

Hong My
@campus_xyz

Spécial
BAC 2025

Mes fiches² magiques



TOUT CE QU'IL FAUT SAVOIR
POUR LE BAC DE MATHS EN
20 FICHES



LISTE DES FICHES

MAGIQUES



SUITES NUMÉRIQUES

SECOND DEGRÉ

CONTINUITÉ ET LIMITES

DÉRIVATION

EXPONENTIELLE ET LOGARITHME

PRIMITIVES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

GÉOMÉTRIE

PROBABILITÉS



BONUS

5 TEMPLATES POUR FAIRE TES PROPRES FICHES

Suites

SUITES

arithmétique

Définition

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Formule explicite

$$u_n = u_0 + nr$$

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

r = raison

Sens de variation

$$r = u_{n+1} - u_n \begin{cases} > 0 : \text{croissante} \\ = 0 : \text{constante} \\ < 0 : \text{décroissante} \end{cases}$$

Somme

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Cas particulier

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

géométrie

Définition

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

Formule explicite

$$u_n = u_0 \times q^n$$

$$u_n = u_p \times q^{(n-p)}$$

q = raison

Sens de variation

$$q = \frac{u_{n+1}}{u_n} \begin{cases} > 1 \text{ croissante} \\ 0 < q < 1 \text{ décroissante} \\ = 1 \text{ constante} \\ < 0 \text{ non monotone} \end{cases}$$

Somme

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} u_0, q \neq 1$$

notes

SUITES

DÉFINITION

Une suite est une fonction définie pour tout entier $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour chaque n , on associe le nombre

formule explicite

$$U_n = f(n)$$

terme
général

une fonction
de n

relation de récurrence

$$\begin{cases} U_{n_0} \leftarrow \text{premier terme} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

fonction
de U_n

SENS DE VARIATION

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, si pour tout $n \geq n_0$,

$U_{n+1} \geq U_n$, la suite est croissante
 $U_{n+1} \leq U_n$, la suite est décroissante

VOCABULAIRE

(U_n) est $\begin{cases} \text{monotone} \begin{cases} \text{croissante} \\ \text{décroissante} \end{cases} \\ \text{non monotone (exemples : } (-1)^n, \sin(n)) \end{cases}$

démonstration par récurrence

• EN • 3 • ÉTAPES •

Le raisonnement par récurrence s'utilise lorsqu'on cherche à démontrer une proposition qui s'applique aux entiers (et non les réels!).

LE PRINCIPLE

$n_0 \in \mathbb{N}$, soit P_n la proposition définie pour tout $n \geq n_0$

1 INITIALISATION

On montre que la propriété est vraie au rang n_0 :

P_{n_0} est vraie

2 HÉRÉDITÉ

Pour tout $k \geq n_0$, on montre que « (P_k) est vraie» implique que « (P_{k+1}) est vraie»

3 CONCLUSION

On conclut que pour tout $n \geq n_0$, la proposition (P_n) est vraie.

UN EXEMPLE

Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$

Démontrer que $u_n = \frac{2}{2n+1}$ (P_n)

$$n_0 = 0$$

$$u_0 = \frac{2}{2 \times 0 + 1} = 2$$

(P_0) est donc vraie

Supposons (P_k) vraie: $u_k = \frac{2}{2k+1}$

$$\begin{aligned} \text{D'après l'énoncé, } u_{k+1} &= \frac{u_k}{1+u_k} \\ &= \frac{\frac{2}{2k+1}}{1 + \frac{2}{2k+1}} = \frac{2}{2k+1+2} = \frac{2}{2k+3} \end{aligned}$$

← Hypothèse de récurrence

$$= \frac{2}{2(n+1)+1} \text{ donc } (P_{k+1}) \text{ est vraie}$$

L'initialisation est vérifiée, l'hérédité est démontrée, par principe de récurrence, on a bien pour tout $n \geq 0$

$$u_n = \frac{2}{2n+1}$$

SUITES

la limite d'une suite est toujours quand $n \rightarrow +\infty$

* Limites *

limites de référence

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

Pour $k \geq 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$$

limites de q^n

• si $q > 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$$

• si $q = 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$$

• si $-1 < q < 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$$

• si $q < -1$

pas de limites

théorème de convergence monotone

- Une suite **croissante** et **majorée** est **convergente**
- Une suite **décroissante** et **minorée** est **convergente**

théorème de comparaison

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang n_0 .

- si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
- si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

théorème des gendarmes

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir de n_0 .

Si (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite l , alors v_n converge aussi vers l .

formes indéterminées

$$\infty - \infty$$

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$0 \times \infty$$

notes

* exemples incontournables *

SITUATION

TECHNIQUE

1

Polynôme

$$U_n = -3n^2 + 2n - 1$$

Factoriser par le terme du plus haut degré

$$U_n = n^2 \left(-3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right)$$

2

Fonction rationnelle

$$U_n = \frac{2n+3}{n-1}$$

Factoriser par les termes de plus haut degré et simplifier

$$U_n = \frac{n(2+\frac{3}{n})}{n(1-\frac{1}{n})}$$

3

Racines

$$U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

Multiplier par le conjugué

$$U_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

4

Puissance

$$U_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n - 5$$

Utiliser limite de q^n
ici $-1 < q < 1$

$$\text{donc } \left(-\frac{1}{3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

5

Trigo

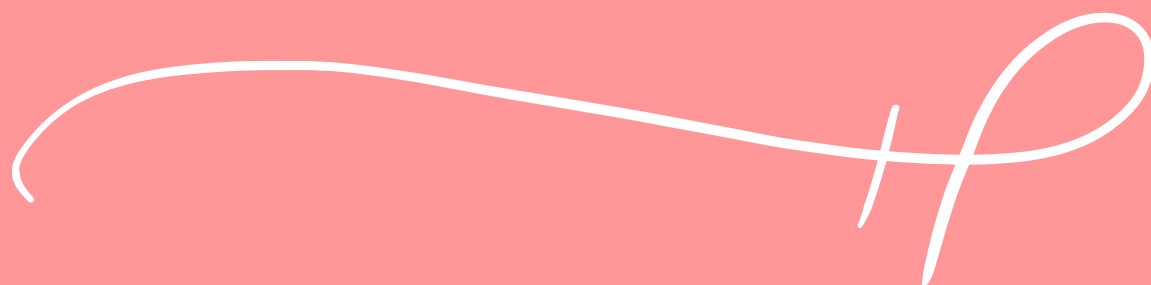
$$U_n = \frac{\cos(n^2)}{3n+1}$$

Encadrer

$$\frac{-1}{3n+1} \leq \frac{\cos(n^2)}{3n+1} \leq \frac{1}{3n+1}$$

et appliquer le théorème des gendarmes ou le théorème de comparaison.

Second
degré



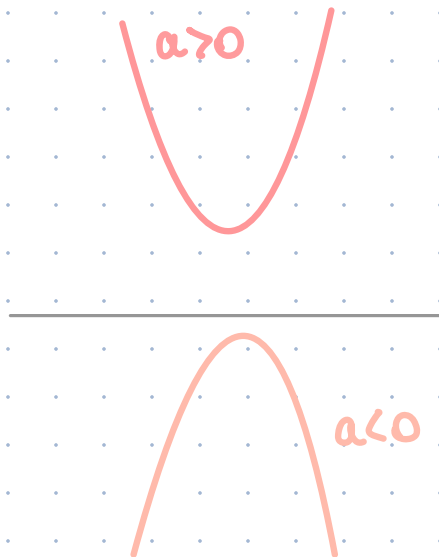
SECOND DEGRÉ

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$

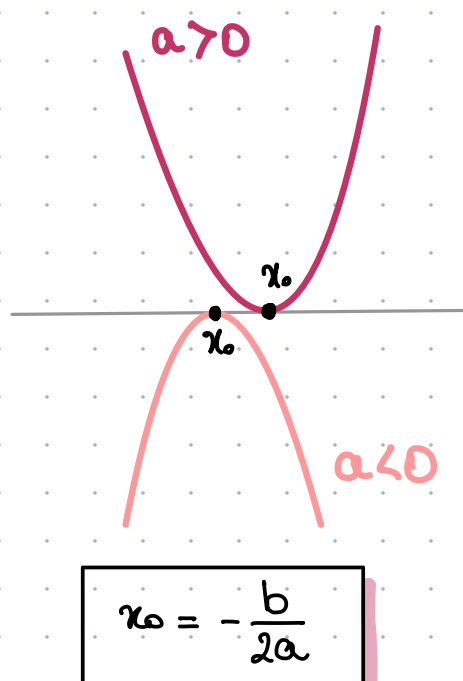
$$\Delta < 0$$

Pas de solutions réelles



$$\Delta = 0$$

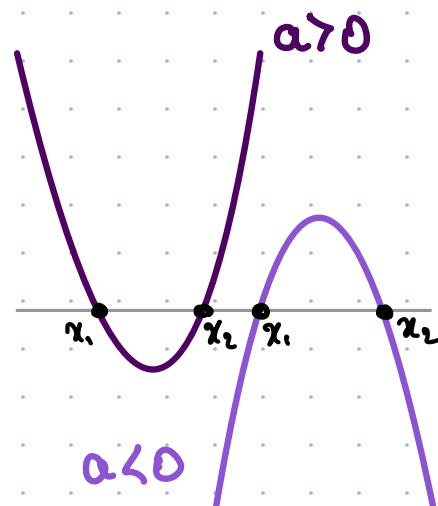
1 solution



$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$\Delta > 0$$

2 solutions



$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

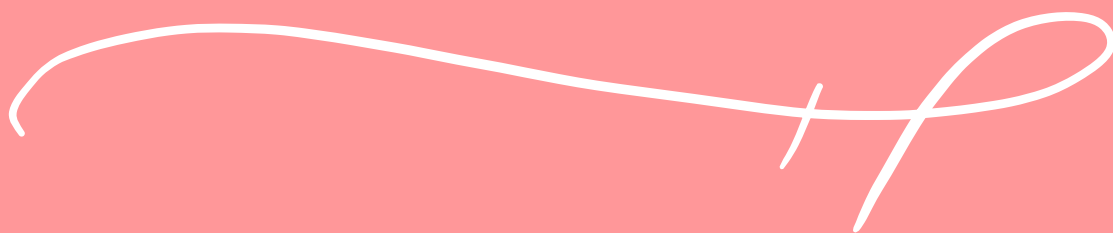
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	signe(a)	

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	signe(a)		

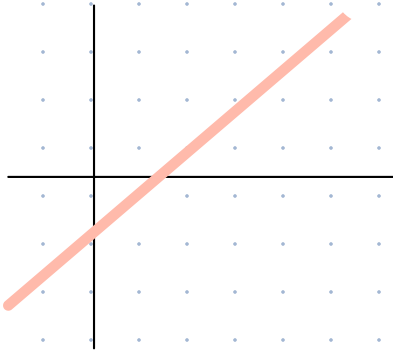
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	signe (a)	0	signe (-a)	0	signe (a)

Continuité & limites

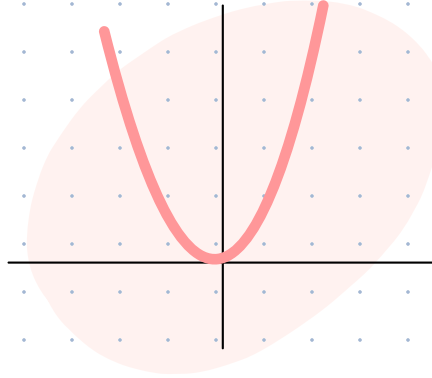


fonctions de référence

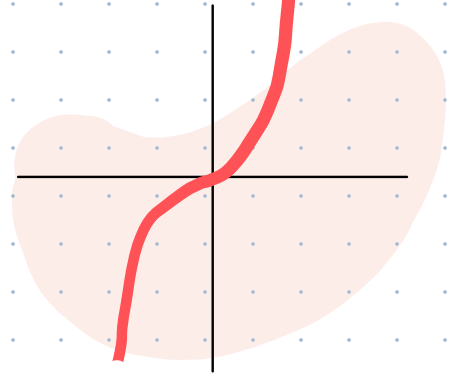
affine



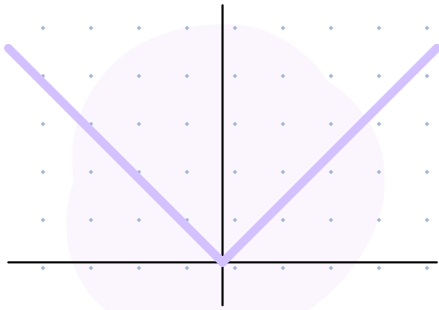
carré



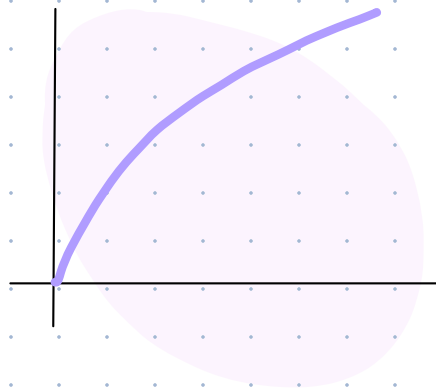
cubique



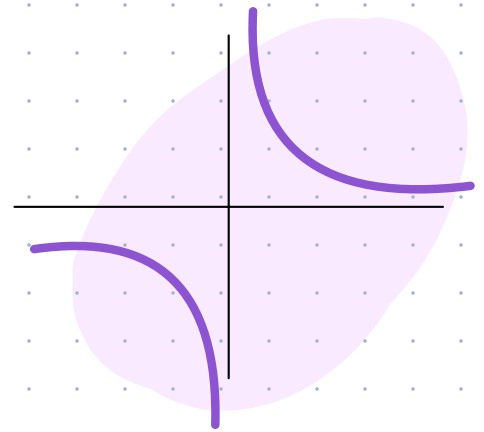
valeur absolue



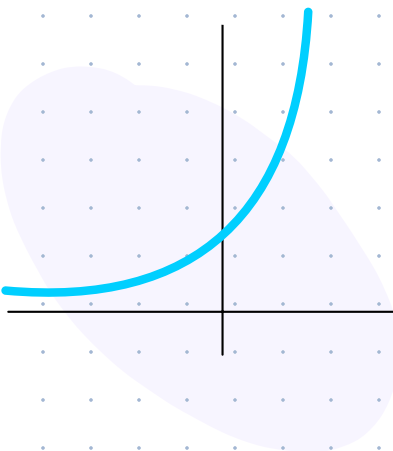
racine



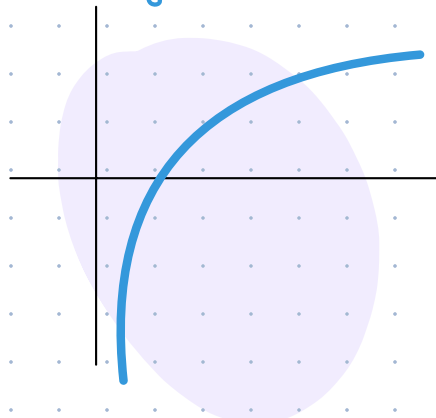
inverse



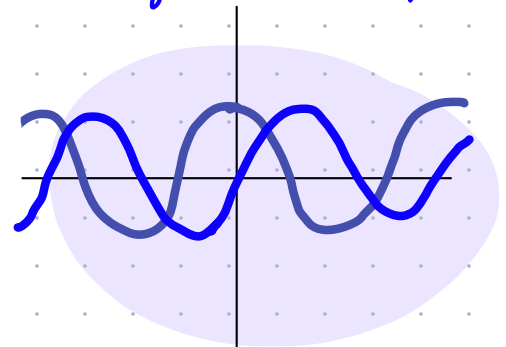
exponentielle



logarithme



trigonométrique



LIMITES

* Limites *

limites de référence

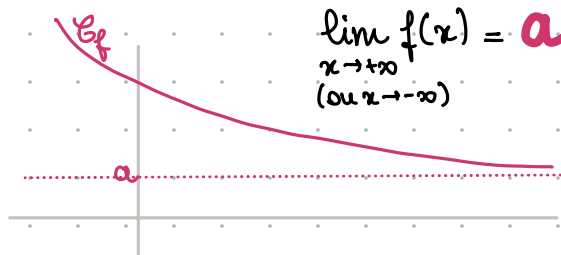
fonction	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+\infty$	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	ND	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0	$-\infty$ en 0^- $+\infty$ en 0^+	0
$\frac{1}{x^2}$	0	$+\infty$ en 0^- $+\infty$ en 0^+	0
e^x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	ND	$-\infty$	$+\infty$

asymptotes

horizontale

(limite en $\pm\infty$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$$

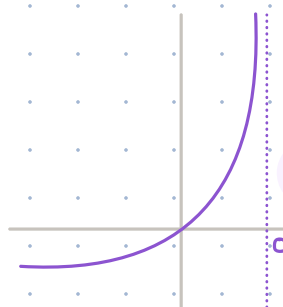


Équation de l'asymptote $y = a$

verticale

(limite en un réel c)

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad -\infty$$



Équation de l'asymptote $x = c$

formes indéterminées

$$\infty - \infty$$

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$0 \times \infty$$

théorème de croissance comparée

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$$

CONTINUITÉ

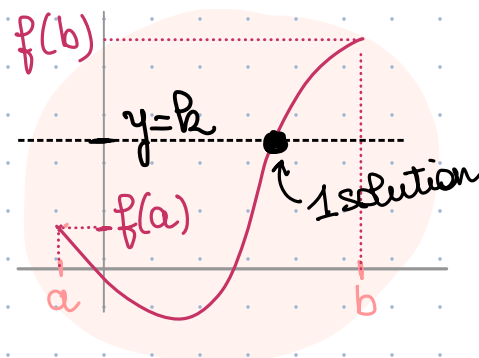
définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

- f est continue en a si f admet une limite en $a = f(a)$
- f est continue sur I si elle est continue en a pour tout $a \in I$

théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Si f est continue sur $[a; b]$ alors pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a; b]$



Cas monotone

Si f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$, alors pour tout réel $k \in [f(a); f(b)]$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a; b]$.

notes



Dérivation



DÉRIVATION

DÉFINITION

Taux de variation

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

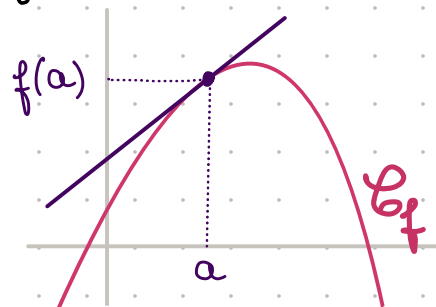
dérivée de f en a :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

TANGENTE

Tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$



SENS DE VARIATION

$f' > 0 \rightarrow f$ croissante

x	
f'	+
f	

$f' < 0 \rightarrow f$ décroissante

x	
f'	-
f	

$f' = 0 \rightarrow f$ constante

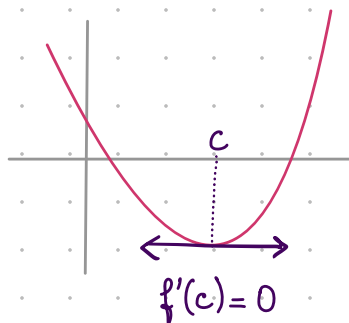
x	
f'	0
f	

extremum

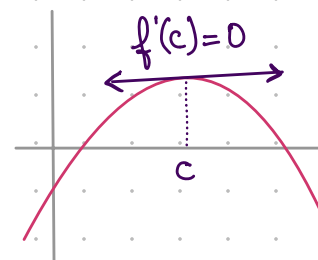
$f(c)$ est un extremum local

alors $f'(c) = 0$

f' s'annule en changeant de signes



	c	
f'	- 0 +	
f	 	



	c	
f'	+ 0 -	
f	 	

FONCTIONS DÉRIVÉES

dérivées usuelles

f	f'	I_{der}
k constante	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{*+}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^{*+}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

opérations

f	f'
$(u+v)'$	$u' + v'$
$(ku)'$ k constante	ku'
$(uv)'$	$u'v + uv'$
$\left(\frac{1}{u}\right)'$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\left(\frac{u}{v}\right)'$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$v u'(x)$ ou $v(u(x))'$	$v(u(x)) \times u'(x)$

exemples

- $\left[(x^2+2x)^2\right]' = 2(x^2+2x) \times (2x+2)$
- $[\sin(\sqrt{x})]' = \cos(\sqrt{x}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $[e^{-x^3}]' = e^{-x^3} \times (-3x^2)$

$$u(x) = x^2 + 2x, v(x) = x^2$$

$$u(x) = \sqrt{x}, v(x) = \sin x$$

$$u(x) = -x^3, v(x) = e^x$$

CONVEXITÉ

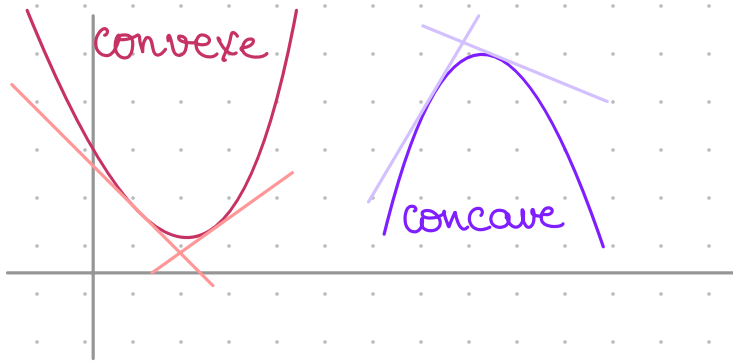
Soit f dérivable sur I et f' sa fonction dérivée. Lorsque f' est dérivable sur I , on note f'' sa dérivée. f'' est appelée la dérivée seconde de f .

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

f est convexe sur I lorsque la courbe est située au-dessus de chacune de ses tangentes.

f est concave sur I lorsque la courbe est située en-dessous de chacune de ses tangentes.



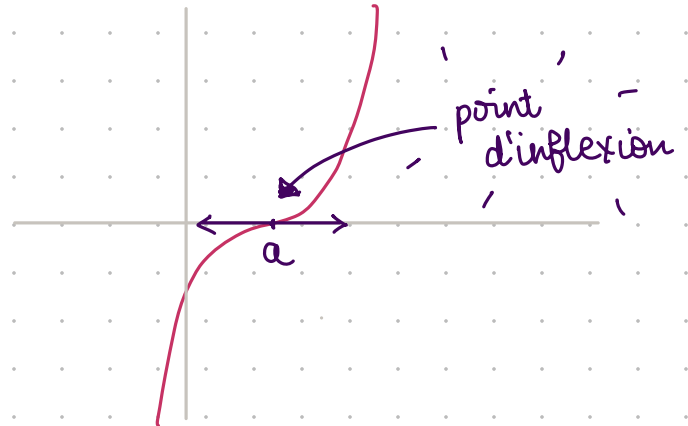
Les 4 propositions sont équivalentes :

- f est convexe sur I
- la courbe $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de ses tangentes
- f' est croissante sur I
- f'' est positive sur I

POINT D'INFLEXION

Point d'inflexion = point où la courbe traverse sa tangente.

→ la fonction change de convexité : une fonction convexe devient concave ou inversement en ce point.



Pour f deux fois dérivable sur I et $a \in I$

point d'inflexion en a

$\Leftrightarrow$

f'' s'annule et change de signe en a

Exponentielle & Logarithme

exponentielle

$$e^1 = e \simeq 2,718281$$

⚡ On note $e^x = \exp(x)$

PROPRIÉTÉS

$$e^0 = 1 \quad e^1 = e$$

$$e^{x+y} = e^x \times e^y$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

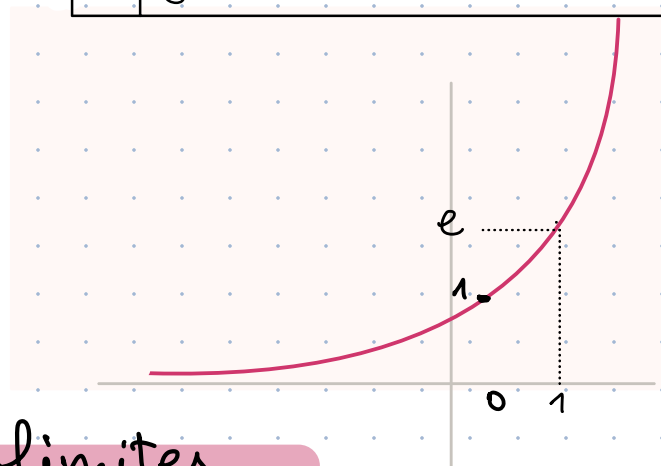
$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$(e^x)^n = e^{nx}$$

La fonction **exponentielle** est

- définie sur $\mathbb{R}$
- strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- strictement positive sur $\mathbb{R}$
- convexe sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'	+			
f				



dérivation

$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^{ax+b})' = a e^{ax+b}$$

$$(e^{u(x)})' = u'(x) \times e^{u(x)}$$

limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

pour $n \in \mathbb{N}$

- asymptote horizontale en $-\infty$
d'équation $y=0$

logarithme

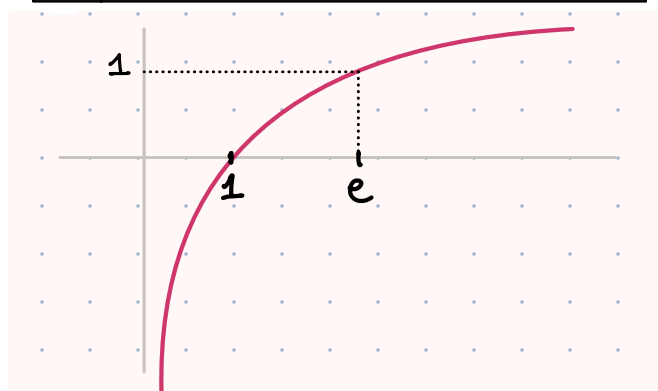
PROPRIÉTÉS

- $\ln 1 = 0$
- $\ln e = 1$
- $\ln e^x = e^{\ln x} = x$
pour $x > 0$
- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln(a^n) = n \ln a$

La fonction **logarithme** est

- définie sur $]0; +\infty[$ (ou $\mathbb{R}^{*+}$)
- strictement **croissante** sur $\mathbb{R}^{*+}$
- concave sur $\mathbb{R}^{*+}$

x	0	1	e	$+\infty$
f'			+	
f				$+\infty$



dérivation

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln(ax+b))' = \frac{a}{ax+b}$$

$$(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

Croissance comparée :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$n \in \mathbb{N}$

• **asymptote verticale** d'équation

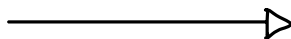
$$x = 0$$

Primitives & équations différentielles

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

forme de
l'équation
(E)

$$y' = f$$



Trouver une primitive
de la fonction f

$$y' = ay$$

$a \neq 0$



- Les solutions sont les fonctions définies par :

$$x \mapsto C e^{ax} \quad (C \in \mathbb{R})$$

- Pour tout x_0 et y_0 réels, (E_0) a une unique solution telle que $y(x_0) = y_0$

$$y' = ay + b$$

$a \neq 0$

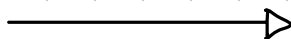


Les solutions sont les fonctions définies par :

$$x \mapsto C e^{ax} - \frac{b}{a} \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$y' = ay + f$$

$a \neq 0$



Soit φ une solution particulière de (E) . Alors y est une solution de (E) si et seulement si

$y - \varphi$ est une solution de l'équation homogène $y' = ay$

PRIMITIVES

primitives usuelles

f	F (c constante)
a constante	$ax + c$
x	$\frac{1}{2}x^2 + c$
x^2	$\frac{1}{3}x^3 + c$
$(n \neq -1) x^n$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$
e^x	$e^x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$

opérations

f	F (c constante)
$u'(x) u^n(x)$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1}(x) + c$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + c$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x) + c$
$\frac{u'(x)}{u^2(x)}$	$-\frac{1}{u(x)} + c$
$u'(x) e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + c$
$u'(x) \sin(u(x))$	$-\cos(u(x)) + c$
$u'(x) \cos(u(x))$	$\sin(u(x)) + c$

notes

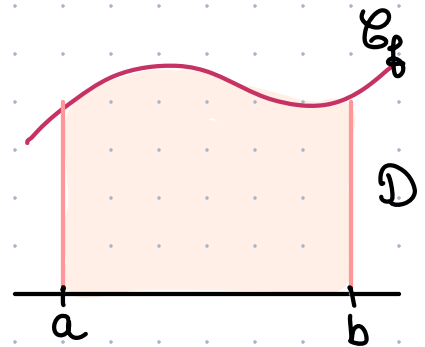
CALCUL INTÉGRAL

intégrale de f sur l'intervalle $[a; b]$

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(a) - F(b)$$

où F est une primitive de f .

$$\int_a^b f(x) dx = \text{Aire}(\mathcal{D})$$



Valeur moyenne sur $[a; b]$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad a < b$$

Relation de Chasles

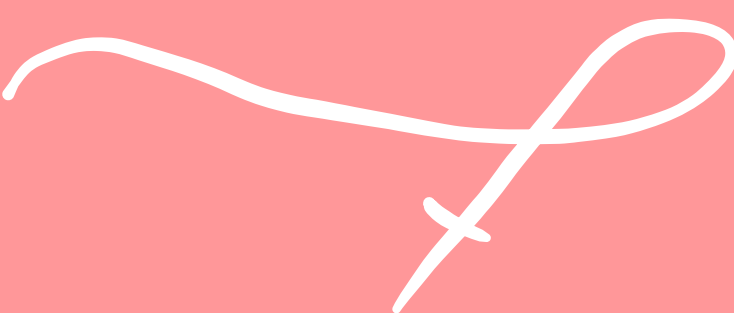
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Intégration par parties

u et v dérivables sur I , u' et v' continues sur I , $a, b \in I$

$$\int_a^b (u'v)(x) dx = [(uv)(x)]_a^b - \int_a^b (uv')(x) dx$$

Géométrie

A decorative white flourish consisting of a wavy line that loops and ends in a small cross-like shape.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

distance et équations

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur et $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace.

norme de $\vec{u}$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Coordonnées et distance

Vecteur $\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

I milieu de AB

$$I \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

distance entre A et B

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

DROITE

Représentation paramétrique

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ appartenant à une droite Δ de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$M(x, y, z) \in \Delta$ si et seulement si il existe t tel que

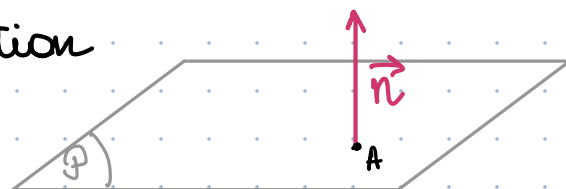
$$\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

↙ Ce système d'équations avec $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite Δ

Équation cartésienne d'un plan

$\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur et $A(x_A, y_A, z_A)$ un point. Le plan P passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ a pour équation

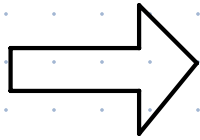
$$ax + by + cz + d = 0$$





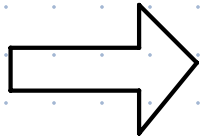
Comment montrer que...

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont
colinéaires



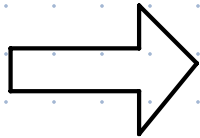
s'il existe un réel λ non nul
tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$

A, B et C sont
alignés



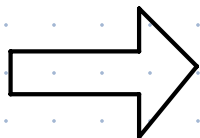
$\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires

$\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont
coplanaires



Pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires, non nuls,
s'il existe deux réels λ et μ
tels que $\vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$
« $\vec{w}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ »

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont
orthogonaux



Le produit scalaire est nul
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Produit scalaire

& ORTHOGONALITÉ

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls.

définition

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}; \vec{v})$$

propriétés

symétrie $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
bilinéaire :

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \lambda \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \vec{u} \cdot \vec{w} + \lambda \vec{v} \cdot \vec{w} \\ &= \vec{w} \cdot (\vec{u} + \lambda \vec{v}) \end{aligned}$$

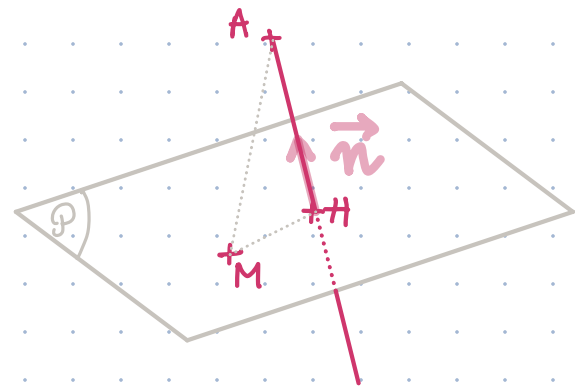
formules de polarisation

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

projeté orthogonal

Le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$ est H , l'intersection de la droite de vecteur directeur $\vec{n}$ passant par A et $\mathcal{P}$.



distance A à $\mathcal{P}$:
$$d(A, \mathcal{P}) = \frac{|\vec{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Probabilités

PROBABILITÉS

Probabilités conditionnelles

Probabilité de B sachant A

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

propriétés

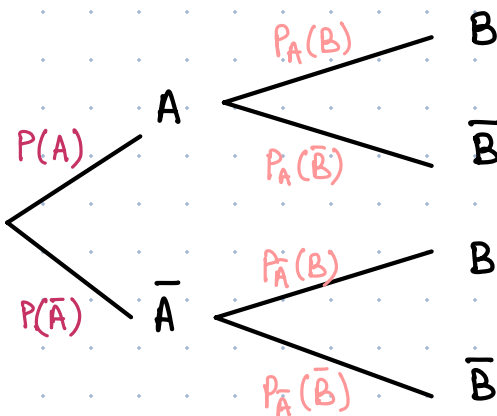
$$0 \leq P_A(B) \leq 1$$

$$P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$$

Si A et B sont deux événements de probabilité non nulle, alors

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

Arbre pondéré



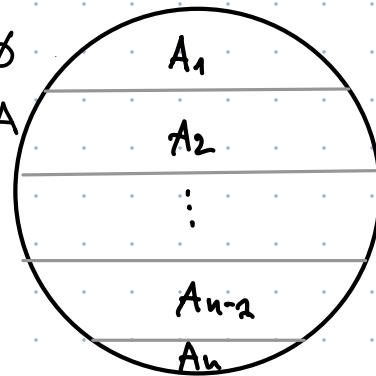
partition

On considère A et n éléments non vides $A_1, A_2, \dots, A_n$:

- pour $i \neq j$ $A_i \cap A_j = \emptyset$
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A$

$(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ forme

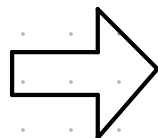
une partition de A



Probabilités totales

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

A et B sont
indépendants

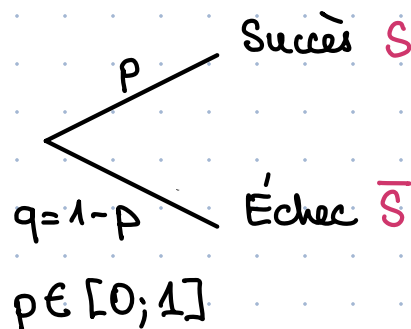


$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

PROBABILITÉS

BERNOULLI

épreuve de Bernoulli



loi de Bernoulli

X variable aléatoire de Bernoulli

x_i	1	0
$P(X=x_i)$	p	$1-p$

$$E(X) = p$$

$$\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$$

schéma de Bernoulli

= répétition de n épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes**.

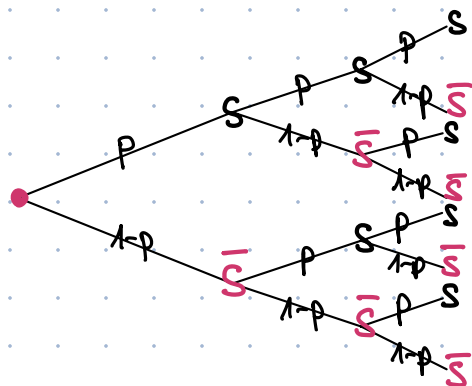
LOI BINOMIALE

X variable aléatoire qui compte le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de n répétitions (p la probabilité de succès).

X suit la **loi binomiale** de paramètres n et p : $B(n; p)$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\text{où } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$



Espérance $E(X) = np$

Variance $V(X) = np(1-p)$

Écart-type $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

DÉNOMBREMENT

factorielle de n

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$$

p -liste (ou p -uplet)

Liste ordonnée de p éléments pris dans les n éléments de E

$p \leq n$. Nombre de p -listes :

$$n^p$$

permutation

Classement ordonné des n éléments de l'ensemble E .

Nombre de permutations :

$$n!$$

Coefficients binomiaux

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

arrangement

p -liste d'éléments distincts de E à n éléments. $p \leq n$

Nombre d'arrangements =

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Combinaison

Ensemble non ordonné de p éléments pris parmi n éléments de E . Nombre de combinaisons

$$\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Relation de Pascal

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

SOMME DE VARIABLES ALÉATOIRES

On considère une variable aléatoire X définie sur $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_r\}$ et on note $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X .

ESPÉRANCE

Somme

$$E(X) = \sum_{j=1}^r X(\omega_j) P(\{\omega_j\})$$

on a

$$E(X) = \sum_{i=1}^s x_i \times P(X = x_i)$$

propriété

Soit X et Y deux variables aléatoires sur Ω , alors

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

super pratique ! on peut calculer $E(X+Y)$ sans connaître la loi de probabilité de $X+Y$ ☺

Soit X et Y deux variables aléatoires sur Ω et $a \in \mathbb{R}$

$$E(aX) = aE(X)$$

et

$$E(aX+Y) = aE(X) + E(Y)$$

VARIANCE

Propriété : Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et $V(X)$ sa variance et $\sigma(X)$ l'écart type. Soit $a \in \mathbb{R}$ alors :

$$V(aX) = a^2 V(X) \quad \text{et} \quad \sigma(aX) = |a| \sigma(X)$$

Indépendance : $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes lorsque pour tout $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots$

$$P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap \dots \cap X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2) \times \dots \times P(X_n = x_n)$$

Somme : Si X et Y sont deux v.a. indépendantes :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

LOI DES GRANDS NOMBRES

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Variable aléatoire
positive ou nulle

↳ pour tout $\omega \in \Omega$,

$$X(\omega) \geq 0$$

Inégalité de Markov

Soit X une v.a. réelle positive ou nulle
d'espérance $E(X)$. Pour $a > 0$

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebichev

Théorème

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et
de variance $V(X)$. Alors pour tout $a > 0$,

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

↳ la variable aléatoire $|X - E(X)|$ est positive ou nulle

Propriété

Sous les mêmes conditions, l'inégalité peut aussi s'écrire :

$$P(|X - E(X)| < a) \geq 1 - \frac{V(X)}{a^2}$$

LOI DES GRANDS NOMBRES

l'inégalité de concentration

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$.

On pose M_n la v.a. *moyenne d'un échantillon de taille n de X* .

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{où } X_i \text{ sont indépendantes et de même loi.}$$

Alors pour tout *réel $a > 0$* , $P(|M_n - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{na^2}$

Loi faible des grands nombres

Soit (X_n) un échantillon d'une variable aléatoire (v.a.).

On pose $M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Alors pour tout réel $a > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq a) = 0$$

templates

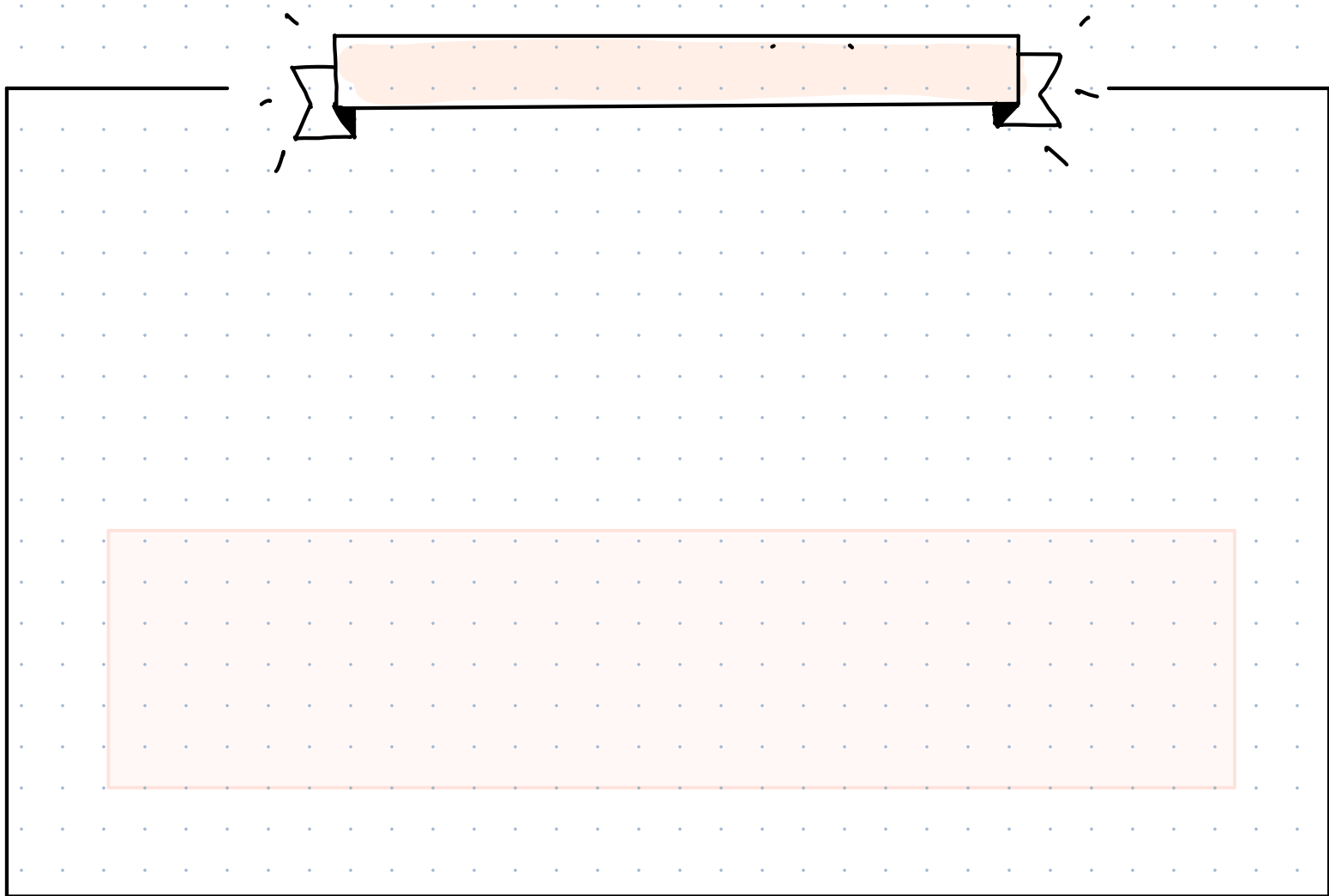
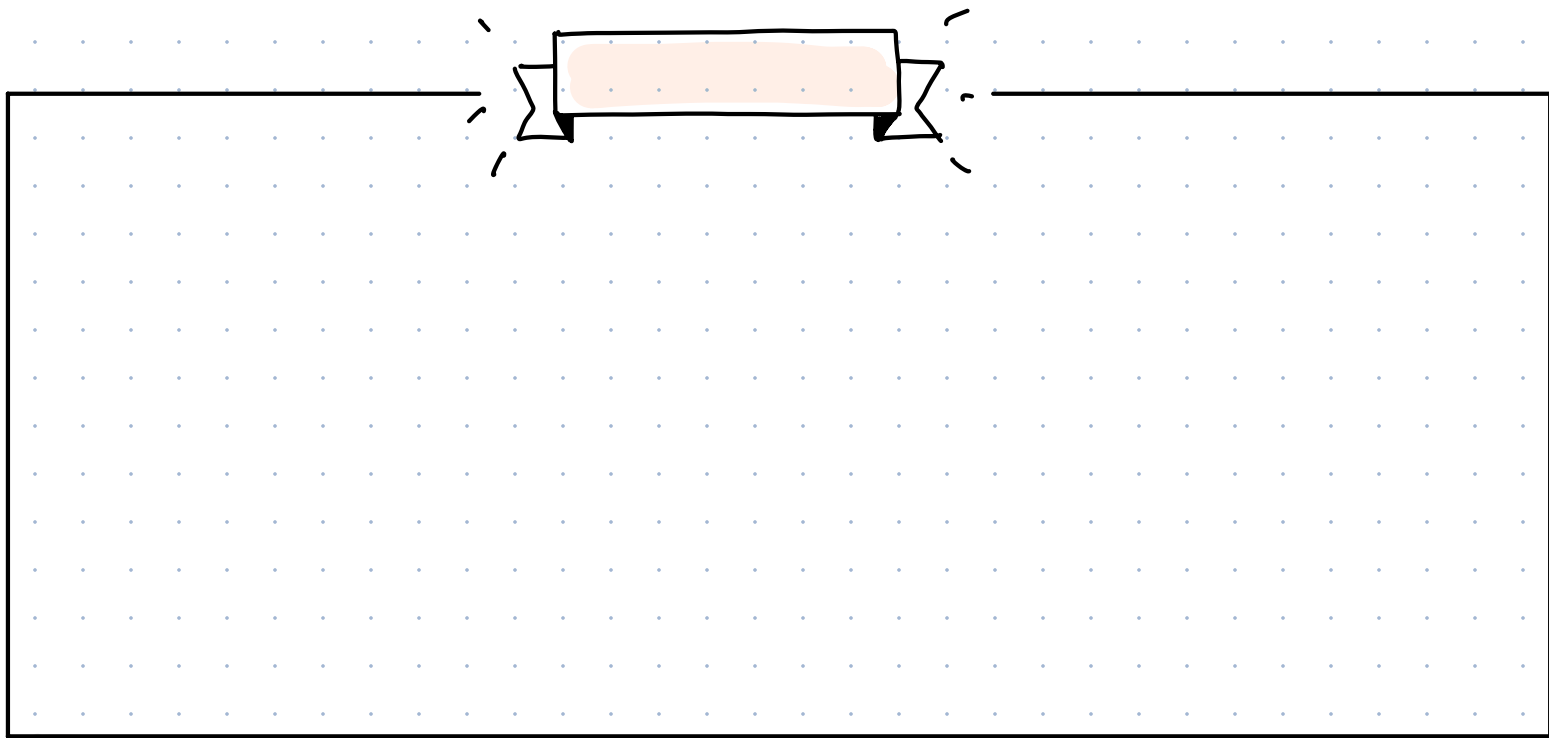


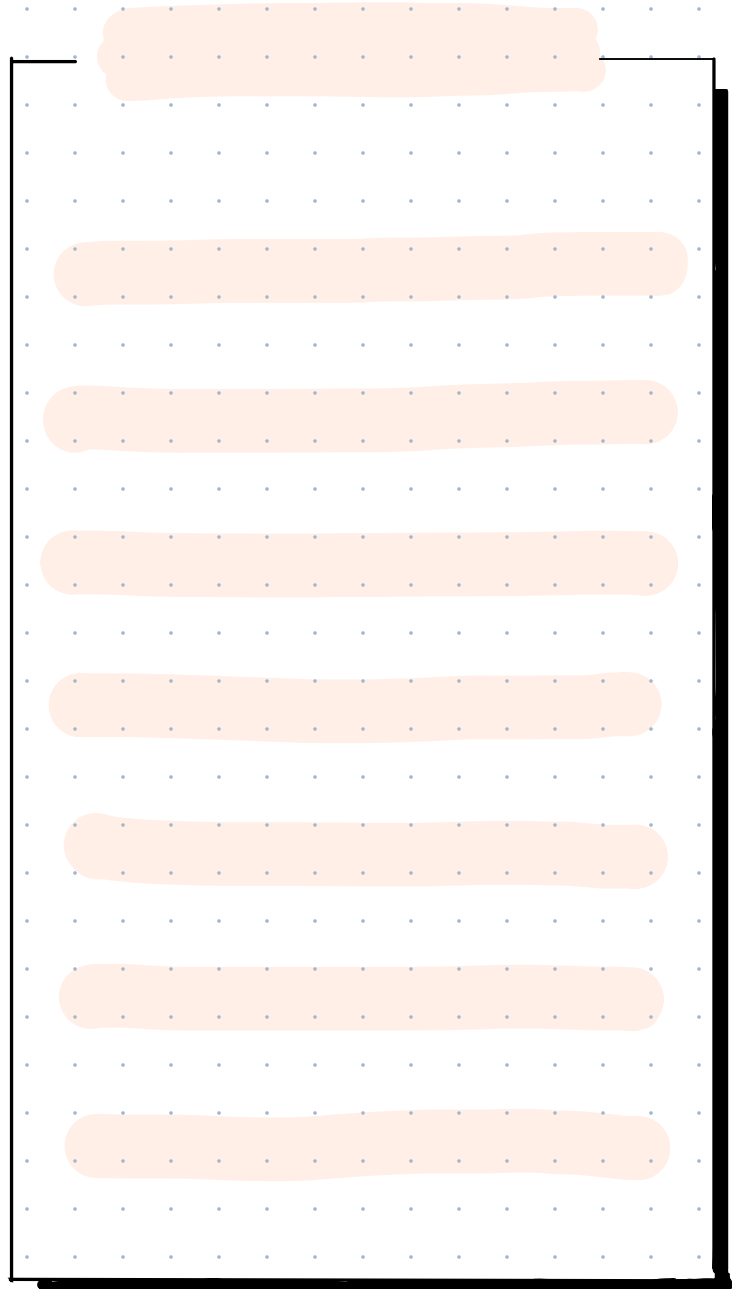
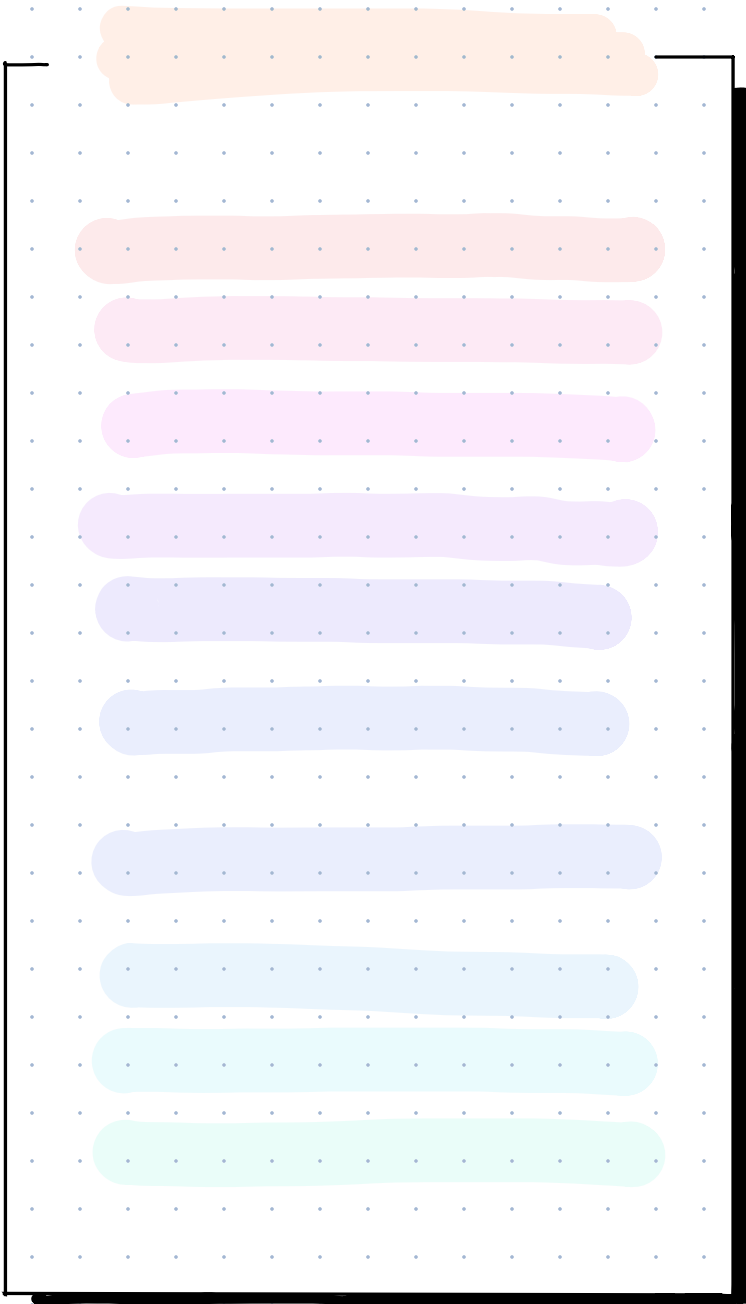
.....

.....

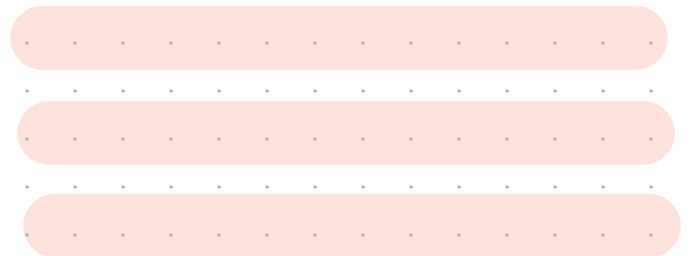
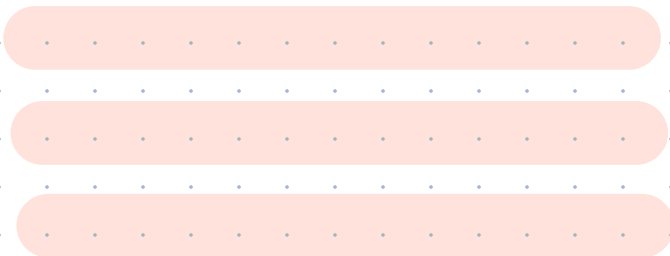
.....

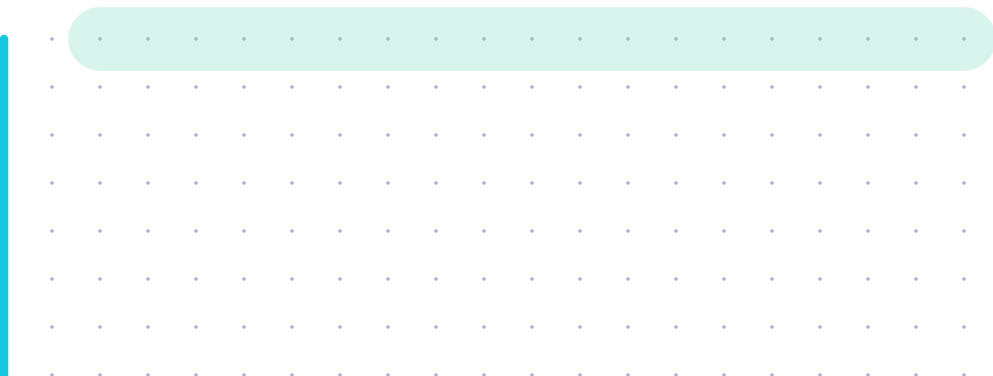
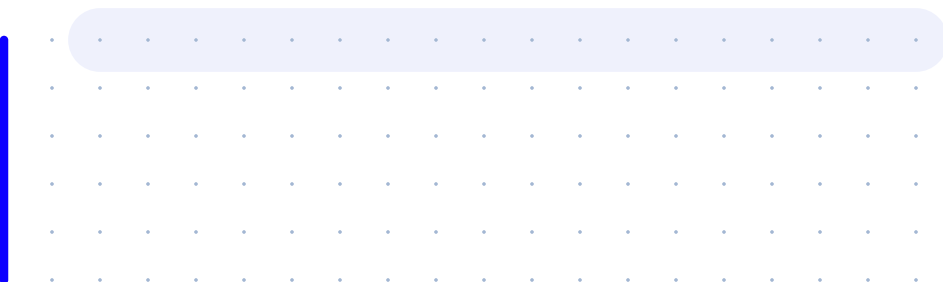
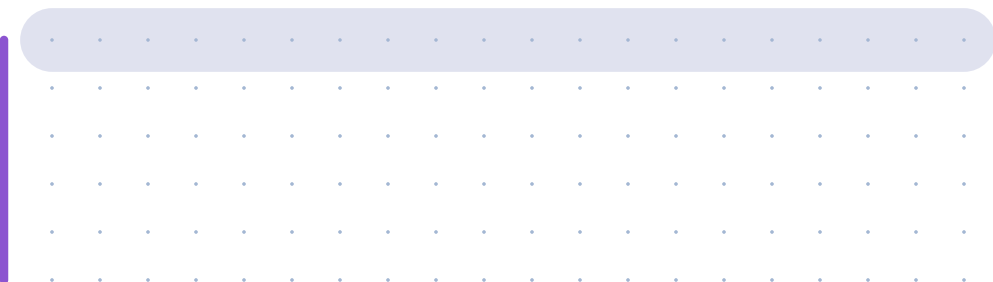
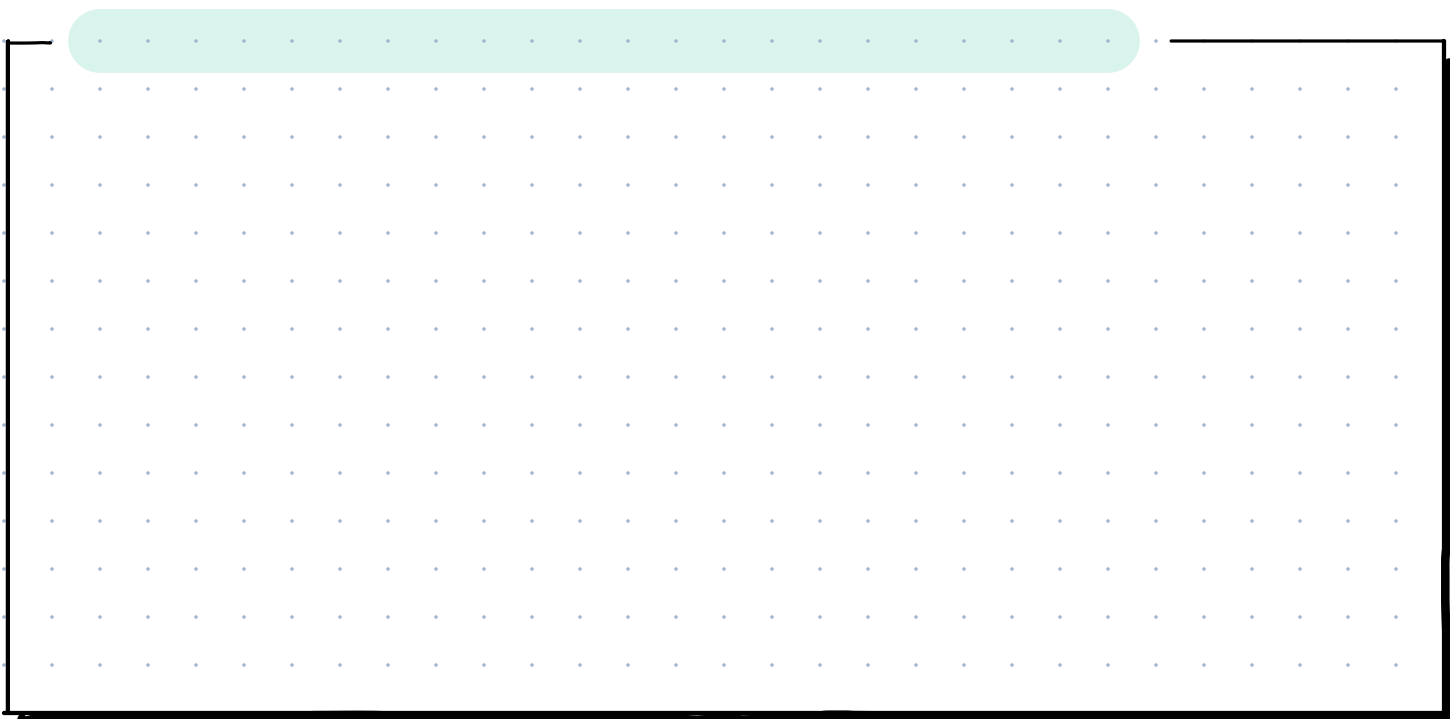
notes

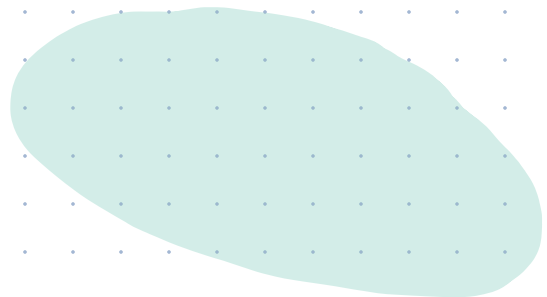
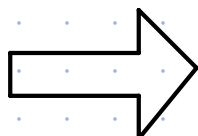
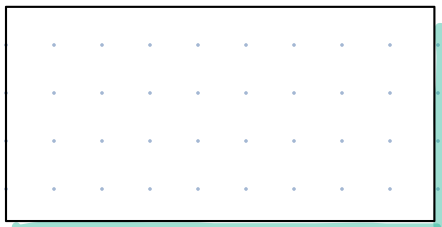
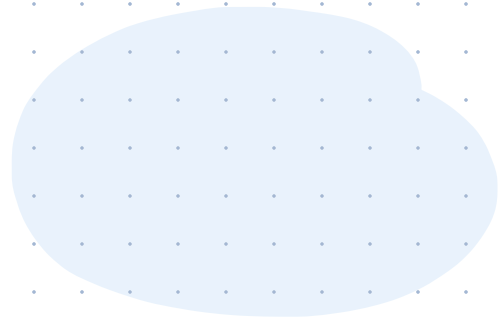
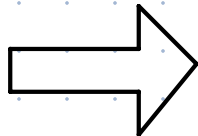
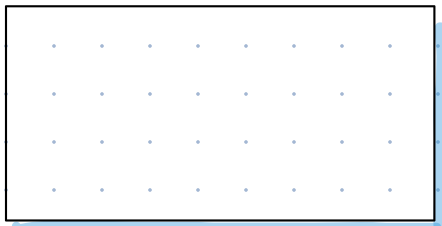
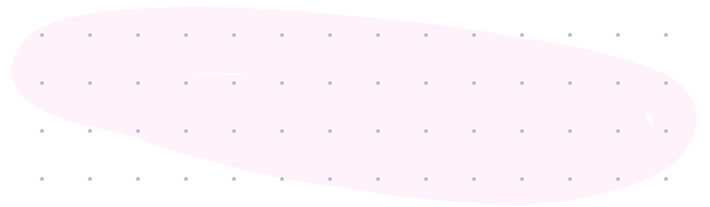
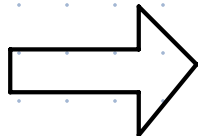
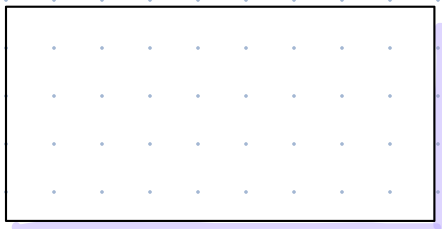
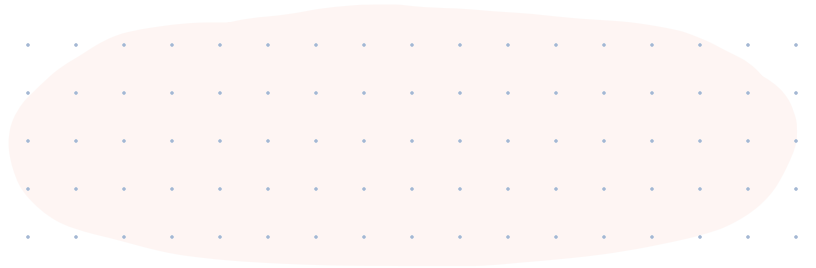
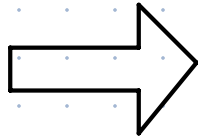
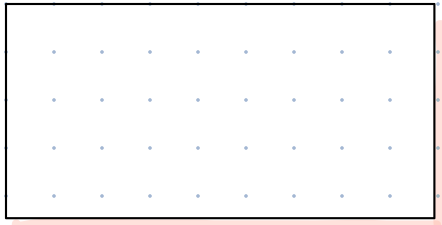
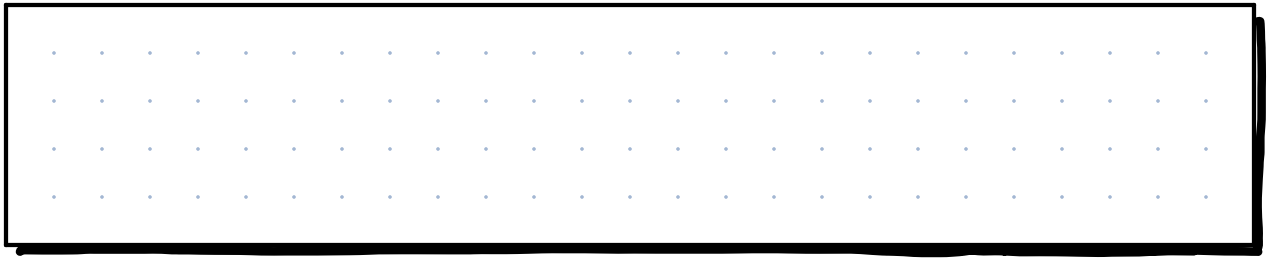




notes









**MERCI ET
À BIENTÔT**



Hong My

campusxyz.fr

