Exercices sur le raisonnement par récurrence en terminale spé maths

CAMPUS XYZ

Exercice 1 — Démontrer une formule explicite ●○○

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + 1$.

Exercice 2 — La somme des nombres impairs ●○○

Démontre par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

Exercice 3 — Minorer une suite récurrente ●○○

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 1$.

Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 2$.

Exercice 4 — Encadrer une suite avec une racine ●○○

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

Exercice 5 La somme des carrés ●●○

Démontre par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 6 Croissante et majorée ●●○

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.

a. Calcule u_1 et u_2 (valeurs approchées à 10^{-2}).

b. Démontre par récurrence que, pour tout n : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.

c. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

Exercice 7 — Un problème de divisibilité ●●○

Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $4^n - 1$ est divisible par 3.

Exercice 8 — L'inégalité de Bernoulli ●●○

Soit a un réel strictement positif.

a. Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

b. Déduis-en la limite de la suite $(1{,}01^n)$, sans utiliser le cours sur les suites géométriques.

Exercice 9 — Comparer 2^n et n^2 ●●○

a. Compare 2^n et n^2 pour $n = 2, 3, 4$ et 5.

b. Montre que, pour tout entier $n \geqslant 3$, $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.

c. Démontre par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 5$, $2^n > n^2$.

Exercice 10 — Où est l'erreur ? ●●○

On considère la propriété $P(n)$: « $10^n + 1$ est divisible par 9 ».

a. Montre que si $P(n)$ est vraie pour un entier n, alors $P(n+1)$ est vraie.

b. Un élève en conclut que $10^n + 1$ est divisible par 9 pour tout n. A-t-il raison ?

Exercice 11 Conjecturer puis démontrer ●●●

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

a. Calcule u_1, u_2 et u_3. Conjecture une expression de u_n en fonction de n.

b. Démontre ta conjecture par récurrence.

c. Déduis-en la limite de la suite (u_n).

Exercice 12 Une suite qui tend vers l'infini ●●●

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

a. Démontre par récurrence que $u_n > 0$ pour tout n.

b. Montre que $u_{n+1}^2 \geqslant u_n^2 + 2$, puis démontre par récurrence que $u_n^2 \geqslant 2n + 4$.

c. Déduis-en la limite de (u_n).

Exercice 13 TYPE CONTRÔLE **Suite auxiliaire et récurrence** ●●●

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - n + 1$.

1. Calcule u_1, u_2 et u_3.
2. Complète la fonction Python pour qu'elle renvoie u_n.

```
def u(n):
    v = 1
    for k in range(n):
        v = ........
    return v
```

3. Démontre par récurrence que $u_n \geqslant n + 1$ pour tout n, puis déduis-en la limite de (u_n).
4. On pose $v_n = u_n - n$. Montre que (v_n) est géométrique, puis exprime u_n en fonction de n.
5. Calcule $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ en fonction de n.

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE **Deux sommes et une convergence** ●●●

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$ et

$T_n = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$.

1. Calcule S_1, S_2 et S_3.
2. Démontre par récurrence que $S_n = \dfrac{n}{n+1}$ pour tout $n \geqslant 1$. Quelle est la limite de (S_n) ?
3. Vérifie que, pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{(n+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.
4. Démontre par récurrence que $T_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$.
5. Montre que (T_n) est croissante. Déduis-en qu'elle converge vers une limite $\ell \leqslant 2$.

Exercice 15 BAC 2023 Une récurrence pour trouver une limite ●●○

Bac spé maths 2023, Amérique du Sud, jour 2, exercice 3

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Soit n un entier naturel.

   Recopier et compléter la fonction suite_u d'argument n ci-dessous, écrite en langage Python, afin qu'elle retourne la valeur de u_n.

```
def suite_u(n) :
    u = ...
    for i in range(1,n+1) :
        u = ...
    return u
```

3.
   a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \geqslant 2n$.
   b. En déduire la limite de la suite (u_n).
   c. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout entier naturel n vérifiant, $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$?
4. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
5. On considère la suite (v_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - 2n + 1$.
   a. En dessous de la fonction suite_u précédente, on a écrit la fonction suite_v ci-dessous :

```
def suite_v(n):
    L = []
    for i in range(n+1) :
        L.append(suite_u(i) - 2*i + 1)
```

La commande «L.append» permet de rajouter, en dernière position, un élément dans la liste L.

Lorsqu'on saisit suite_v(5) dans la console, on obtient l'affichage suivant :

>>> suite_v(5)
$[1, 5, 25, 125, 625, 3125]$

Exercice 16 BAC 2025 Une suite définie par deux termes ●●●

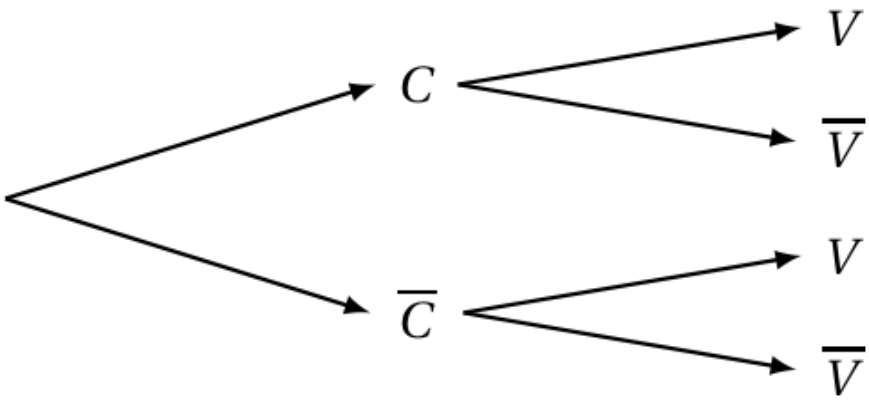
Bac spé maths 2025, Amérique du Nord (secours), jour 2, exercice 4

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n \end{cases}$$

Partie A : Conjecture

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Aucune justification n'est demandée.



2. Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Partie B : Étude d'une suite auxiliaire

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par:

$$w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

1. Calculer w_0.

2. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

3. Pour tout entier naturel n, exprimer w_n en fonction de n.

4. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

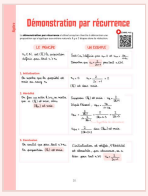
$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n$$

5. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Partie C : Étude de la suite (u_n)

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente sans chercher à calculer la valeur de la limite.
3. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation : $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell$.

   Déterminer la limite de la suite (u_n).



LA FICHE MAGIQUE QUI VA AVEC

« Démonstration par récurrence »

Initialisation, hérédité, conclusion : la rédaction modèle d'une récurrence sur une seule fiche.

Les fiches magiques terminale spé maths : campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

CAMPUS XYZ

Corrigés

Exercices sur le raisonnement par récurrence en terminale spé maths

Exercices sur le raisonnement par récurrence en terminale spé maths : corrigés

CAMPUS XYZ

Exercice 1 — Démontrer une formule explicite ●○○

On note $P(n)$: « $u_n = 3^n + 1$ ».

- **Initialisation** : $3^0 + 1 = 2 = u_0$, donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : soit n un entier naturel tel que $u_n = 3^n + 1$. Alors $u_{n+1} = 3u_n - 2 = 3\left(3^n + 1\right) - 2 = 3^{n+1} + 3 - 2 = 3^{n+1} + 1$: $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : **pour tout entier naturel** n, $u_n = 3^n + 1$.

> Rédaction type : on note $P(n)$ la propriété. **Initialisation** : $P(n_0)$ est vraie. **Hérédité** : on suppose $P(n)$ vraie pour un entier $n \geqslant n_0$ fixé et on montre $P(n+1)$. **Conclusion** : $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Exercice 2 — La somme des nombres impairs ●○○

On note $P(n)$: « $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$ ».

- **Initialisation** : pour $n = 1$, la somme vaut 1 et $1^2 = 1$: $P(1)$ est vraie.
- **Hérédité** : on suppose $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$ pour un entier $n \geqslant 1$. On ajoute le terme suivant, $2(n+1) - 1 = 2n + 1$: $1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : **l'égalité est vraie pour tout** $n \geqslant 1$.

Exercice 3 — Minorer une suite récurrente ●○○

- **Initialisation** : $u_0 = 5 \geqslant 2$.
- **Hérédité** : on suppose $u_n \geqslant 2$. En multipliant par $0{,}5 > 0$: $0{,}5\,u_n \geqslant 1$, puis en ajoutant 1 : $u_{n+1} \geqslant 2$.
- **Conclusion** : $u_n \geqslant 2$ **pour tout entier naturel** n.

Exercice 4 — Encadrer une suite avec une racine ●○○

- **Initialisation** : $u_0 = 0$ et $0 \leqslant 0 \leqslant 2$.
- **Hérédité** : on suppose $0 \leqslant u_n \leqslant 2$. Alors $2 \leqslant u_n + 2 \leqslant 4$ et, la fonction racine carrée étant croissante sur $[0\,;+\infty[$, $\sqrt{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$. Comme $\sqrt{2} \geqslant 0$, on a bien $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
- **Conclusion** : $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ **pour tout** n.

> On part de l'encadrement de u_n et on applique, étape par étape, les opérations qui donnent u_{n+1} : $+2$, puis racine carrée (croissante).

Exercice 5 — La somme des carrés ●●○

- **Initialisation** : pour $n = 1$, $1^2 = 1$ et $\dfrac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$.
- **Hérédité** : on suppose l'égalité vraie au rang n. On ajoute $(n+1)^2$:

$$\begin{aligned} 1^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right]}{6} \\ &= \frac{(n+1)\left(2n^2 + 7n + 6\right)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

  car $(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$. C'est la formule au rang $n+1$.
- **Conclusion** : **l'égalité est vraie pour tout** $n \geqslant 1$.

> Dans l'hérédité, on factorise par $(n+1)$ plutôt que de tout développer : on voit apparaître la forme attendue.

Exercice 6 — Croissante et majorée ●●○

a. $u_1 = \sqrt{5} \approx 2{,}24$ et $u_2 = \sqrt{2\sqrt{5} + 3} \approx 2{,}73$.

b. On note $f(x) = \sqrt{2x+3}$: f est croissante sur $[0\,;+\infty[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

- **Initialisation** : $0 \leqslant 1 \leqslant \sqrt{5} \leqslant 3$, donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 3$.
- **Hérédité** : si $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$, on applique f croissante : $f(0) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant f(3)$, soit $\sqrt{3} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 3$, et $\sqrt{3} \geqslant 0$.
- **Conclusion** : la propriété est vraie pour tout n.

c. (u_n) **est croissante et majorée par** 3 : d'après le théorème de convergence monotone, elle converge.

Exercice 7 — Un problème de divisibilité ●●○

- **Initialisation** : $4^0 - 1 = 0 = 3 \times 0$, divisible par 3.
- **Hérédité** : on suppose $4^n - 1 = 3k$ avec k entier. Alors
  $4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = 4(3k+1) - 1 = 12k + 3 = 3(4k+1)$, et $4k+1$ est un entier :
  $4^{n+1} - 1$ est divisible par 3.
- **Conclusion** : $4^n - 1$ **est divisible par** 3 **pour tout** n.

Exercice 8 — L'inégalité de Bernoulli ●●○

a. **Initialisation** : $(1+a)^0 = 1 = 1 + 0 \times a$.

Hérédité : on suppose $(1+a)^n \geqslant 1 + na$. On multiplie par $1 + a > 0$:
$(1+a)^{n+1} \geqslant (1+na)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 \geqslant 1 + (n+1)a$, car $na^2 \geqslant 0$.

Conclusion : $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ **pour tout** n.

b. Avec $a = 0{,}01$: $1{,}01^n \geqslant 1 + 0{,}01\,n$, et $\lim(1 + 0{,}01\,n) = +\infty$. Par comparaison, $\lim 1{,}01^n = +\infty$.

Exercice 9 — Comparer 2^n et n^2 ●●○

a. $2^2 = 4 = 2^2$; $2^3 = 8 < 9$; $2^4 = 16 = 4^2$; $2^5 = 32 > 25$. **L'inégalité stricte n'est vraie qu'à partir de** $n = 5$ parmi ces valeurs.

b. $2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2$. Pour $n \geqslant 3$, $(n-1)^2 \geqslant 4$, donc $2n^2 - (n+1)^2 \geqslant 2 > 0$.

c. **Initialisation** : $2^5 = 32 > 25 = 5^2$.

Hérédité : on suppose $2^n > n^2$ pour un $n \geqslant 5$. Alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2n^2 \geqslant (n+1)^2$ d'après b. (car $n \geqslant 5 \geqslant 3$).

Conclusion : $2^n > n^2$ **pour tout** $n \geqslant 5$.

Exercice 10 — Où est l'erreur ? ●●○

a. Si $10^n + 1 = 9k$, alors $10^{n+1} + 1 = 10 \times 10^n + 1 = 10(9k-1) + 1 = 90k - 9 = 9(10k-1)$: $P(n+1)$ **est vraie**.

b. **Non** : la propriété est héréditaire, mais elle n'est jamais initialisée. $10^0 + 1 = 2$, $10^1 + 1 = 11$, $10^2 + 1 = 101$ ne sont pas divisibles par 9. En fait, $10^n + 1$ a toujours pour reste 2 dans la division par 9.

> Sans initialisation, l'hérédité ne prouve rien : c'est comme une échelle dont on n'atteint jamais le premier barreau.

Exercice 11 — Conjecturer puis démontrer ●●●

a. $u_1 = \dfrac{1}{2}$; $u_2 = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{3}$; $u_3 = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \dfrac{1}{4}$. Conjecture : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

b. **Initialisation** : $\dfrac{1}{0+1} = 1 = u_0$.

Hérédité : si $u_n = \dfrac{1}{n+1}$, alors $u_{n+1} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+2}{n+1}} = \dfrac{1}{n+2}$.

Conclusion : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ **pour tout** n.

c. $\lim u_n = 0$.

Exercice 12 — Une suite qui tend vers l'infini ●●●

a. $u_0 = 2 > 0$; si $u_n > 0$, alors $\dfrac{1}{u_n} > 0$ et u_{n+1} est une somme de deux positifs : $u_n > 0$ **pour tout** n.

b. $u_{n+1}^2 = u_n^2 + 2 + \dfrac{1}{u_n^2} \geqslant u_n^2 + 2$.

Initialisation : $u_0^2 = 4 = 2 \times 0 + 4$. **Hérédité** : si $u_n^2 \geqslant 2n + 4$, alors $u_{n+1}^2 \geqslant 2n + 4 + 2 = 2(n+1) + 4$. **Donc** $u_n^2 \geqslant 2n + 4$ **pour tout** n.

c. Comme $u_n > 0$, $u_n \geqslant \sqrt{2n+4}$, et $\lim \sqrt{2n+4} = +\infty$. Par comparaison, $\lim u_n = +\infty$.

Exercice 13 TYPE CONTRÔLE **Suite auxiliaire et récurrence** ●●●

1. $u_1 = 2 - 0 + 1 = 3$; $u_2 = 6 - 1 + 1 = 6$; $u_3 = 12 - 2 + 1 = 11$. 3 ; 6 ; 11.

2. Au passage k, on calcule le terme suivant à partir du rang k : `v = 2*v - k + 1`.

3. **Initialisation** : $u_0 = 1 \geqslant 0 + 1$.
   Hérédité : si $u_n \geqslant n + 1$, alors $u_{n+1} = 2u_n - n + 1 \geqslant 2(n + 1) - n + 1 = n + 3 \geqslant n + 2$.
   Donc $u_n \geqslant n + 1$ **pour tout** n et, par comparaison, $\lim u_n = +\infty$.

4. $v_{n+1} = u_{n+1} - (n + 1) = 2u_n - n + 1 - n - 1 = 2u_n - 2n = 2v_n$: (v_n) **est géométrique de raison** 2, avec $v_0 = 1$.
   Donc $v_n = 2^n$ et $u_n = 2^n + n$.

5. $S_n = (1 + 2 + \cdots + 2^n) + (0 + 1 + \cdots + n) = \mathbf{2^{n+1} - 1 + \frac{n(n+1)}{2}}$.

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE Deux sommes et une convergence ●●●

1. $S_1 = \frac{1}{2}$; $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$; $S_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$.

2. **Initialisation** : $S_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$.

   Hérédité : si $S_n = \frac{n}{n+1}$, alors

   $$S_{n+1} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

   Donc $S_n = \frac{n}{n+1}$ pour tout $n \geqslant 1$, et $\lim S_n = 1$.

3. $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ et $n(n+1) \leqslant (n+1)^2$, donc $\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n(n+1)}$.

4. **Initialisation** : $T_1 = 1 = 2 - \frac{1}{1}$.

   Hérédité : si $T_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$, alors $T_{n+1} = T_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$ d'après 3.

   Donc $T_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$ **pour tout** $n \geqslant 1$.

5. $T_{n+1} - T_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$: (T_n) **est croissante**. Elle est majorée par 2 (car $2 - \frac{1}{n} \leqslant 2$) : d'après le théorème de convergence monotone, **elle converge vers** $\ell \leqslant 2$.

> On peut démontrer que $\ell = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}645$, mais c'est bien au-delà du programme.



La méthode pas à pas est dans la fiche magique **« Démonstration par récurrence »** (Les fiches magiques terminale spé maths, page 20).

Exercice 15 **BAC 2023** **Une récurrence pour trouver une limite** ●●○

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6$.

1.

- **2.**Pour $n = 0$ on a: $u_1 = u_{0+1} = 5u_0 - 8 \times 0 + 6 = 0 - 0 + 6 = 6$
- **3.**Pour $n = 1$ on a: $u_2 = u_{1+1} = 5u_1 - 8 \times 1 + 6 = 5 \times 6 - 8 + 6 = 28$

4. Soit n un entier naturel. On complète la fonction suite_u d'argument n ci-dessous, écrite en langage Python, afin qu'elle retourne la valeur de u_n.

```
def suite_u(n) :
    u = 0
    for i in range(1,n+1) :
        u = 5*u - 8*(i-1) + 6
    return u
```

Rem: il aurait sans doute été plus simple de donner comme algorithme:

```
def suite_u(n) :
    u = 0
    for i in range(0,n) :
        u = 5*u - 8*i + 6
    return u
```

5.

a. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété: $u_n \geqslant 2n$.

- **b.Initialisation**

  Pour $n = 0$, on a: $u_0 = 0$ et $2n = 0$; donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **c.Hérédité**

  On suppose que $u_n \geqslant 2n$ pour $n \geqslant 0$; c'est l'hypothèse de récurrence.

  $u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6 \geqslant 5 \times (2n) - 8n + 6 = 2n + 6 = 2(n+1) + 4 \geqslant 2(n+1)$

  Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.

- **d.Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, on a: $u_n \geqslant 2n$.

e. $\lim\limits_{n \to +\infty} 2n = +\infty$ et $u_n \geqslant 2n$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

f. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

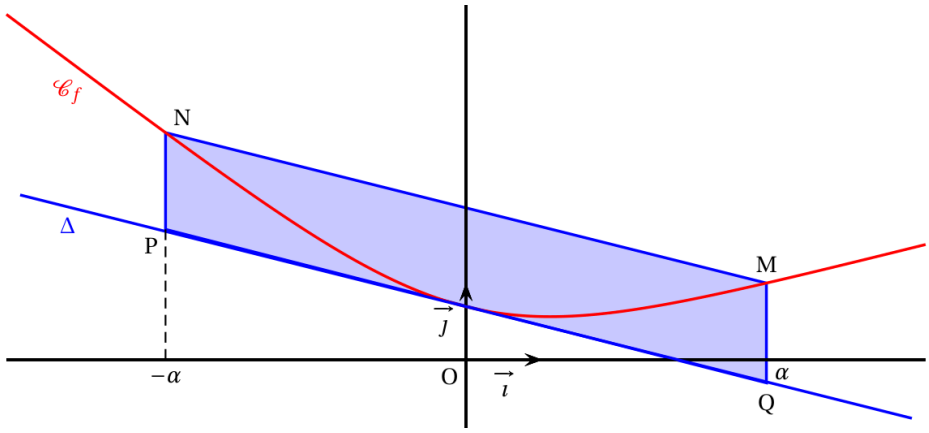
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc, d'après la définition de la limite vers $+\infty$ d'une suite, pour tout réel $A > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à A; donc il existe un rang n_0 tel que si $n \geqslant n_0$, alors $u_{n_0} \geqslant 10^p$.

6. Pour tout n, on a: $u_{n+1} - u_n = 5u_n - 8n + 6 - u_n = 4u_n - 8n + 6$; or $u_n \geqslant 2n$ donc $4u_n - 8n \geqslant 0$ et donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 6$.

On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

7. On considère la suite (v_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - 2n + 1$.

a. En dessous de la fonction suite_u précédente, on a écrit la fonction suite_v ci-dessous :



Lorsqu'on saisit suite_v(5) dans la console, on obtient l'affichage suivant :

>>> suite_v(5)
[1, 5, 25, 125, 625, 3125]

On peut conjecturer que, pour tout n, on a: $v_{n+1} = 5v_n$.

$v_{n+1} = u_{n+1} - 2(n+1) + 1 = 5u_n - 8n + 6 - 2n - 2 + 1 = 5u_n - 10n + 5 = 5(u_n - 2n + 1)$
$= 5v_n$

b. On déduit de la question précédente que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 5$, et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 \times 0 + 1 = 1$.

On a donc, pour tout n: $v_n = v_0 \times q^n = 5^n$.

Pour tout n, $v_n = u_n - 2n + 1$ donc $u_n = v_n + 2n - 1$ et donc $u_n = 5^n + 2n - 1$.

Le sujet complet du bac 2023 (Amérique du Sud, jour 2) corrigé →

Exercice 16 BAC 2025 Une suite définie par deux termes ●●●

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n \end{cases}$$

Partie A : Conjecture

1. Voici le tableau complété (on peut calculer rapidement les termes à la main, puis vérifier à la calculatrice) :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{5}{32}$

2. Par exploration à la calculatrice, les termes de la suite semblent décroitrent, tout en restant strictement positifs, on a $u_{100} \approx 8 \times 10^{-29}$, et $u_{1000} \approx 9 \times 10^{-299}$.

On suppose que la suite converge vers 0.

Partie B : Étude d'une suite auxiliaire

1. On a : $w_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2}$.

2. On va établir la relation de récurrence de (w_n). Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{(n+1)+1} - \frac{1}{2}u_{(n+1)} \quad \text{en appliquant la définition de } w \text{ au rang } (n+1) \\ &= u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} \\ &= \left(u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\right) - \frac{1}{2}u_{n+1} \quad \text{en appliquant la relation de récurrence de } u. \\ &= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \\ &= \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) \\ &= \frac{1}{2}w_n \quad \text{en appliquant la définition de } w \text{ au rang } n \end{aligned}$$

Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n$.

Cette relation de récurrence établit que (w_n) est une suite géométrique, de raison $q = \frac{1}{2}$, et de premier terme $w_0 = \frac{1}{2}$.

3. Puisque la suite est géométrique, on a la propriété classique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = w_0 \times q^n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

4. Soit n un entier naturel. On reprend la définition de (w_n) :

$$\begin{aligned} w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n &\iff \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \quad \text{d'après l'expression explicite de } w_n \\ &\iff u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n \end{aligned}$$

On arrive bien à la relation de récurrence demandée.

5. Pour tout n entier naturel, on pose : P_n l'affirmation : « $u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ».

Initialisation : On a d'une part $u_0 = 0$ et, d'autre part : $0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0 \times 1 = 0$.

L'affirmation est donc vraie au rang 0.

Hérédité : Pour un entier naturel n donné, on suppose que la propriété P_n est vraie, c'est-à-dire :

$u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

On a :

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n \quad \text{d'après la relation de récurrence de la question } \mathbf{B.4} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} \times n\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (1+n) \\
u_{n+1} &= (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{c'est l'affirmation } P_{n+1}
\end{aligned}
$$

Conclusion : L'affirmation P_0 est vraie, et, pour tout entier naturel n, la véracité de l'affirmation P_n est héréditaire, donc, par principe de récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Partie C : Étude de la suite (u_n)

1. Soit n un entier naturel non nul, donc supérieur ou égal à 1 :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \quad \text{d'après la question } \mathbf{B.5.} \\ &= (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times 2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times \big((n+1) - 2n\big) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (1-n) \end{aligned}$$

La différence $u_{n+1} - u_n$ est égale au produit de deux nombres de signe contraire, car, pour n entier naturel supérieur ou égal à 1 :

- **2.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ est positif strictement;
- **3.** $(1-n)$ est négatif ou nul

La différence $u_{n+1} - u_n$ est donc négative ou nulle pour tout n supérieur ou égal à 1, on en déduit donc que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.

4. L'expression du terme général de la suite (u_n) permet d'affirmer que la suite est minorée par 0, car chaque terme est le produit de n, entier naturel, donc positif et de $\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$, strictement positif, car $\frac{1}{2}$ est strictement positif.

De plus, la suite est décroissante, à partir du rang $n = 1$.

La suite est donc décroissante (à partir du rang $n = 1$) et minorée par 0 : on en déduit qu'elle converge, vers une limite ℓ dont on sait que $\ell \geqslant 0$.

5. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation : $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell$.

Résolvons cette équation :

$$\begin{aligned} \ell = \ell - \frac{1}{4}\ell &\iff \ell = \frac{3}{4}\ell \\ &\iff \ell - \frac{3}{4}\ell = 0 \\ &\iff \frac{1}{4}\ell = 0 \\ &\iff \ell = 0 \quad \text{car } \frac{1}{4} \neq 0 \end{aligned}$$

L'équation ayant une unique solution, puisque la limite doit être une solution de l'équation, on a donc la limite de la suite (u_n) qui est 0, l'unique solution de l'équation.

Cela vient confirmer notre conjecture de la **partie A**.

Le sujet complet du bac 2025 (Amérique du Nord (secours), jour 2) corrigé →



La méthode pas à pas est dans la fiche magique **« Démonstration par récurrence »** (Les fiches magiques terminale spé maths, page 20).

LES FICHES MAGIQUES TERMINALE SPÉ MATHS

Révise toute la terminale spé maths avec les fiches magiques



- **41 fiches claires et illustrées** : tout le programme de spécialité maths de terminale, une notion par page.
- **Des vidéos méthode** accessibles par QR code sur les fiches.
- **Des exercices corrigés** après chaque fiche pour vérifier que tout est acquis.

campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

ANNALES BAC MATHS TERMINALE 2027

Prépare le bac avec les vrais sujets



- **75 sujets types** tirés des vrais sujets du bac, classés par chapitre.
- **3 bacs blancs complets** pour s'entraîner en conditions réelles.
- Des **corrigés avec la rédaction attendue**, des conseils et un aide-mémoire.

campusxyz.fr/produit/annales-bac-2027-terminale-spe-maths