Exercices sur les fonctions trigonométriques en terminale spé maths

CAMPUS XYZ

Exercice 1 — Valeurs remarquables ●○○

Donne la valeur exacte de chaque nombre, à l'aide du cercle trigonométrique.

a. $\cos \frac{\pi}{3}$

b. $\sin \frac{5\pi}{6}$

c. $\cos \left(-\frac{\pi}{4}\right)$

d. $\sin \frac{3\pi}{2}$

e. $\cos \frac{2\pi}{3}$

f. $\sin \left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Exercice 2 — Parité et périodicité ●○○

Étudie la parité de chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$, et donne une période.

a. $f(x) = \cos(2x)$

b. $g(x) = \sin(3x)$

c. $h(x) = x \sin x$ (parité seulement)

Exercice 3 Dériver cosinus et sinus ●○○

Calcule la dérivée de chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$.

a. $f(x) = 3\cos x - 2\sin x$

b. $g(x) = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

c. $h(x) = \cos^2 x$

d. $k(x) = x\cos x$

Exercice 4 Équations sur un intervalle ●○○

a. Résous $\cos x = \dfrac{1}{2}$ sur $[0\,;2\pi[$.

b. Résous $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $]-\pi\,;\pi]$.

Exercice 5 Équations sur $\mathbb{R}$ ●●○

a. Résous $\cos x = \cos \dfrac{\pi}{5}$ sur $\mathbb{R}$.

b. Résous $\sin(2x) = \dfrac{1}{2}$ sur $[0\,;\pi]$.

Exercice 6 Inéquations trigonométriques ●●○

a. Résous $\cos x \geqslant \dfrac{1}{2}$ sur $[-\pi\,;\pi]$.

b. Résous $\sin x > 0$ sur $[0\,;2\pi]$.

Exercice 7 — Variations de 2 sin x + x ●●○

Soit $f(x) = 2\sin x + x$ sur $[0\,;2\pi]$.

a. Calcule $f'(x)$ et résous $f'(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;2\pi]$.

b. Dresse le tableau de variations de f.

Exercice 8 — Limites avec sinus et cosinus ●●○

Détermine chaque limite.

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x}$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$

c. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cos x}{x}$

Exercice 9 — Étude de cos(2x) – 2 cos x ●●○

Soit $f(x) = \cos(2x) - 2\cos x$ sur $[0\,;\pi]$.

a. Montre que $f'(x) = 2\sin x\,(1 - 2\cos x)$, en utilisant $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$.

b. Dresse le tableau de variations de f sur $[0\,;\pi]$.

Exercice 10 — Comparer sin x et x ●●○

Soit $g(x) = x - \sin x$ sur $[0\,;+\infty[$.

a. Étudie les variations de g.

b. Déduis-en que $\sin x \leqslant x$ pour tout $x \geqslant 0$.

Exercice 11 Encadrer sin x par deux droites ●●●

a. Étudie la convexité de $\sin$ sur $[0\,;\pi]$.

b. Donne l'équation de la corde joignant les points d'abscisses 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ de la courbe de $\sin$.

c. On admet qu'une courbe concave est au-dessus de ses cordes. Montre que, pour tout $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$.

Exercice 12 Une oscillation amortie ●●●

Soit $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x$ sur $[0\,;+\infty[$.

a. Montre que $-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$ et déduis-en la limite de f en $+\infty$.

b. Montre que $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x)$.

c. Étudie les variations de f sur $[0\,;\pi]$ et donne son maximum.

Exercice 13 TYPE CONTRÔLE **Étude de sin x / (2 + cos x)** ●●●

Soit $f(x) = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$ sur $\mathbb{R}$, de courbe $\mathscr{C}$.

1. Justifie que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montre que f est impaire et 2π-périodique. Sur quel intervalle suffit-il de l'étudier ?
3. Montre que $f'(x) = \dfrac{2\cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$.
4. Dresse le tableau de variations de f sur $[0\,;\pi]$ et donne son maximum.
5. Donne une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ à l'origine.

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE **Le mouvement d'un ressort** ●●●

La position d'une masse accrochée à un ressort est $x(t) = 3\cos(2t) + 4\sin(2t)$ (en cm), où $t \geqslant 0$ est en secondes.

1. Calcule $x(0)$, puis $x'(t)$ et $x'(0)$.
2. Montre que $x''(t) + 4x(t) = 0$ pour tout t.
3. Soit $\varphi \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos\varphi = \dfrac{3}{5}$ et $\sin\varphi = \dfrac{4}{5}$. En utilisant $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$, montre que $x(t) = 5\cos(2t - \varphi)$.
4. Déduis-en l'amplitude et la période du mouvement.
5. À quel instant $t > 0$ la masse atteint-elle pour la première fois sa position maximale ? Donne une valeur approchée sachant que $\varphi \approx 0{,}927$.

Exercice 15 BAC 2026 Une fonction avec x cos x – sin x ●●●

Bac spé maths 2026, Asie, jour 1, exercice 4

1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ par :

$$g(x) = x\cos(x) - \sin(x)$$

On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ et on note g' sa dérivée.

a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0; 2\pi]$, on a :

$$g'(x) = -x\sin(x)$$

b. On donne le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ ci-dessous.

Justifier chacun des éléments qui figurent dans ce tableau de variations.

des éléments qui figurent dans ce tableau de variations.

x	0	π	2π
g	0 ↘	$-\pi$	↗ 2π

c. Montrer qu'il existe une unique valeur réelle α dans l'intervalle $[\pi; 2\pi]$ telle que $g(\alpha) = 0$.

d. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; 2\pi]$ par :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; 2\pi]$ et on note f' sa dérivée.

a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0; 2\pi]$ on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

b. Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $]0; 2\pi]$.

c. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; 2\pi]$.

d. Déterminer la limite de f en 0. On pourra utiliser le taux d'accroissement de la fonction sinus en 0.

3. On considère deux nombres réels r et s qui vérifient l'inégalité : $0 < r < s < \pi$.

Montrer que :

$$\frac{r}{s} < \frac{\sin(r)}{\sin(s)}$$

Exercice 16 BAC 2025 La fonction $e^x \sin x$ ●●●

Bac spé maths 2025, Amérique du Nord, jour 2, exercice 4

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x \sin(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

PARTIE A

1.

a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$,

$$f'(x) = \mathrm{e}^x[\sin(x) + \cos(x)].$$

b. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$

2.

a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

b. Démontrer que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

c. En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $\mathrm{e}^x \sin(x) \geqslant x$.

3. Justifier que le point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction f est un point d'inflexion.

PARTIE B

On note

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. En intégrant par parties l'intégrale I de deux manières différentes, établir les deux relations suivantes :

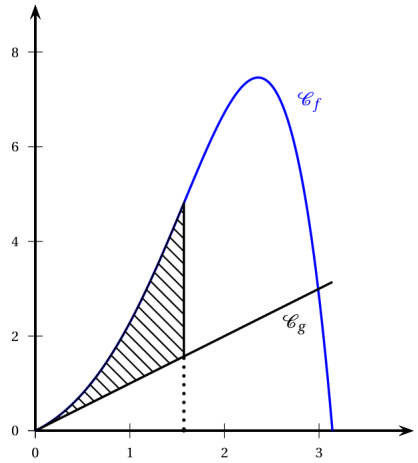
   $$I = 1 + J \qquad \text{et} \qquad I = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - J.$$

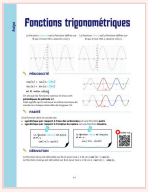
2. En déduire que $I = \dfrac{1 + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2}$.

3. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$.

   Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées dans le repère orthogonal ci-dessous sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.

   Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré situé entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$.





LA FICHE MAGIQUE QUI VA AVEC

« Fonctions trigonométriques »

Cosinus, sinus, parité, périodicité et dérivées réunis sur une seule fiche.

Les fiches magiques terminale spé maths : campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

CAMPUS XYZ

Corrigés

Exercices sur les fonctions trigonométriques en terminale spé maths

Exercices sur les fonctions trigonométriques en terminale spé maths : corrigés

CAMPUS XYZ

Exercice 1 — Valeurs remarquables ●○○

a. $\dfrac{1}{2}$

b. $\sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{\pi}{6} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

c. $\cos$ est paire : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d. -1

e. $\cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{3} = \mathbf{-\dfrac{1}{2}}$

f. $\sin$ est impaire : $-\dfrac{1}{2}$

Exercice 2 — Parité et périodicité ●○○

a. $f(-x) = \cos(-2x) = \cos(2x) = f(x)$: **paire**. $f(x+\pi) = \cos(2x+2\pi) = f(x)$: **période** π.

b. $g(-x) = \sin(-3x) = -g(x)$: **impaire**. $g\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \sin(3x+2\pi) = g(x)$: **période** $\dfrac{2\pi}{3}$.

c. $h(-x) = (-x)\sin(-x) = (-x)(-\sin x) = h(x)$: **paire**.

> Une fonction paire a une courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ; une fonction T-périodique se répète sur chaque intervalle de longueur T.

Exercice 3 — Dériver cosinus et sinus ●○○

$\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$, et $\big(\cos(ax+b)\big)' = -a\sin(ax+b)$,
$\big(\sin(ax+b)\big)' = a\cos(ax+b)$.

a. $f'(x) = -3\sin x - 2\cos x$.

b. $g'(x) = 2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

c. $\left(u^2\right)' = 2u'u$: $h'(x) = -2\sin x \cos x$.

d. $k'(x) = \cos x - x\sin x$.

Exercice 4 — Équations sur un intervalle ●○○

a. Deux points du cercle ont pour abscisse $\dfrac{1}{2}$: $S = \left\{\dfrac{\pi}{3}\,;\dfrac{5\pi}{3}\right\}$.

b. Deux points ont pour ordonnée $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$: $S = \left\{-\dfrac{3\pi}{4}\,;-\dfrac{\pi}{4}\right\}$.

Exercice 5 — Équations sur $\mathbb{R}$ ●●○

a. $\cos x = \cos a \iff x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$: $x = \dfrac{\pi}{5} + 2k\pi$ **ou**

$x = -\dfrac{\pi}{5} + 2k\pi$.

b. On pose $X = 2x \in [0\,;2\pi]$: $\sin X = \dfrac{1}{2} \iff X = \dfrac{\pi}{6}$ ou $X = \dfrac{5\pi}{6}$. $S = \left\{\dfrac{\pi}{12}\,;\dfrac{5\pi}{12}\right\}$.

Exercice 6 — Inéquations trigonométriques ●●○

a. Sur le cercle, les points d'abscisse au moins $\dfrac{1}{2}$ forment l'arc entre $-\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{3}$: $S = \left[-\dfrac{\pi}{3}\,;\dfrac{\pi}{3}\right]$.

b. Ordonnée strictement positive : le demi-cercle du haut, $S =]0\,;\pi[$.

Exercice 7 — Variations de 2 sin x + x ●●○

a. $f'(x) = 2\cos x + 1 \geqslant 0 \iff \cos x \geqslant -\dfrac{1}{2} \iff x \in \left[0\,;\dfrac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{4\pi}{3}\,;2\pi\right]$.

b. f **croît sur** $\left[0\,;\dfrac{2\pi}{3}\right]$, **décroît sur** $\left[\dfrac{2\pi}{3}\,;\dfrac{4\pi}{3}\right]$, **croît sur** $\left[\dfrac{4\pi}{3}\,;2\pi\right]$, avec $f(0) = 0$,

$f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3} + \dfrac{2\pi}{3} \approx 3{,}83$, $f\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} + \dfrac{4\pi}{3} \approx 2{,}46$, $f(2\pi) = 2\pi$.

Exercice 8 — Limites avec sinus et cosinus ●●○

a. $\dfrac{\sin(3x) - \sin 0}{x - 0}$ est le taux d'accroissement de $x \mapsto \sin(3x)$ en 0 : limite $3\cos 0 = \mathbf{3}$.

b. Taux d'accroissement de $\cos$ en 0 : limite $\cos'(0) = -\sin 0 = \mathbf{0}$.

c. $-\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\cos x}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$ pour $x > 0$: 0 par les gendarmes.

Exercice 9 — Étude de cos(2x) – 2 cos x ●●○

a. $f'(x) = -2\sin(2x) + 2\sin x = -4\sin x\cos x + 2\sin x = 2\sin x\,(1 - 2\cos x)$.

b. Sur $[0\,;\pi]$, $\sin x \geqslant 0$; $1 - 2\cos x \geqslant 0 \iff \cos x \leqslant \dfrac{1}{2} \iff x \geqslant \dfrac{\pi}{3}$. f **décroît sur** $\left[0\,;\dfrac{\pi}{3}\right]$ **et croît sur** $\left[\dfrac{\pi}{3}\,;\pi\right]$, avec $f(0) = -1$, $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{3}{2}$, $f(\pi) = 3$.

Exercice 10 — Comparer sin x et x ●●○

a. $g'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0$: g **est croissante**.

b. $g(0) = 0$, donc $g(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$: $\sin x \leqslant x$.

Exercice 11 — Encadrer sin x par deux droites ●●●

a. $\sin'' = -\sin \leqslant 0$ sur $[0\,;\pi]$: sin **est concave sur** $[0\,;\pi]$.

b. Elle passe par $(0\,;0)$ et $\left(\dfrac{\pi}{2}\,;1\right)$: $y = \dfrac{2}{\pi}x$.

c. Concave : la courbe est au-dessus de sa corde sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, d'où $\sin x \geqslant \dfrac{2}{\pi}x$; et en dessous de sa tangente en 0, $y = x$, d'où $\sin x \leqslant x$.

Exercice 12 — Une oscillation amortie ●●●

a. $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$. Les deux bornes tendent vers 0 : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

b. $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\sin x + \mathrm{e}^{-x}\cos x = \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x)$.

c. Sur $[0\,;\pi]$, $\cos x - \sin x \geqslant 0 \iff x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$. f **croît sur** $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$, **décroît sur** $\left[\dfrac{\pi}{4}\,;\pi\right]$, maximum

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}} \approx 0{,}32.$$

Exercice 13 — TYPE CONTRÔLE — Étude de sin x / (2 + cos x) ●●●

1. $\cos x \geqslant -1$, donc $2 + \cos x \geqslant 1 > 0$: **le dénominateur ne s'annule jamais.**

2. $f(-x) = \dfrac{-\sin x}{2 + \cos x} = -f(x)$ et $f(x + 2\pi) = f(x)$. **On l'étudie sur** $[0\,;\pi]$, puis on complète par symétrie par rapport à l'origine et par translations.

3.

$$f'(x) = \frac{\cos x(2 + \cos x) - \sin x \times (-\sin x)}{(2 + \cos x)^2} = \frac{2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(2 + \cos x)^2} = \frac{2\cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}.$$

4. $2\cos x + 1 \geqslant 0 \iff x \leqslant \dfrac{2\pi}{3}$ sur $[0\,;\pi]$. f **croît sur** $\left[0\,;\dfrac{2\pi}{3}\right]$, **décroît sur** $\left[\dfrac{2\pi}{3}\,;\pi\right]$, avec

$f(0) = f(\pi) = 0$ et maximum $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58$.

5. $f(0) = 0$ et $f'(0) = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$: $y = \dfrac{x}{3}$.

Exercice 14 TYPE CONTRÔLE Le mouvement d'un ressort ●●●

1. $x(0) = 3$. $x'(t) = -6\sin(2t) + 8\cos(2t)$, donc $x'(0) = 8$.
2. $x''(t) = -12\cos(2t) - 16\sin(2t) = -4\big(3\cos(2t) + 4\sin(2t)\big) = -4x(t)$.
3. $5\cos(2t - \varphi) = 5\cos(2t)\cos\varphi + 5\sin(2t)\sin\varphi = 3\cos(2t) + 4\sin(2t) = x(t)$.
4. **Amplitude 5 cm** (le cosinus varie entre -1 et 1) et **période $\pi \approx 3{,}14$ s** (car $\cos(2t - \varphi)$ est π-périodique).
5. $x(t) = 5 \iff \cos(2t - \varphi) = 1 \iff 2t - \varphi = 2k\pi$. Le premier instant positif est $t = \dfrac{\varphi}{2}$, soit **environ $0{,}46$ s**.

> L'équation $x'' + 4x = 0$ est une équation différentielle du second ordre : elle décrit tous les oscillateurs (ressorts, pendules, circuits électriques).

Exercice 15 BAC 2026 Une fonction avec x cos x – sin x ●●●

1.

a. On dérive les deux termes de g, l'un des deux étant un produit.

On rappelle les dérivées connues : $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.

$\forall x \in [0; 2\pi], \quad g'(x) = 1 \times \cos(x) + x \times \big(-\sin(x)\big) - \cos(x) = -x\sin(x).$

b. Commençons par calculer les images de 0, π et 2π. On connaît les valeurs particulières des fonctions sinus et cosinus.

- **c.** $g(0) = 0 \times \cos(0) - \sin(0) = 0 \times 1 - 0 = 0$;
- **d.** $g(\pi) = \pi \times \cos(\pi) - \sin(\pi) = \pi \times (-1) - 0 = -\pi$;
- **e.** $g(2\pi) = 2\pi \times \cos(2\pi) - \sin(2\pi) = 2\pi \times 1 - 0 = 2\pi$.

Les trois images sont donc validées.

Étudions maintenant les variations de g.

- **f.** sur $[0; 2\pi]$, $-x$ est négatif, et même strictement négatif sur $]0; 2\pi]$;
- **g.** sur $[0; \pi]$, $\sin(x)$ est positif, et même strictement positif sur $]0; \pi[$ (c'est la moitié du cercle trigonométrique qui est au dessus de l'axe des abscisses, donc les sinus sont positifs);
- **h.** sur $[\pi; 2\pi]$, $\sin(x)$ est négatif, et même strictement négatif sur $]\pi; 2\pi[$ (c'est la moitié du cercle trigonométrique qui est en-dessous de l'axe des abscisses, donc les sinus sont négatifs).

On peut résumer cela avec un tableau de signes. Quand la dérivée est à valeurs négatives, la fonction est strictement décroissante (car la dérivée ne s'annule que ponctuellement), et quand la dérivée est à valeurs positives, la fonction est strictement croissante.

On a donc :

donc :

x	0		π		2π
signe de $-x$	0	$-$	‖	$-$	‖
signe de $\sin(x)$	0	$+$	0	$-$	0
signe de $g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
variations de g	0	↘		↗	2π

On a ainsi justifié chacun des éléments qui figurent dans ce tableau de variations.

i. La fonction g est continue (car dérivable) sur $[\pi; 2\pi]$, sur cet intervalle, elle est strictement croissante.

De plus, 0 est une valeur intermédiaire entre $f(\pi) = -\pi$ et $f(2\pi) = 2\pi$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc une unique solution à l'équation $g(x) = 0$ dans l'intervalle $[0; 2\pi]$, solution que l'on note α.

j. On peut étoffer le tableau de variations précédent avec α

x	0		π		α		2π
variations de g	0	↘	$-\pi$	↗	0	↗	2π

Sur $[0; \alpha]$, la fonction g est majorée par 0, elle est donc à valeurs négatives, puis sur $[\alpha; 2\pi]$, elle est minorée par 0, et donc g est à valeurs positives.

On a donc le tableau de signes suivant :

x	0		α		2π
signe de $g(x)$	0	$-$	0	$+$	

2.

a. On va utiliser la formule de dérivation d'un quotient :

$$\forall x \in]0; 2\pi], \quad f'(x) = \frac{\cos(x) \times x - \sin(x) \times 1}{x^2} = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

b. La fonction f' est le quotient de la fonction g étudiée à la question **1.** par la fonction carré. On a donc :

donc :

x	0		α		2π
signe de $g(x)$	0	$-$	0	$+$	
signe de x^2	0	$+$		$+$	
signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

c. On en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha; 2\pi]$.

d. Pour tout réel x non nul, le taux d'accroissement de la fonction sinus entre 0 et x est :

$$\frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \frac{\sin(x) - 0}{x} = \frac{\sin(x)}{x} = f(x)$$

Comme la fonction sinus est dérivable en 0, ce taux d'accroissement admet donc une limite finie quand x tend vers 0. Par définition du nombre dérivé, cette limite est le nombre dérivé de la

fonction sinus en 0.

On a donc : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \sin'(0) = \cos(0) = 1.$

f tend vers 1 quand x tend vers 0.

3. On considère deux nombres réels r et s qui vérifient l'inégalité : $0 < r < s < \pi$.

Comme $\alpha \in [\pi; 2\pi]$, on en déduit que : $\pi \leqslant \alpha$.

Donc les réels r et s sont dans un intervalle où la fonction f est strictement décroissante, et la fonction sinus à valeurs strictement positives :

$$\begin{aligned} 0 < r < s < \pi &\implies f(r) > f(s) \\ &\implies \frac{\sin(r)}{r} > \frac{\sin(s)}{s} \\ &\implies \frac{\sin(r)}{r \times \sin(s)} > \frac{1}{s} \quad \text{car } s \in]0; \pi[\text{ donc } \sin(s) > 0 \\ &\implies \frac{\sin(r)}{\sin(s)} > \frac{r}{s} \quad \text{car } r \in]0; \pi[\text{ donc } r > 0 \end{aligned}$$

On a bien établi, pour r et s vérifiant $0 < r < s < \pi$: $\dfrac{r}{s} < \dfrac{\sin(r)}{\sin(s)}$

Le sujet complet du bac 2026 (Asie, jour 1) corrigé →



La méthode pas à pas est dans la fiche magique **« Fonctions trigonométriques »** (Les fiches magiques terminale spé maths, page 44).

Exercice 16 BAC 2025 La fonction $e^x \sin x$ ●●●

PARTIE A

1.

a. Pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$:

$f'(x) = \mathrm{e}^x \times \sin(x) + \mathrm{e}^x \times \cos(x) = \mathrm{e}^x\big(\sin(x) + \cos(x)\big)$.

b. Par connaissance des fonctions trigonométriques, pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$,

$\cos(x) \geqslant 0$ et $\sin(x) \geqslant 0$

On précise que d'une part, $\sin(x) = 0$ seulement pour $x = 0$, et $cos(0) = 1$, et d'autre part,

$\cos(x) = 0$ seulement pour $x = \frac{\pi}{2}$, et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, donc les fonctions sinus et cosinus ne s'annulent pas en même temps.

La somme de deux réels positifs, dont l'un au moins est strictement positif est strictement positive, donc:

pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $\quad \cos(x) + \sin(x) > 0$.

D'autre part, pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$

donc pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $\quad f'(x) > 0$ en tant que produit de deux facteurs strictement positifs,

donc la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

2.

a. L'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est :

$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = f'(0)x + f(0)$.

$f(0) = \mathrm{e}^0 \sin(0) = 1 \times 0 = 0$; (donné dans l'énoncé)

$f'(0) = \mathrm{e}^0\left(\sin(0) + \cos(0)\right) = 1 \times (0 + 1) = 1$ (donné dans l'énoncé)

L'équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est donc $y = 1x + 0$ soit $y = x$.

b. En anticipant la question **3.**, on va étudier la convexité de la fonction sur $[0\ ;\ \pi]$.

Pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\pi]$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \mathrm{e}^x\left(\sin(x) + \cos(x)\right) + \mathrm{e}^x\left(\cos(x) - \sin(x)\right) \\ &= \mathrm{e}^x\left(\sin(x) + \cos(x) + \cos(x) - \sin(x)\right) \\ &= 2\mathrm{e}^x \cos(x) \end{aligned}$$

.

On a le tableau de signes suivant :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	
		[		]	

donc pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $f''(x) > 0$

d'où la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

c. La courbe représentative d'une fonction convexe est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier ici, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, d'équation $y = x$ (d'après la question précédente).

On a donc, pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $\quad \mathrm{e}^x \sin(x) \geqslant x$.

3. On a vu précédemment que la dérivée seconde de f s'annule en changeant de signe en $x = \frac{\pi}{2}$

donc le point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction f est un point d'inflexion.

PARTIE B

On note

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. $x \longmapsto \mathrm{e}^x \sin(x)$ est de la forme uv' avec $\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad u'(x) = \mathrm{e}^x \\ v'(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad v(x) = -\cos(x) \end{cases}$

Les fonctions u et v sont continues et dérivables sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$I = \Big[-\cos(x)\mathrm{e}^x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x(-\cos(x))\,\mathrm{d}x$$

d'où $= -\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + \cos(0)\mathrm{e}^0 + \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\cos(x)\,\mathrm{d}x$

$= 0 + 1 + J$

$= 1 + J$

$x \longmapsto \mathrm{e}^x \sin(x)$ est de la forme uv' avec $\begin{cases} u(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad u'(x) = \cos(x) \\ v'(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad v(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$

Les fonctions u et v sont continues et dérivables sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$I = \Big[\sin(x)\mathrm{e}^x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

d'où $= -\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + \sin(0)\mathrm{e}^0 - J$

$= \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - J$

On a donc bien :

$$I = 1 + J \qquad \text{et} \qquad I = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - J.$$

2. En ajoutant les deux équations précédentes on obtient : $2I = 1 + J + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - J$.

d'où $I = \dfrac{1 + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2}$.

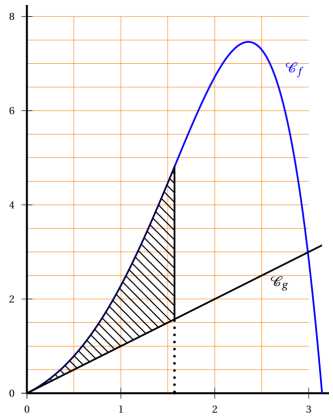
3. D'après la question **Partie A 2.c.** pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$,

$\mathrm{e}^x \sin(x) \geqslant x$ c'est à dire $f(x) \geqslant g(x)$.

L'aire du domaine hachuré situé entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$ est donc égale à l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\mathrm{e}^x \sin(x) - x\right) \mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\mathrm{e}^x \sin(x) - x\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= I - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 0 \\
&= \frac{1+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}$$

L'aire cherchée est donc $\dfrac{1+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \dfrac{\pi^2}{8}$ u.a. ($\approx 1{,}67$ u. a.)



Le sujet complet du bac 2025 (Amérique du Nord, jour 2) corrigé →



La méthode pas à pas est dans la fiche magique **« Fonctions trigonométriques »** (Les fiches magiques terminale spé maths, page 44).

LES FICHES MAGIQUES TERMINALE SPÉ MATHS

Révise toute la terminale spé maths avec les fiches magiques



- **41 fiches claires et illustrées** : tout le programme de spécialité maths de terminale, une notion par page.
- **Des vidéos méthode** accessibles par QR code sur les fiches.
- **Des exercices corrigés** après chaque fiche pour vérifier que tout est acquis.

campusxyz.fr/produit/les-fiches-magiques-terminale

ANNALES BAC MATHS TERMINALE 2027

Prépare le bac avec les vrais sujets



- **75 sujets types** tirés des vrais sujets du bac, classés par chapitre.
- **3 bacs blancs complets** pour s'entraîner en conditions réelles.
- Des **corrigés avec la rédaction attendue**, des conseils et un aide-mémoire.

campusxyz.fr/produit/annales-bac-2027-terminale-spe-maths