Stage Bac - du 15 au 19 avril 2024

Séance 4

Géométrie dans l'espace

CAMPUS XYZ

Programme de la séance

1. Représentation paramétrique de droites et équations de plans

   ↳ Exercice type Bac

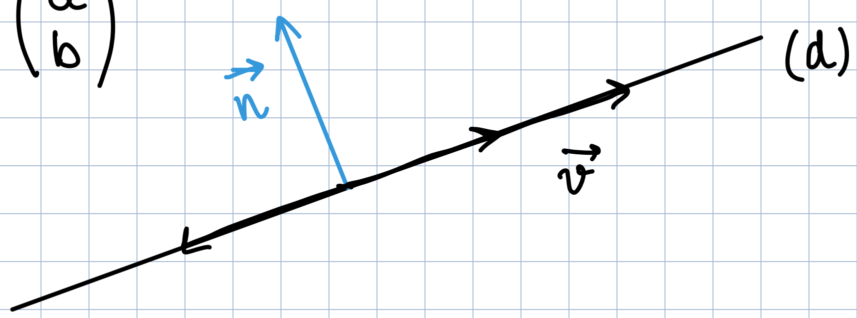
2. Vecteurs dans l'espace et produit scalaire

   ↳ Exercice type Bac

(d) $ax + by + c = 0$ (P)

vecteur normal à la droite

$\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$



Rappel de cours

DROITE
Représentation paramétrique

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ appartenant à une droite Δ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

$M(x,y,z) \in \Delta$ si et seulement si il existe t tel que

$$\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Ce système d'équations avec $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite Δ

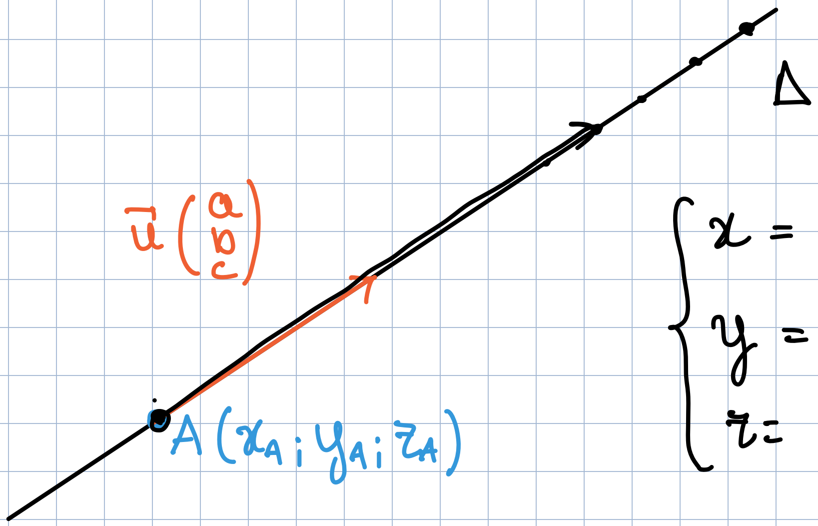
- $(d_1)\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -5 + 2t \\ z = 3 - 4t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ $A(2;-5;3)$ $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\-4\end{pmatrix}$

- $(d_2)\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 6 - 4t \\ z = 8 + 8t \end{cases}$ $B(1;6;8)$ $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-4\\8\end{pmatrix}$

$\vec{v} = -2\vec{u}$

- (d_3) passe par $A(1;0;-2)$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$.

$$d_3 \quad \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

Comment montrer que…

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires**	$\Rightarrow$ s'il existe un réel λ non nul tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$
A, B et C sont **alignés**	$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires**	$\Rightarrow$ Pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires, non nuls, s'il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ « $\vec{w}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ »
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux**	$\Rightarrow$ Le produit scalaire est nul $\vec{u}.\vec{v} = 0$
d_1 et d_2 ne sont **pas sécantes**	$\Rightarrow$ Égaliser leur équation paramétrique et montrer qu'il n'est pas possible de trouver des paramètres associés

Représentation paramétrique de droites et équations de plans

Sujet : Polynésie 13 mars 2023

EXERCICE 2 5 points **Thème : géométrie dans l'espace**

L'espace est muni d'un repère orthonormée $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère :

- d_1 la droite passant par le point H(2 ; 3 ; 0) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$;
- d_2 la droite de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & 2k-3 \\ y & = & k \\ z & = & 5 \end{array}\right. \quad \text{où } k \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

Le but de cet exercice est de déterminer une représentation paramétrique d'une droite Δ qui soit perpendiculaire aux droites d_1 et d_2.

1. **a.** Déterminer un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite d_2.
   b. Démontrer que les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.
   c. Démontrer que les droites d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.
   d. Quelle est la position relative des droites d_1 et d_2 ?

1a. $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

1b. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires car il n'y a pas de facteur multiplicatif commun entre les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1c. $(d_1)\left\{\begin{array}{l} x = 2+t \\ y = 3-t \\ z = t \end{array}\right.$ $t \in \mathbb{R}$ $\quad (d_2)\left\{\begin{array}{l} x = 2k-3 \\ y = k \\ z = 5 \end{array}\right.$ $k \in \mathbb{R}$

M ?
$$\left\{\begin{array}{l} x = 2+t = 2k-3 \\ y = 3-t = k \\ z = t = 5 \end{array}\right.$$

$t = 5$

$3-5 = -2$ $\quad k = -2$

$2+5 = 2\times(-2)-3$
$7 = -7$?

égalité fausse

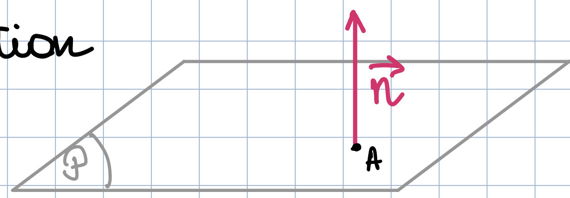
les droites d_1 et d_2 ne sont donc pas parallèles

1d. d_1 et d_2 ne sont pas coplanaires.

Équation cartésienne d'un plan

$\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur et $A(x_A, y_A, z_A)$ un point. Le plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ a pour équation

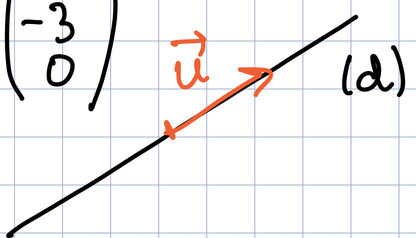
$$ax + by + cz + d = 0$$



Position relative d'une droite et d'un plan

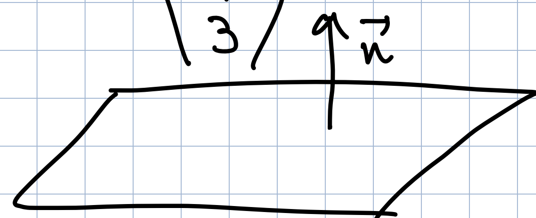
$$(d) \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -3t \\ z = 5 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$



$(\mathcal{P}) : 2x - y + 3z + 10 = 0$

$\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$



$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 3 \times 2 + (-3)(-1) + 0 \times 3$$
$$= 6 + 3 + 0 = 9 \neq 0$$

(d) et $(\mathcal{P})$ sont sécants et leur intersection est un point.

- d_1 la droite passant par le point H(2 ; 3 ; 0) et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$;

- d_2 la droite de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2k-3 \\ y &=& k \\ z &=& 5 \end{array}\right. \quad \text{où } k \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

Le but de cet exercice est de déterminer une représentation paramétrique d'une droite Δ qui soit perpendiculaire aux droites d_1 et d_2.

1. **a.** Déterminer un vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ de la droite d_2.

b. Démontrer que les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

c. Démontrer que les droites d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.

d. Quelle est la position relative des droites d_1 et d_2 ?

2. **a.** Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$.

b. On considère le plan P passant par le point H et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$.
On admet qu'une équation cartésienne de ce plan est :

$$5x+4y-z-22=0.$$

Démontrer que l'intersection du plan P et de la droite d_2 est le point M(3 ; 3 ; 5).

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$. $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

2a. $\vec{w}.\vec{u} = -1\times1 + (-1)\times2 + 1\times3 = 0$

$\vec{w}.\vec{v} = (-1)\times2 + 1\times2 + 0\times3 = 0$

donc $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

2b.
$$\left\{\begin{array}{l} x = 2k-3 \\ y = k \\ z = 5 \\ 5x+4y-z-22=0 \end{array}\right.$$

$5(2k-3)+4k-5-22=0$

$10k-15+4k-27=0$

$14k-42=0$

$7k=21$

$k=\frac{21}{7}=3$

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2\times3-3 = 3 \\ y = 3 \\ z = 5 \end{array}\right.$$

M(3 ; 3 ; 5)

- d_1 la droite passant par le point H$(2\,;3\,;0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$;

- d_2 la droite de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2k-3 \\ y &=& k \\ z &=& 5 \end{array}\right. \quad \text{où } k \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

Le but de cet exercice est de déterminer une représentation paramétrique d'une droite Δ qui soit perpendiculaire aux droites d_1 et d_2.

1. **a.** Déterminer un vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ de la droite d_2.
   b. Démontrer que les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.
   c. Démontrer que les droites d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.
   d. Quelle est la position relative des droites d_1 et d_2 ?

2. **a.** Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$.
   b. On considère le plan P passant par le point H et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$.
   On admet qu'une équation cartésienne de ce plan est :

$$5x+4y-z-22=0.$$

   Démontrer que l'intersection du plan P et de la droite d_2 est le point M$(3\,;3\,;5)$.

3. Soit Δ la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$ passant par le point M.
   Une représentation paramétrique de Δ est donc donnée par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -r+3 \\ y &=& 2r+3 \\ z &=& 3r+5 \end{array}\right. \quad \text{où } r \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

   a. Justifier que les droites Δ et d_1 sont perpendiculaires en un point L dont on déterminera les coordonnées.
   b. Expliquer pourquoi la droite Δ est solution du problème posé.

① (d_1) et (Δ) sont orthogonales

② montrons qu'elles se coupent en un point L.

CAMPUS XYZ

$$d_1 \begin{cases} x = 2+t = -r+3 \\ y = 3-t = 2r+3 \\ z = t = 3r+5 \end{cases}$$

$$t = 3r+5$$

$$3 - (3r+5) = 2r+3$$

$$3 - 3r - 5 = 2r+3$$

$$-5 = +5r \iff r = -1$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 2\times(-1)+3 = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

$x = 1+3 = 4$ ✓

$2 + (3(-1)+5) = 4$ ✓

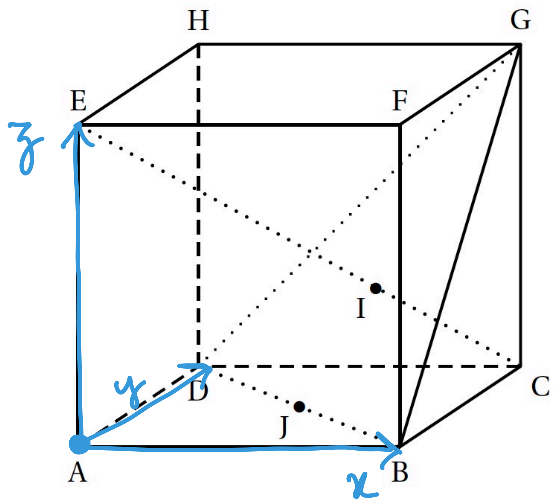
l'égalité est vraie donc (d_1) et (Δ) sont sécantes en un point $L(4;1;2)$

2. Vecteurs dans l'espace et produit scalaire

Sujet : Métropole 20 mars 2023

EXERCICE 4 **5 points**

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1.
On appelle I le point d'intersection du plan (GBD) avec la droite (EC).
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1. Donner dans ce repère les coordonnées des points E, C, G.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).

1. $E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

2. $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\0-1\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$$(EC)\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t+1 \end{cases}$$

$x_E + 1t = 0+t = t$
$y_E + 1t = 0+t = t$
$z_E - 1t = 1-t$

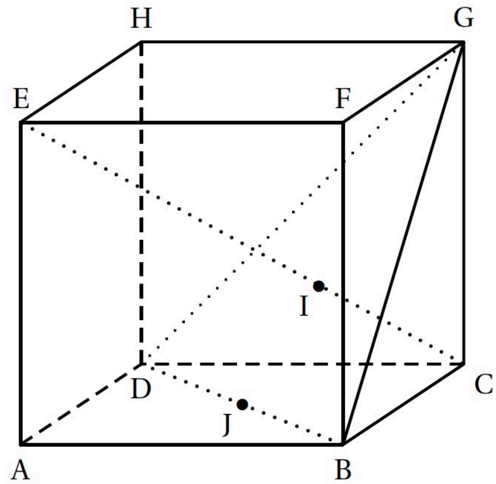
CAMPUS XYZ

- Un plan est défini par : soit...
  - 3 points non alignés
  - 2 droites sécantes
  - 2 droites disjointes parallèles
  - un point et 2 vecteurs non colinéaires

- Pour montrer qu'une droite ($\vec{u}$ vecteur directeur) est orthogonale à un plan $(\mathcal{P})$.
  1. On identifie 2 vecteurs de $(\mathcal{P})$: $\vec{v}$ et $\vec{w}$
  2. On calcule le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ et $\vec{u}.\vec{w}$
  3. On conclue

EXERCICE 4 **5 points**

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1.
On appelle I le point d'intersection du plan (GBD) avec la droite (EC).
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1. Donner dans ce repère les coordonnées des points E, C, G.

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).

3. Démontrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (GBD).

3. $\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{GB} = 1\times0 + 1\times(-1) + (-1)\times(-1) = 0$ ✓

$\overrightarrow{GD}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{GD} = 1\times(-1) + 1\times0 + (-1)(-1) = 0$ ✓

4. **a.** Justifier qu'une équation cartésienne du plan (GBD) est :

$$x + y - z - 1 = 0.$$

b. Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

c. En déduire que la distance du point E au plan (GBD) est égale à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$\vec{EC}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\quad (EC)\begin{cases}x = t\\ y = t\\ z = 1-t\end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ $\quad B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

4a. $1x + 1y + (-1)z + d = 0$

$x + y - z + d = 0$

$B \in (GBD)$ donc $x_B + y_B - z_B + d = 0$

$1 + 0 - 0 + d = 0$

$d = -1$

(GBD) $x + y - z - 1 = 0$

CAMPUS XYZ

b. On appelle I le point d'intersection du plan (GBD) avec la droite (EC).

Donc les coordonnées de I sont solutions du système : $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1-t \\ x+y-z-1 = 0 \end{cases}$

On a donc : $t + t - (1-t) - 1 = 0$ donc $t = \dfrac{2}{3}$.

On en déduit les coordonnées de I : $x_{\text{I}} = t = \dfrac{2}{3}$, $y_{\text{I}} = t = \dfrac{2}{3}$ et $z_{\text{I}} = 1 - t = \dfrac{1}{3}$, soit $\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$.

c. La droite (EC) est orthogonale au plan (GDB) donc la distance du point E au plan (GDB) est la longueur EI.

$\text{EI}^2 = \left(\dfrac{2}{3} - 0\right)^2 + \left(\dfrac{2}{3} - 0\right)^2 + \left(\dfrac{1}{3} - 1\right)^2 = \dfrac{4}{9} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{4}{9} = \dfrac{12}{9}$; donc $\text{EI} = \sqrt{\dfrac{12}{9}} = \dfrac{\sqrt{12}}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

La distance du point I au plan (GDB) est donc de $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.