD}} \times h$.

En remplaçant par les valeurs connues, on a : $1 = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{\text{BCD}}\sqrt{2} \iff \mathcal{A}_{\text{BCD}} = \frac{1 \times 3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

L'aire du triangle BCD est donc égale à $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

7.

a. Avec D_k ayant pour coordonnées $(0;0;k)$ (le point D du début de l'énoncé est donc D_2).

On va chercher quand ces coordonnées vérifient l'équation du plan (ABC).

$$\begin{aligned} \text{D}_k \in (\text{ABC}) &\iff x_{\text{D}_k} - y_{\text{D}_k} + 4z_{\text{D}_k} - 5 = 0 \\ &\iff 0 - 0 + 4k - 5 = 0 \\ &\iff k = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Seul le point $\text{D}_{\frac{5}{4}}$ est sur le plan (ABC).

Son projeté orthogonal sur (ABC) est alors lui-même, par définition du projeté orthogonal.

b. Déterminons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{AD}_k}$: $\overrightarrow{\text{AD}_k}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ k-1 \end{pmatrix}$. On rappelle : $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Quelle que soit la valeur de k, ces vecteurs ne sont pas colinéaires : ils ont des ordonnées égales, mais des abscisses différentes.

Donc le vecteur $\overrightarrow{\text{AD}_k}$ n'est jamais orthogonal au plan (ABC) et donc A n'est jamais le projeté orthogonal de D_k sur (ABC).

Le sujet complet du bac 2026 (Métropole, jour 2) corrigé →

Exercice 16 BAC 2026 **Un plan, une droite, un projeté** ●●●

1.

a. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AB} \quad \begin{pmatrix} -1-1 \\ 3-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AC} \quad \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-2 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles. Les vecteurs ne sont pas colinéaires, les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent donc un plan.

b. Calculons les produits scalaires :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} &= 1 \times (-2) + 4 \times 1 + 1 \times (-2) = -2 + 4 - 2 = 0 \\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AC} &= 1 \times 1 + 4 \times (-1) + 1 \times 3 = 1 - 4 + 3 = 0 \end{aligned}$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), il est donc normal à ce plan.

c. Une équation du plan (ABC) est de la forme $x + 4y + z + d = 0$. Le point $A(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ appartient au plan, donc :

$$1 + 4 \times 2 + 3 + d = 0 \iff 12 + d = 0 \iff d = -12$$

Une équation cartésienne est : $x + 4y + z - 12 = 0$.

2.

a. La droite (d) est dirigée par le vecteur normal $\overrightarrow{n}(1\ ;\ 4\ ;\ 1)$ et passe par $D(3\ ;\ -2\ ;\ -1)$. Une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 4t \\ z = -1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

b. Le point H appartient à (d), il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x_H = 3 + t \\ y_H = -2 + 4t \\ z_H = -1 + t \end{cases}$

De plus H appartient au plan (ABC), ses coordonnées vérifient donc l'équation du plan (ABC): $x_H + 4y_H + z_H - 12 = 0$. On en déduit que t est solution de :

$$\begin{aligned} (3+t) + 4(-2+4t) + (-1+t) - 12 &= 0 \\ 3 + t - 8 + 16t - 1 + t - 12 &= 0 \\ 18t - 18 &= 0 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

Les coordonnées de H sont donc $x_H = 3 + 1 = 4$, $y_H = -2 + 4(1) = 2$, $z_H = -1 + 1 = 0$. Soit H $(4\ ;\ 2\ ;\ 0)$.

c. La distance de D au plan (ABC) correspond à la longueur DH :

$$\begin{aligned} DH &= \sqrt{(4-3)^2 + (2-(-2))^2 + (0-(-1))^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

3.

a. On sait que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= -2(1)+1(-1)-2(3)=-9\\ \mathrm{AB} &= \sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3\\ \mathrm{AC} &= \sqrt{1^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{11}\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}-9 &= 3\times\sqrt{11}\times\cos(\widehat{\mathrm{BAC}})\\ \cos(\widehat{\mathrm{BAC}}) &= \frac{-9}{3\sqrt{11}}=\frac{-3}{\sqrt{11}}=\frac{-3\sqrt{11}}{11}\end{aligned}$$

b. Sachant que $\cos^2(\widehat{\mathrm{BAC}})+\sin^2(\widehat{\mathrm{BAC}})=1$:

$$\begin{aligned}\sin^2(\widehat{\mathrm{BAC}}) &= 1-\left(-\tfrac{3}{\sqrt{11}}\right)^2\\ &= 1-\tfrac{9}{11}=\frac{2}{11}\end{aligned}$$

L'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ étant dans $[0\ ;\ \pi]$, son sinus est positif : $\sin(\widehat{\mathrm{BAC}})=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

c. L'aire du triangle ABC est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \tfrac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\sin(\widehat{\mathrm{BAC}})\\ &= \tfrac{1}{2}\times 3\times\sqrt{11}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

4. Le volume du tétraèdre ABCD est :

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \frac{1}{3}\times\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}}\times\mathrm{DH}\\ &= \tfrac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times 3\sqrt{2}\\ &= \tfrac{1}{3}\times\frac{18}{2}\\ &= 3\end{aligned}$$

Le sujet complet du bac 2026 (Asie, jour 2) corrigé →



La méthode pas à pas est dans la fiche magique **« Équation cartésienne d'un plan »** (Les fiches magiques terminale spé maths, page 70).

LES FICHES MAGIQUES TERMINALE SPÉ MATHS

Révise toute la terminale spé maths avec les fiches magiques



- **41 fiches claires et illustrées** : tout le programme de spécialité maths de terminale, une notion par page.
- **Des vidéos méthode** accessibles par QR code sur les fiches.
- **Des exercices corrigés** après chaque fiche pour vérifier que tout est acquis.

campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

ANNALES BAC MATHS TERMINALE 2027

Prépare le bac avec les vrais sujets



- **75 sujets types** tirés des vrais sujets du bac, classés par chapitre.
- **3 bacs blancs complets** pour s'entraîner en conditions réelles.
- Des **corrigés avec la rédaction attendue**, des conseils et un aide-mémoire.

campusxyz.fr/produit/annales-bac-2027-terminale-spe-maths