Exercices sur les primitives et équations différentielles en terminale spé maths

CAMPUS XYZ

Exercice 1 — Primitives usuelles ●○○

Donne une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

a. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ sur $\mathbb{R}$

b. $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$

c. $h(x) = \mathrm{e}^{2x}$ sur $\mathbb{R}$

d. $k(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$

e. $m(x) = \cos x$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 2 — La primitive qui vérifie une condition ●○○

Détermine la primitive F de $f(x) = 2x + 3$ sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(1) = 0$.

Exercice 3 Vérifier qu'une fonction est une primitive ●○○

a. Montre que $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de $\ln$ sur $]0\,;+\infty[$.

b. Montre que $G(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^x$ est une primitive de $g(x) = x\,\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 L'équation y' = ay ●○○

a. Donne les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = 3y$.

b. Détermine la solution f telle que $f(0) = 2$.

Exercice 5 — Primitives de fonctions composées ●●○

Reconnais une forme $u' \, \mathrm{e}^{u}$, $\dfrac{u'}{u}$ ou $u'u^{n}$, puis donne une primitive.

a. $f(x) = x \, \mathrm{e}^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$

b. $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$

c. $h(x) = (2x+1)\left(x^2+x\right)^3$ sur $\mathbb{R}$

d. $k(x) = \dfrac{3}{3x+2}$ sur $\left]-\dfrac{2}{3} ; +\infty\right[$

e. $m(x) = \sin x \cos x$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 6 — L'équation y' = ay + b ●●○

On considère l'équation $(E) : y' = -2y + 6$.

a. Détermine la solution constante de (E).

b. Donne toutes les solutions de (E).

c. Détermine la solution f telle que $f(0) = 1$, puis sa limite en $+\infty$.

Exercice 7 — Le café qui refroidit ●●○

Un café à 90 °C est posé dans une pièce à 20 °C. Sa température $\theta(t)$, t en minutes, vérifie $\theta'(t) = -0{,}1\big(\theta(t) - 20\big)$.

a. Résous cette équation différentielle et donne $\theta(t)$.

b. Au bout de combien de temps le café sera-t-il à 40 °C ?

Exercice 8 — Une croissance exponentielle ●●○

Une population de bactéries vérifie $N'(t) = 0{,}7\,N(t)$, avec $N(0) = 1\,000$ (t en heures).

a. Exprime $N(t)$.

b. Au bout de combien de temps la population double-t-elle ?

Exercice 9 Un second membre affine ●●○

On considère $(E) : y' + y = 2x + 1$.

a. Détermine les réels a et b tels que $g(x) = ax + b$ soit solution de (E).

b. Montre que f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de $y' + y = 0$.

c. Déduis-en toutes les solutions de (E).

Exercice 10 Un second membre exponentiel ●●○

On considère $(E) : y' = 2y + \mathrm{e}^x$.

a. Vérifie que $h(x) = -\mathrm{e}^x$ est une solution de (E).

b. Déduis-en toutes les solutions de (E), puis celle qui vaut 0 en 0.

Exercice 11 — Une solution particulière en x e$^{-0,5x}$ ●●●

On considère $(E) : y' + 0{,}5\,y = \mathrm{e}^{-0{,}5x}$.

a. Montre que $u(x) = x\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}$ est solution de (E).

b. Déduis-en les solutions de (E), puis la solution f telle que $f(0) = 2$.

c. Détermine la limite de f en $+\infty$.

Exercice 12 — Primitives trigonométriques ●●●

a. Donne une primitive de $f(x) = \cos(2x)$ et de $g(x) = \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

b. Sachant que $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$, donne une primitive de $h(x) = \sin^2 x$.

Exercice 13 TYPE CONTRÔLE **La chute d'un parachutiste** ●●●

Avant l'ouverture du parachute, la vitesse $v(t)$ d'un parachutiste (en m/s, t en secondes) vérifie $v'(t) = 9{,}8 - 0{,}2\,v(t)$, avec $v(0) = 0$.

1. Montre que $v(t) = 49\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}2t}\right)$.
2. Étudie les variations de v et sa limite en $+\infty$. Interprète cette limite.
3. Au bout de combien de temps la vitesse atteint-elle $90\,\%$ de la vitesse limite ?
4. La distance parcourue $d(t)$ est la primitive de v qui vaut 0 en 0. Montre que $d(t) = 49t + 245\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} - 245$.
5. Quelle distance le parachutiste a-t-il parcourue au bout de 10 s ?

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE L'équation logistique ●●●

On cherche les fonctions y strictement positives sur $[0\,;+\infty[$ telles que $(E) : y' = y - y^2$ et $y(0) = 0{,}1$.

1. On pose $z = \dfrac{1}{y}$. Montre que $z' = -z + 1$.

2. Résous cette équation et déduis-en z, puis $y(t) = \dfrac{1}{1 + 9\,\mathrm{e}^{-t}}$.

3. Détermine la limite de y en $+\infty$ et ses variations.

4. Réciproquement, vérifie que cette fonction est bien solution de (E).

Exercice 15 BAC 2025 Une équation différentielle et un médicament ●●○

Bac spé maths 2025, Centres étrangers, jour 1, exercice 4

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(E_1) : \quad y' + 0{,}48y = \frac{1}{250},$$

où y est une fonction de la variable t appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

1. On considère la fonction constante h définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $h(t) = \dfrac{1}{120}$.

   Montrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E_1).

2. Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' + 0{,}48y = 0$.

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_1).

Partie B

On s'intéresse à présent à l'évolution d'une population de bactéries dans un milieu de culture.

À un instant $t = 0$, on introduit une population initiale de 30 000 bactéries dans le milieu. On note $p(t)$ la quantité de bactéries, exprimée en millier d'individus, présente dans le milieu après un temps t, exprimé en heure.

On a donc $p(0) = 30$.

On admet que la fonction p définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ est dérivable, strictement positive sur cet intervalle et qu'elle est solution de l'équation différentielle (E_2) :

$$p' = \frac{1}{250}p \times (120 - p)$$

Soit y la fonction strictement positive sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ telle que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on a $p(t) = \dfrac{1}{y(t)}$.

1. Montrer que si p est solution de l'équation différentielle (E_2), alors y est solution de l'équation différentielle (E_1) : $\quad y' + 0{,}48y = \dfrac{1}{250}$.

2. On admet réciproquement que, si y est une solution strictement positive de l'équation différentielle (E_1), alors $p = \dfrac{1}{y}$ est solution de l'équation différentielle (E_2).

   Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on a :

   $$p(t) = \frac{120}{1 + K\mathrm{e}^{-0{,}48t}} \text{ avec } K \text{ une constante réelle.}$$

3. En utilisant la condition initiale, déterminer la valeur de K.

4. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} p(t)$. En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

5. Déterminer le temps nécessaire pour que la population de bactéries dépasse 60 000 individus.
   On donnera le résultat sous la forme d'une valeur arrondie exprimée en heures et minutes.

Exercice 16 BAC 2025 Une équation avec second membre ●●●

Bac spé maths 2025, Métropole (septembre), jour 1, exercice 1

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + 0{,}4y = \mathrm{e}^{-0{,}4t}$$

où y est une fonction de la variable réelle t.

On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui sont solutions de cette équation.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(t) = t\mathrm{e}^{-0{,}4t}$.

   Vérifier que u est solution de (E).

2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

   On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(t) = f(t) - u(t)$.

   Soit (H) l'équation différentielle $y' + 0{,}4y = 0$.

   a. Démontrer que si la fonction g est solution de l'équation différentielle (H) alors la fonction f est solution de l'équation différentielle (E).

   On admettra que la réciproque est vraie.

   a. Résoudre l'équation différentielle (H).

   b. En déduire les solutions de (E).

   c. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.

Partie B

On s'intéresse à la glycémie chez une personne venant de prendre un repas.

La glycémie en g.L^{-1}, en fonction du temps t, exprimé en heure, écoulé depuis la fin du repas, est modélisée par la fonction f définie sur [0 ; 6] par :

$$f(t) = (t+1)\mathrm{e}^{-0{,}4t}.$$

1.

a. Montrer que, pour tout $t \in [0\ ;\ 6]$, $f'(t) = (-0{,}4t + 0{,}6)\mathrm{e}^{-0{,}4t}$.

b. Étudier les variations de f sur [0 ; 6] puis dresser son tableau de variations sur cet intervalle.

2. Une personne est en hypoglycémie lorsque sa glycémie est inférieure à 0,7 g.L^{-1}.

a. Démontrer que sur l'intervalle [0 ; 6] l'équation $f(t) = 0{,}7$ admet une unique solution que l'on notera α.

b. Au bout de combien de temps après avoir pris son repas cette personne est- elle en hypoglycémie ?

On exprimera ce temps à la minute près.

3. On souhaite déterminer la glycémie moyenne en g.L^{-1} chez cette personne lors des six heures qui suivent le repas.

a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que:

$$\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t = -23{,}75\mathrm{e}^{-2{,}4} + 8{,}75.$$

b. Calculer la glycémie moyenne en g.L^{-1} chez cette personne lors des six heures qui suivent le repas.

c. En remarquant que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E), expliquer comment on aurait pu obtenir ce résultat autrement.



LA FICHE MAGIQUE QUI VA AVEC

« Équations différentielles »

Les solutions de y' = ay et de y' = ay + b, et la méthode avec une solution particulière, sur une fiche.

Les fiches magiques terminale spé maths : campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

CAMPUS XYZ

Corrigés

Exercices sur les primitives et équations différentielles en terminale spé maths

Exercices sur les primitives et équations différentielles en terminale spé maths : corrigés

CAMPUS XYZ

Exercice 1 — Primitives usuelles ●○○

On vérifie toujours en dérivant : $F' = f$.

a. $F(x) = x^3 - 2x^2 + x$

b. $G(x) = -\dfrac{1}{x}$

c. $H(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$

d. $K(x) = \ln x$

e. $M(x) = \sin x$

Exercice 2 — La primitive qui vérifie une condition ●○○

Les primitives de f sont $F(x) = x^2 + 3x + C$. $F(1) = 1 + 3 + C = 0$ donne $C = -4$.
$F(x) = x^2 + 3x - 4$.

> Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante : une seule condition suffit à la fixer.

Exercice 3 — Vérifier qu'une fonction est une primitive ●○○

a. $F'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x$: **c'est bien une primitive de** $\ln$.

b. $G'(x) = \mathrm{e}^x + (x-1)\,\mathrm{e}^x = x\,\mathrm{e}^x$: **oui**.

Exercice 4 — L'équation y' = ay ●○○

a. $y(x) = C\,\mathrm{e}^{3x}$, **avec** C **réel**.

b. $f(0) = C = 2$: $f(x) = 2\,\mathrm{e}^{3x}$.

Exercice 5 — Primitives de fonctions composées ●●○

a. $x\,\mathrm{e}^{x^2} = \dfrac{1}{2} \times 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$: $F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$.

b. Forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u = x^2 + 1 > 0$: $G(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$.

c. Forme $u'u^3$ avec $u = x^2 + x$: $H(x) = \dfrac{\left(x^2 + x\right)^4}{4}$.

d. Forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u = 3x + 2 > 0$: $K(x) = \ln(3x + 2)$.

e. Forme $u'u$ avec $u = \sin x$: $M(x) = \dfrac{\sin^2 x}{2}$.

Exercice 6 — L'équation y' = ay + b ●●○

a. y constante : $0 = -2y + 6$, $y = 3$.

b. $y(x) = C\,\mathrm{e}^{-2x} + 3$, **avec C réel.**

c. $f(0) = C + 3 = 1$, $C = -2$: $f(x) = 3 - 2\,\mathrm{e}^{-2x}$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$.

> Les solutions de $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) sont les fonctions $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$, avec C réel. La constante C se trouve avec la condition initiale.

Exercice 7 — Le café qui refroidit ●●○

a. $\theta' = -0{,}1\,\theta + 2$: solutions $C\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} + 20$. $\theta(0) = C + 20 = 90$, donc $\theta(t) = 20 + 70\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$.

b. $70\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} = 20 \iff \mathrm{e}^{-0{,}1t} = \dfrac{2}{7} \iff t = 10 \ln \dfrac{7}{2} \approx 12{,}5$: **au bout d'environ 12 min 32 s.**

Exercice 8 — Une croissance exponentielle ●●○

a. $N(t) = 1\,000\,\mathrm{e}^{0{,}7t}$.

b. $\mathrm{e}^{0{,}7t} = 2 \iff t = \dfrac{\ln 2}{0{,}7} \approx 0{,}99$: **environ 1 heure.**

Exercice 9 — Un second membre affine ●●○

a. $g'(x)+g(x)=a+ax+b=2x+1$ pour tout x : $a=2$ et $a+b=1$, $g(x)=2x-1$.

b. $(f-g)'+(f-g)=(f'+f)-(g'+g)=(f'+f)-(2x+1)$, qui est nul si et seulement si $f'+f=2x+1$.

c. Les solutions de $y'=-y$ sont $C\,\mathrm{e}^{-x}$, donc $f(x)=C\,\mathrm{e}^{-x}+2x-1$.

Exercice 10 — Un second membre exponentiel ●●○

a. $h'(x)=-\mathrm{e}^{x}$ et $2h(x)+\mathrm{e}^{x}=-2\,\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x}=-\mathrm{e}^{x}$: **c'est bien une solution**.

b. Solution générale = solution de $y'=2y$ + solution particulière : $y(x)=C\,\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}$.
$y(0)=C-1=0$: $y(x)=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}$.

Exercice 11 — Une solution particulière en x e$^{-0{,}5x}$ ●●●

a. $u'(x)=\mathrm{e}^{-0{,}5x}-0{,}5x\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}$, donc $u'(x)+0{,}5u(x)=\mathrm{e}^{-0{,}5x}$: u **est solution**.

b. Les solutions de $y'=-0{,}5y$ sont $C\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}$: $y(x)=(x+C)\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}$. $f(0)=C=2$:
$f(x)=(x+2)\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}$.

c. $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{0{,}5x}}+2\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}\to 0$ (croissances comparées).

Exercice 12 — Primitives trigonométriques ●●●

a. $F(x)=\dfrac{1}{2}\sin(2x)$ et $G(x)=-\dfrac{1}{3}\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ (on vérifie en dérivant).

b. $h(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos(2x)$: $H(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin(2x)}{4}$.

Exercice 13 TYPE CONTRÔLE La chute d'un parachutiste ●●●

1. $v' = -0{,}2v + 9{,}8$: solutions $C\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} + \dfrac{9{,}8}{0{,}2} = C\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} + 49$. $v(0) = C + 49 = 0$, $C = -49$: $v(t) = 49\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}2t}\right)$.
2. $v'(t) = 9{,}8\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} > 0$: v **est croissante**, et $\mathrm{e}^{-0{,}2t} \to 0$: $v(t) \to 49$ **m/s**, la vitesse limite (environ 176 km/h).
3. $1 - \mathrm{e}^{-0{,}2t} = 0{,}9 \iff \mathrm{e}^{-0{,}2t} = 0{,}1 \iff t = 5\ln 10 \approx 11{,}5$: **au bout de $11{,}5$ s environ**.
4. $d'(t) = 49 + 245 \times (-0{,}2)\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} = 49 - 49\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} = v(t)$ et $d(0) = 245 - 245 = 0$.
5. $d(10) = 490 + 245\,\mathrm{e}^{-2} - 245 \approx 278$: **environ 278 m**.

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE L'équation logistique ●●●

1. $z' = -\dfrac{y'}{y^2} = -\dfrac{y - y^2}{y^2} = -\dfrac{1}{y} + 1 = -z + 1$.
2. $z(t) = C\,\mathrm{e}^{-t} + 1$ et $z(0) = \dfrac{1}{0{,}1} = 10$, donc $C = 9$: $z(t) = 1 + 9\,\mathrm{e}^{-t}$ et $y(t) = \dfrac{1}{1 + 9\,\mathrm{e}^{-t}}$.
3. $y(t) \to 1$. $y'(t) = \dfrac{9\,\mathrm{e}^{-t}}{\left(1 + 9\,\mathrm{e}^{-t}\right)^2} > 0$: y **est croissante**, de $0{,}1$ vers 1.
4. $y - y^2 = y(1 - y) = \dfrac{1}{1 + 9\,\mathrm{e}^{-t}} \times \dfrac{9\,\mathrm{e}^{-t}}{1 + 9\,\mathrm{e}^{-t}} = y'(t)$: **c'est bien une solution**.

> Ce modèle (Verhulst) décrit une croissance qui ralentit quand on approche d'un maximum : population, épidémie, ventes d'un nouveau produit.



La méthode pas à pas est dans la fiche magique **« Équations différentielles »** (Les fiches magiques terminale spé maths, page 50).

Exercice 15 BAC 2025 Une équation différentielle et un médicament ●●○

Partie A :

On considère l'équation différentielle $(E_1) : y' + 0{,}48y = \dfrac{1}{250}$ où y est une fonction de la variable t définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

1. La fonction h est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout réel positif t, $h'(t) = 0$. On a dont

   $$h'(t) + 0{,}48h(t) = 0 + 0{,}48 \times \frac{1}{120} = \frac{1}{250}$$

   Donc la fonction h est solution de l'équation différentielle (E_1).

2. Les solutions de l'équation différentielle $y' + 0{,}48y = 0$ sont les fonctions de la forme $f(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}48t}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

3. Les solutions de l'équation différentielle (E_1) sont donc les fonctions de la forme

   $$f(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}48t} + \frac{1}{120} \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

Partie B :

1. Supposons que p est solution de l'équation différentielle (E_2),

On a donc $p' = \dfrac{1}{250}p \times (120 - p)$

Or $p = \dfrac{1}{y}$ et $p' = \dfrac{-y'}{y^2}$

$$\frac{-y'}{y^2} = \frac{1}{250}\frac{1}{y} \times \left(120 - \frac{1}{y}\right) \Longrightarrow -y' = y^2 \times \frac{1}{250y} \times \frac{120y - 1}{y}$$

D'où

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow -y' = \frac{1}{250} \times (120y - 1) \\ &\Longleftrightarrow -y' = 0{,}48y - \frac{1}{250} \\ &\Longleftrightarrow y' + 0{,}48y = \frac{1}{250} \end{aligned}$$

Donc y est solution de l'équation différentielle $(E_1) : y' + 0{,}48y = \dfrac{1}{250}$.

2. y est de la forme $y(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}48t} + \dfrac{1}{120}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

on a donc

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{y(t)} \\ &= \frac{1}{C\mathrm{e}^{-0{,}48t} + \frac{1}{120}} \text{ avec } C \in \mathbb{R} \\ &= \frac{120}{120C\mathrm{e}^{-0{,}48t} + 1} \text{ avec } C \in \mathbb{R} \\ &= \frac{120}{K\mathrm{e}^{-0{,}48t} + 1} \text{ avec } K \in \mathbb{R} \text{ en posant } K = 120C \end{aligned}$$

3. On sait que $p(0) = 30$ donc $\dfrac{120}{K\mathrm{e}^0 + 1} = 30$,

donc $\dfrac{120}{30} = K + 1$ d'où $K = \dfrac{120}{30} - 1 = 3$.

4. On sait que : $\begin{cases} \lim\limits_{t \to +\infty} -0{,}48t = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0 \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0{,}48t} = 0$.

Donc, par produit et somme, $\lim\limits_{t \to +\infty} 1 + 3\mathrm{e}^{-0{,}48t} = 1$

et finalement par quotient, $\lim\limits_{t \to +\infty} p(t) = 120$.

Dans le contexte de l'exercice la population de la bactérie se stabilisera vers $120\,000$.

5.

$$
\begin{aligned}
p(t) = 60 &\iff \frac{120}{3\mathrm{e}^{-0{,}48t}+1} = 60 \\
&\iff 120 = 60 \times \left(3\mathrm{e}^{-0{,}48t}+1\right) \\
&\iff 2 = 3\mathrm{e}^{-0{,}48t}+1 \\
&\iff \frac{1}{3} = \mathrm{e}^{-0{,}48t} \\
&\iff -0{,}48t = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3) \\
&\iff t = \frac{\ln(3)}{0,48} \approx 2{,}289
\end{aligned}
$$

Le temps nécessaire pour que la population de bactéries dépasse $60\,000$ individus est de $2{,}289$ heures soit 2 heures et 17 minutes.

Le sujet complet du bac 2025 (Centres étrangers, jour 1) corrigé →

Exercice 16 BAC 2025 Une équation avec second membre ●●●

Partie A

1. Dérivons la fonction u :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) &= 1 \times \mathrm{e}^{-0,4t} + t \times (-0,4)\mathrm{e}^{-0,4t} \\ &= \mathrm{e}^{-0,4t} - 0,4t\mathrm{e}^{-0,4t} \\ &= (1 - 0,4t)\mathrm{e}^{-0,4t}\end{aligned}$$

Vérifions que u est solution de (E) :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) + 0,4u(t) &= (1 - 0,4t)\mathrm{e}^{-0,4t} + 0,4 \times t\mathrm{e}^{-0,4t} \\ &= \mathrm{e}^{-0,4t} - 0,4t\mathrm{e}^{-0,4t} + 0,4t\mathrm{e}^{-0,4t} \\ &= \mathrm{e}^{-0,4t}\end{aligned}$$

Donc u est bien solution de (E).

2.

a. Soit $g = f - u$ avec g solution de (H).

Comme g est une solution de (H), on a : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) + 0,4g(t) = 0.$

Or $g = f - u$, donc $g' = f' - u'$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) + 0,4g(t) = 0 &\iff f'(t) - u'(t) + 0,4\big(f(t) - u(t)\big) = 0 \\ &\iff f'(t) - u'(t) + 0,4f(t) - 0,4u(t) = 0 \\ &\iff f'(t) + 0,4f(t) = u'(t) + 0,4u(t) \\ &\iff f'(t) + 0,4f(t) = \mathrm{e}^{-0,4t}\end{aligned}$$

La dernière équivalence se justifie car u étant une solution particulière de (E), on a bien:
$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) + 0,4u(t) = \mathrm{e}^{-0,4t}, \quad$ où $C \in \mathbb{R}$.

Donc f est solution de (E).

b. L'équation $(H) : y' + 0,4y = 0$ est de la forme $y' = -0,4y$.

Les solutions sont les fonctions de la forme : $g : t \longmapsto C\mathrm{e}^{-0,4t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

c. D'après les questions précédentes, f est solution de (E) si et seulement si $g = f - u$ est solution de (H).

Donc si et seulement si on a : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) - u(t) = C\mathrm{e}^{-0,4t}$

Les solutions de (E) sont les fonction f telles que : $f : t \longmapsto t\mathrm{e}^{-0,4t} + C\mathrm{e}^{-0,4t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

C'est-à-dire les fonction f telles que : $f : t \longmapsto (t + C)\mathrm{e}^{-0,4t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

d. Ici, on introduit une condition initiale, on veut avoir : $f(0) = 1.$

$$\begin{aligned}f(0) = 1 &\iff (0 + C)\mathrm{e}^{0} = 1 \\ &\iff C = 1\end{aligned}$$

Donc la fonction f cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = (t + 1)\mathrm{e}^{-0,4t}$.

Partie B

On remarque que la fonction f présentée est la solution que nous avons identifiée à la **partie A**.

1.

a. f étant une solution de l'équation (E) sur $[0\ ;\ 6]$, on a :

$$f' + 0{,}4f = \mathrm{e}^{-0{,}4t} \iff f' = -0{,}4f + \mathrm{e}^{-0{,}4t}$$

Et donc : $\forall t \in [0\ ;\ 6]$:

$$\begin{aligned} f'(t) &= -0{,}4f(t) + \mathrm{e}^{-0{,}4t} \\ &= -0{,}4(t+1)\mathrm{e}^{-0{,}4t} + \mathrm{e}^{-0{,}4t} \\ &= (-0{,}4t - 0{,}4 + 1)\mathrm{e}^{-0{,}4t} \\ &= (-0{,}4t + 0{,}6)\mathrm{e}^{-0{,}4t} \end{aligned}$$

Remarque : on peut aussi obtenir cette expression en dérivant l'expression donnée pour f avec les formules classiques de dérivation.

b. Étude du signe de $f'(t)$ sur $[0\ ;\ 6]$:

La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, donc $\mathrm{e}^{-0{,}4t} > 0$ pour tout t, donc le signe de $f'(t)$ est celui de $-0{,}4t + 0{,}6$.

$$\begin{aligned} -0{,}4t + 0{,}6 > 0 &\iff -0{,}4t > -0{,}6 \\ &\iff t < \frac{-0{,}6}{-0{,}4} \quad \text{car } -0{,}4 < 0 \\ &\iff t < 1{,}5 \end{aligned}$$

Tableau de variations :

x	0		$1{,}5$		6
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	1	↗	$2{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}6}$	↘	$7\,\mathrm{e}^{-2{,}4}$

$f(0) = 1,\ f(1{,}5) = 2{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}6} \approx 1{,}37$ et $f(6) = 7\,\mathrm{e}^{-2{,}4} \approx 0{,}63.$

Avec $f(0) = 1,\ f(1{,}5) = 2{,}5\mathrm{e}^{-0{,}6} \approx 1{,}37$ et $f(6) = 7\mathrm{e}^{-2{,}4} \approx 0{,}63$.

2.

a. Sur $[0\ ;\ 1{,}5]$, f est strictement croissante avec $f(0) = 1 > 0{,}7$: l'équation n'a pas de solution sur cet intervalle.

Sur $[1{,}5\ ;\ 6]$, f est continue (car dérivable) et strictement décroissante et 0,7 est une valeur intermédiaire entre $f(1{,}5) \approx 1{,}37$ et $f(6) \approx 0{,}63$.

D'après le corollaire aux théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(t) = 0{,}7$ admet une unique solution α sur $[1{,}5\ ;\ 6]$.

Finalement, l'équation $f(t) = 0{,}7$ admet bien une unique solution sur $[0\ ;\ 6]$.

b. Par approximations successives, ou en utilisant le solveur de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 5{,}62$ heures (on donne une approximation au centième près, car la précision attendue est à la minute, qui est un soixantième d'heure).

$0{,}62 \times 60 \approx 37$ minutes.

La personne est en hypoglycémie au bout de 5 heures et 37 minutes après le repas.

3.

a. Calcul de $\displaystyle\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^6 (t+1)\mathrm{e}^{-0{,}4t}\,\mathrm{d}t$.

On pose, pour tout t dans $[0\ ;\ 6]$: $\quad u(t) = t+1$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{-0{,}4t}$

puis $u'(t) = 1$ et $v(t) = \dfrac{1}{-0{,}4}\mathrm{e}^{-0{,}4t} = -2{,}5\mathrm{e}^{-0{,}4t}$.

Les fonctions u, u', v et v' sont continues sur $[0\ ;\ 6]$, donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^6 (t+1)\mathrm{e}^{-0{,}4t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^6 u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[u(t)v(t)\Big]_0^6 - \int_0^6 u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[(t+1)\times\left(-2{,}5\mathrm{e}^{-0{,}4t}\right)\Big]_0^6 - \int_0^6 1\times\left(-2{,}5\mathrm{e}^{-0{,}4t}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[-2{,}5(t+1)\mathrm{e}^{-0{,}4t}\Big]_0^6 + 2{,}5\int_0^6 \mathrm{e}^{-0{,}4t}\,\mathrm{d}t \\
&= \left(-2{,}5\times 7\mathrm{e}^{-2{,}4}\right) - \left(-2{,}5\times 1\times \mathrm{e}^{0}\right) + 2{,}5\Big[-2{,}5\mathrm{e}^{-0{,}4t}\Big]_0^6 \\
&= -17{,}5\mathrm{e}^{-2{,}4} + 2{,}5 + 2{,}5\left[\left(-2{,}5\mathrm{e}^{-2{,}4}\right) - \left(-2{,}5\mathrm{e}^{0}\right)\right] \\
&= -17{,}5\mathrm{e}^{-2{,}4} + 2{,}5 - 6{,}25\mathrm{e}^{2{,}4} + 6{,}25 \\
&= -23{,}75\mathrm{e}^{-2{,}4} + 8{,}75
\end{aligned}$$

b. La glycémie moyenne pendant la période de six heures est donc donnée par la valeur moyenne de la fonction f (qui donne la glycémie instantanée en fonction du temps) sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$ (le temps étant mesuré en heures). On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6-0}\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{6}(-23{,}75\mathrm{e}^{-2{,}4} + 8{,}75) \\
&= \frac{95\mathrm{e}^{-2{,}4} + 35}{24} \quad \text{(ceci est la valeur exacte)} \\
&\approx 1{,}099 \quad \text{valeur approchée au millième}
\end{aligned}$$

La glycémie moyenne lors des six heures suivant le repas est donc d'environ 1,10.

c. Comme f est solution de (E), on a : $f' + 0{,}4f = \mathrm{e}^{-0{,}4t}$.

En définissant, comme à la question **3. a.**, les fonctions v' et v par :

$v'(t) = \mathrm{e}^{-0,4t}$ et $v(t) = -2,5\mathrm{e}^{-0,4t}$, on a :

$$\begin{aligned} f' + 0,4f = \mathrm{e}^{-0,4t} &\iff f' + 0,4f = v' \\ &\iff 0,4f = v' - f' \\ &\iff f = 2,5(v' - f') \end{aligned}$$

On en déduit qu'une primitive de f peut s'exprimer sous la forme :

$$F : t \longmapsto 2,5\big(v(t) - f(t)\big)$$

Soit :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0\ ;\ 6], \quad F(t) &= 2,5\big(-2,5\mathrm{e}^{-0,4t} - (t+1)\mathrm{e}^{-0,4t}\big) \\ &= 2,5\big(-2,5 - (t+1)\big)\mathrm{e}^{-0,4t} \\ &= 2,5\big(-3,5 - t\big)\mathrm{e}^{-0,4t} \\ &= \big(-8,75 - 2,5t\big)\mathrm{e}^{-0,4t} \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t &= \Big[\big(-8,75 - 2,5t\big)\mathrm{e}^{-0,4t}\Big]_0^6 \\ &= (-8,75 - 2,5 \times 6)\,\mathrm{e}^{-0,4\times 6} - (-8,75 - 2,5 \times 0)\,\mathrm{e}^{-0,4\times 0} \\ &= -23,75\mathrm{e}^{-2,4} + 8,75 \end{aligned}$$

Cela confirme bien le résultat obtenu à la question **3. a.**.

Le sujet complet du bac 2025 (Métropole (septembre), jour 1) corrigé →



La méthode pas à pas est dans la fiche magique **« Équations différentielles »** (Les fiches magiques terminale spé maths, page 50).

LES FICHES MAGIQUES TERMINALE SPÉ MATHS

Révise toute la terminale spé maths avec les fiches magiques



- **41 fiches claires et illustrées** : tout le programme de spécialité maths de terminale, une notion par page.
- **Des vidéos méthode** accessibles par QR code sur les fiches.
- **Des exercices corrigés** après chaque fiche pour vérifier que tout est acquis.

campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

ANNALES BAC MATHS TERMINALE 2027

Prépare le bac avec les vrais sujets



- **75 sujets types** tirés des vrais sujets du bac, classés par chapitre.
- **3 bacs blancs complets** pour s'entraîner en conditions réelles.
- Des **corrigés avec la rédaction attendue**, des conseils et un aide-mémoire.

campusxyz.fr/produit/annales-bac-2027-terminale-spe-maths