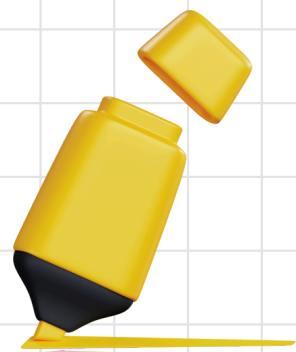


Hong My
@campus_xyz

LES FICHES 1^{re} Spé MAGIQUES

L'essentiel du programme de maths +
des exercices malins pour t'entraîner toute l'année

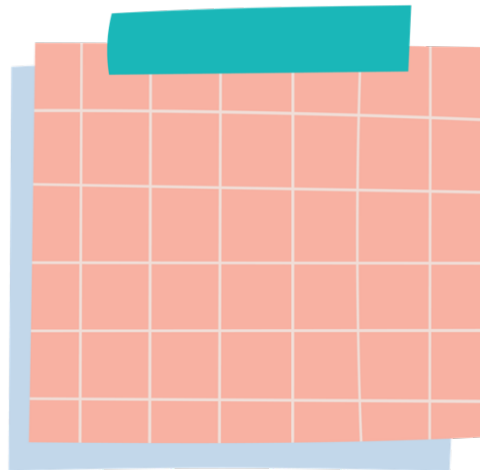


- ✓ 40 fiches colorées et simples à comprendre
- ✓ 15 min par jour pour progresser
- ✓ des astuces et pièges à éviter
- ✓ conforme au programme officiel 



CAMPUS XYZ

Ce cahier appartient à



© 2025, Campus XYZ, publication indépendante.
37 avenue Foch, 75116 Paris
Dépôt légal : novembre 2025

Tous droits réservés. Toute reproduction ou utilisation sous quelque forme et par quelque moyen électronique, photocopie, enregistrement ou autre que ce soit est strictement interdite sans l'autorisation écrite de l'éditeur.

Sommaire

Algèbre

Calculer les puissances	6
Calculer les racines	8
Calculer les fractions	10
Équations et inéquations	12
C'est quoi, une suite ?	14
Représentation graphique	16
Suites arithmétiques	18
Suites géométriques	20
Variations d'une suite	22
Somme d'une suite	24

Analyse

Polynôme de second degré	26
Équation du second degré	28
Variations d'un trinôme	30
Signes d'un trinôme	32
Inéquations de second degré	34
Dérivée en un point	38
Fonctions dérivées	40
Tangente en un point	42
Dérivées et variations	44
Extremum	46
Exponentielle	48
(In)équations avec exp	50
Fonction exponentielle	52
Cercle trigonométrique	54
Cosinus et sinus d'un angle	56
Équations trigonométriques	58
Fonctions trigonométriques	60
Fonctions de référence	62
Jeu	64

Géométrie

Produit scalaire	66
Calculer le produit scalaire	68
Orthogonalité	70
Équation de droite	72
Projeté orthogonal d'un point sur une droite	74
Équation de cercle	76
Paraboles	78

Probabilités et statistiques

Probabilités conditionnelles	82
Probabilités totales	84
Épreuves indépendantes	86
Variables aléatoires	88
Espérance, variance, écart-type	90

Comment utiliser ?



PARCOURS RELAX

Réviser régulièrement pendant l'année.
Objectif : 1 séance par semaine.



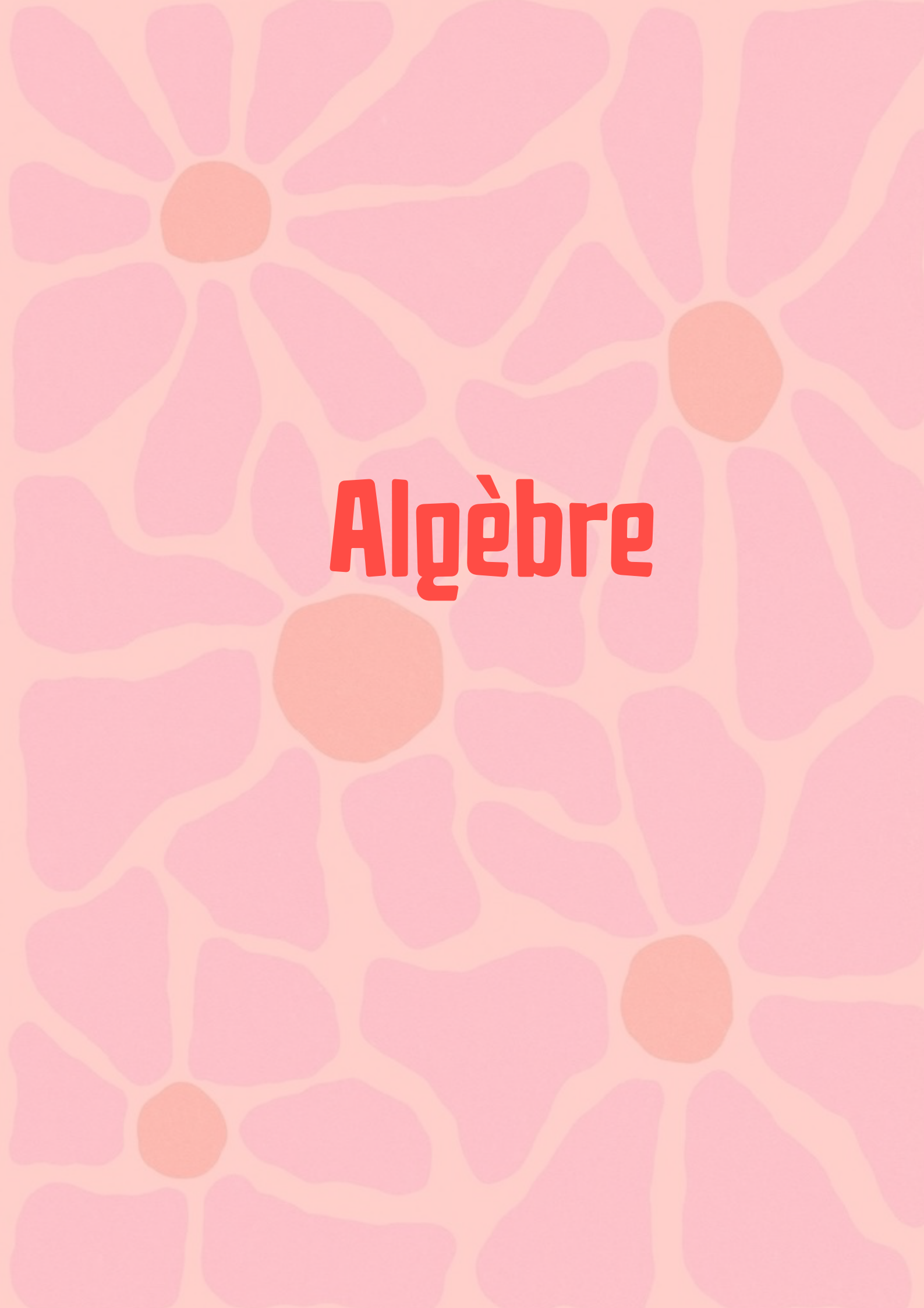
PARCOURS RÉGULIER

Pour se remettre dans le bain avant les contrôles.
Objectif : 1 séance avant chaque devoir surveillé.



PARCOURS INTENSE

Tu as tout oublié ? Pas de panique, revois tout le programme en 2 semaines.
Objectif : 2 séances par jour pendant deux semaines.

The background features a repeating pattern of stylized floral or sunburst shapes. Each shape consists of a central orange circle surrounded by several elongated, pink, petal-like segments. The overall color palette is soft, with various shades of pink and a muted orange.

Algèbre

Calculer les puissances

RAPPELS DE SECONDE

La puissance d'un nombre, c'est la **multiplication répétée** de ce nombre avec lui-même.

exposant → 4
base ↗ 2

$$2^4 = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{4 \text{ facteurs de } 2}$$



RÈGLES DE CALCUL

Je **multiplie** deux puissances qui ont la même base en **additionnant leurs exposants**.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Je **divise** deux puissances qui ont la même base en **soustrayant les exposants**.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Une **puissance de puissance** ? Je multiplie les exposants !

$$(a^n)^m = a^{n \times m}$$

Si les puissances n'ont pas la même base mais **le même exposant**, on peut factoriser.

Exemple : $2^7 \times 5^7 = (2 \times 5)^7 = 10^7$

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

La même règle s'applique pour un quotient.

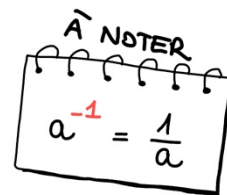


LA PUISSANCE NÉGATIVE, COMMENT ÇA MARCHE ?

Pour un nombre réel **a** non nul, et n un nombre entier, la **puissance négative**, c'est une **division répétée**.

Ainsi, a^{-n} c'est **l'inverse** de a^n .

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$



ATTENTION, ERREURS CLASSIQUES



Je ne peux pas additionner les puissances en **additionnant leurs exposants**.

$$a^m + a^n \neq a^{m+n} \quad \text{et} \quad a^m + b^n \neq (a+b)^n$$



Je ne peux pas « **descendre** » le signe de l'exposant.

$$6^{-2} \neq -6^2 \quad \text{et} \quad 6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36} \quad \checkmark$$

Exercices

1. Entourer les intrus de chaque ensemble.

Group 1:

- $3,5 \times 10^4$
- $35\,000$
- $\frac{35}{10^{-3}}$
- $0,035 \times 10^{-2}$
- $\frac{35}{10^{-3}}$ (pink oval)

Group 2:

- $(-4)^3$
- 4^3
- $\frac{-4^5 \times 4^6}{(4^2)^4}$
- $\frac{4^{-8}}{(-4)^{-11}}$
- $\frac{4^{-8}}{(-4)^{-11}}$ (pink oval)

Group 3:

- $(2 \times 3)^{-1}$
- $\frac{6^{10}}{6^7 \times 6^4}$
- 6
- $6^5 \times \frac{6^{-4}}{6^2}$
- $\frac{6^{10}}{6^7 \times 6^4}$ (pink oval)

2. Simplifier les écritures suivantes, si possible. x et y sont des réels non nuls.

a) $5x^2 + x^2 - (2x)^2 =$

b) $(5x)^2 - 5x + 5y =$

c) $(2xy)^2 - 5x + 5y =$

d) $x^4 + 3x^2 + \frac{x^2}{2} - 2x(3x^2 \times x) =$

e) $(x^3y)^2 - y^2(x^4) =$

3. Simplifier les écritures suivantes, si possible. a et b sont des réels non nuls.

a. $a^{-1} \times (ab)^2 =$

b. $(a^2 \times ab)^3 =$

c. $(a^{-3} \times ab)^3 =$

d. $\frac{a^3 \times b^{-2}}{(ab^2)^{-1}} \times \left(\frac{b^{-1}}{a}\right)^2 =$

e. $\frac{a}{b^2} \times \frac{b^3}{a^{-1}} =$

Calculer les racines

RAPPELS DE SECONDE

La **racine carrée** de n , notée $\sqrt{n}$ est le nombre positif qui a pour carré n .

Exemple : $\sqrt{9}$ est le nombre positif qui a pour carré 9.
Donc $\sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 3 \times 3 = 9$

Si a est un nombre réel alors $\sqrt{a^2} = |a|$

Exemple : $\sqrt{(-8)^2} = |-8| = 8$ ✓



CALCULER LES RACINES CARRÉES

Soit a et b deux réels positifs. Je peux **multiplier** deux racines en mettant **sous le même signe**.

Exemple : $\sqrt{50} \times \sqrt{3} = \sqrt{50 \times 3} = \sqrt{150}$ ✓

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Je peux simplifier un **quotient**.

Exemple : $\sqrt{\frac{100}{4}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{4}} = \frac{10}{2} = 5$ ✓

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Attention !

✗ Impossible de simplifier les additions de racines	✓ Je peux seulement effectuer l'addition à l'intérieur du signe
$\sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{2+3}$	$\sqrt{2+3} = \sqrt{5}$



METTRE SOUS FORME $a\sqrt{b}$

La forme préconisée pour les racines carrées est de type $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers, b étant le plus petit possible.

Exemple : $\sqrt{8} = \sqrt{2 \times 4} = \sqrt{2} \times \sqrt{4} = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$

Exercices

1. Relier les expressions égales.

$$\sqrt{36}$$

$$5\sqrt{16}$$

$$\sqrt{50}$$

$$2\sqrt{18}$$

$$9$$

$$6\sqrt{2}$$

$$6$$

$$20$$

$$5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{81}$$

2. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

$$\frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{3a^2}} =$$

$$\sqrt{81a^2} \times \sqrt{a} =$$

$$\sqrt{\frac{25a}{a^3}} =$$

$$\frac{\sqrt{144a^2}}{6a} \times \sqrt{a^4} =$$

3. Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, où a est une fraction irréductible et b un entier naturel, sans calculatrice.

$$\frac{\sqrt{105} \times \sqrt{51}}{3\sqrt{34}} =$$

$$\frac{3\sqrt{297} \times 2\sqrt{616}}{\sqrt{44} \times \sqrt{396}} =$$

$$\sqrt{\frac{98}{27}} \times \frac{3\sqrt{72}}{\sqrt{28}} =$$

Calculer les fractions

RAPPELS DE SECONDE



CALCULER AVEC DES FRACTIONS

Pour **additionner** ou **soustraire**, il faut penser à trouver le **dénominateur commun**.

Si un dénominateur est un multiple de l'autre	Sinon, j'utilise la méthode du "papillon"
$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} + \frac{1}{6}$ ① je remarque que 6 c'est 3x2 $= \frac{4}{6} + \frac{1}{6}$ ② je multiplie par 2 pour obtenir 6 au dénominateur ③ j'obtiens deux fractions de même dénominateur $= \frac{4+1}{6} = \frac{5}{6} \checkmark$	$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} + \frac{1 \times 3}{6 \times 1}$ $= \frac{4}{6} + \frac{1}{6}$ $= \frac{4+1}{6} = \frac{5}{6} \checkmark$

Pour **multiplier** ou **diviser** :

Je multiplie les numérateurs entre eux , puis les dénominateurs entre eux .	Diviser par une fraction, c'est simplement multiplier son inverse .
$\frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$	$\frac{3}{4} \div \frac{2}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{2} = \frac{3 \times 7}{4 \times 2} = \frac{21}{8}$



DES FRACTIONS DE FRACTIONS, AU SECOURS

Pas de panique, il suffit de **transformer la grande barre de fraction en un signe de division**. Diviser par une fraction, c'est multiplier son inverse. Et voilà !

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \checkmark$$

multiplier l'inverse



BIEN PENSER AUX PRIORITÉS

Dans un calcul avec plusieurs opérations, **la multiplication et la division ont la priorité** sur l'addition et la soustraction.

$$\frac{5}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{5}{2} + \frac{2}{10} = \frac{25}{10} + \frac{2}{10} = \frac{27}{10} \checkmark$$

priorité

Exercices

1. Relier les expressions égales.

$$\frac{x^2+1}{x}$$

$$x+1$$

$$x + \frac{1}{x}$$

$$2x+1$$

$$\frac{3x}{x+6}$$

$$\frac{x}{x+2}$$

$$3 + \frac{x}{2}$$

$$\frac{x}{\frac{x}{3}+2}$$

$$5 - \frac{x+1}{3-x}$$

$$\frac{-6x+14}{3-x}$$

$$\frac{16-6x}{3-x}$$

$$\frac{4x-16}{3-x}$$

2. Calculer les nombres suivants en fournissant le résultat sous la forme d'une fraction simplifiée.

$$A = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} =$$

$$B = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{5}{2} =$$

$$C = \frac{\frac{3}{4} - \frac{5}{3}}{\frac{3}{4} + \frac{5}{3}} =$$

$$D = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}}{\frac{2}{5} - \frac{5}{4}} =$$

3. Écrire les expressions suivantes sous forme d'un seul quotient.

$$A(x) = \frac{x+3}{x} - \frac{x+1}{x+2}$$

$$B(x) = \frac{1}{x} - \frac{1+x}{x} + 1$$

$$C(x) = x - 2 - \frac{x-4}{x+2}$$

Équations et inéquations



RÉSoudre UNE ÉQUATION PRODUIT NUL

L'équation produit $A \times B = 0$ est équivalente à $A=0$ ou $B=0$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x(x-1) = 0$

$$2x(x-1) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \text{ ou } (x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 \quad \checkmark$$

On note l'ensemble des solutions $S = \{0; 1\}$.



RÉSoudre UNE ÉQUATION QUOTIENT

L'équation quotient $\frac{A}{B} = 0$ est équivalente à $A=0$ et $B \neq 0$.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\frac{x-3}{2x+6} = 0$.

$$x-3 = 0 \text{ et } 2x+6 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ et } x \neq -3$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \quad \checkmark$$

On note l'ensemble des solutions $S = \{3\}$.



INÉQUATION PRODUIT

On étudie le signe de **chacun des facteurs** que l'on rassemble dans un tableau puis on applique la **règle des signes**.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(x+1)(2x-5) < 0$.

1. J'étudie le signe de $(x+1)$.

2. J'étudie le signe de $(2x-5)$.

3. Je rassemble dans un tableau et j'applique la règle des signes.

4. J'obtiens l'ensemble des solutions.

x	-1
$x+1$	- 0 +

x	$\frac{5}{2}$
$2x-5$	- 0 +

x	-1	$\frac{5}{2}$	
$x+1$	- 0 +		+
$2x-5$	-	- 0 +	
$(x+1)x$ $(2x-5)$	+	0 - 0	+

$$S =]-1; \frac{5}{2}[$$

Exercices

1. Entourer la (ou les) réponse(s) exacte(s).

• $2x(5-2x)=0$ a pour solution

$\{2; \frac{5}{2}\}$

$\{0; \frac{5}{2}\}$

$\{0; \frac{2}{5}\}$

• $(3x-4)(x+5)=0$ a pour solution

$\{\frac{4}{3}; -5\}$

$\{-\frac{4}{3}; -5\}$

$\{\frac{3}{4}; -5\}$

• $\frac{3x+6}{x-7}=0$

existe si $x \neq 7$

a pour solutions
-2 et 7

a pour solution
-2

• $\frac{x-4}{x^2-1}=0$

existe si $x \neq -1$
et $x \neq 1$

a pour solutions
4; -1 et 1

a pour solution
4

2. Résoudre les équations quotient suivantes.

$$\frac{x-3}{x+4}=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x-3}{2x+5}=1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1-3x}{x+2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{3x+4} + \frac{1}{x-1}=0 \Leftrightarrow$$

3. Compléter les tableaux de signes puis résoudre les inéquations.

$$(2x+1)(x-3) < 0$$

$$(x-5)(3x+1) \geq 0$$

C'est quoi, une suite ?



NOTION DE SUITE

Une **suite** est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ ou sur une partie de $\mathbb{N}$. L'image d'un entier n par la fonction u est notée u_n ou $u(n)$. On distingue les notations :

u_n : n est l'indice
le terme d'indice n

(u_n) : notation de la suite

ERREURS FRÉQUENTES

u_{n+1} : terme d'indice $n+1$

u_n+1 : terme d'indice n auquel on ajoute 1

Attention : le premier terme n'est pas forcément u_0 : il peut être $u_1, u_3, \text{etc} \dots$

- Si le premier terme est u_0 alors u_n est le **$(n+1)^{\text{e}}$** terme de la suite.
- Si le premier terme est u_1 alors u_n est le **n^{e}** terme de la suite.



COMMENT DÉFINIR UNE SUITE

Une suite peut être définie par :

- une formule **explicite** de type

$$u_n = f(n) \quad \text{une expression en } n$$

Pour calculer les premiers termes, il suffit de remplacer n par le rang.

Exemple : Calculer u_3 de la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{1+n^2}$.

$$u_3 = \sqrt{1+3^2} = \sqrt{10} \quad \checkmark$$

- un **premier terme connu** et une **relation de récurrence** de type $u_{n+1} = f(u_n)$

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases} \quad \text{une expression avec } u_n$$

Exemple : Calculer u_3 de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2 - u_n \end{cases}$

On part du premier terme donné, et on calcule de proche en proche les valeurs :

Pour $n = 0$: $u_1 = 2 - u_0 = 2 - 3 = -1$

Pour $n = 1$: $u_2 = 2 - u_1 = 2 - (-1) = 3$ (on reprend la valeur u_1 plus haut)

Pour $n = 2$: $u_3 = 2 - u_2 = 2 - 3 = -1 \quad \checkmark$ (on reprend la valeur u_2 plus haut)

Exercices

1. Relier chaque suite à la valeur de son deuxième terme.

$$n \in \mathbb{N}$$

$$u_n = n+1$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$$

$$n \in \mathbb{N}^*$$

$$u_n = \frac{2n+4}{n}$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$u_n = n$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$u_{n+1} = (u_n)^2$$

$$n \in \mathbb{N}^*$$

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

$$u_1 = 1$$

$$u_1 = 2$$

$$u_2 = 2$$

$$u_1 = 3$$

$$u_1 = 4$$

$$u_2 = 4$$

2. Suite définie par une formule explicite.

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^2 + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Donner la valeur des trois premiers termes de la suite (u_n) .

b. Donner l'expression de u_{n+1} et $u_n + 1$ en fonction de n .

3. Suite définie par récurrence. Donner la valeur des trois premiers termes.

a. Soit (v_n) la suite définie par $\begin{cases} v_0 = 7 \\ v_{n+1} - v_n = 3 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Soit (w_n) la suite définie par $\begin{cases} w_1 = -3 \\ \frac{w_{n+1}}{w_n} = -2 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Représentation graphique

Pour représenter une suite, on peut utiliser une **droite graduée** ou un **repère**.



SUR UNE DROITE GRADUÉE

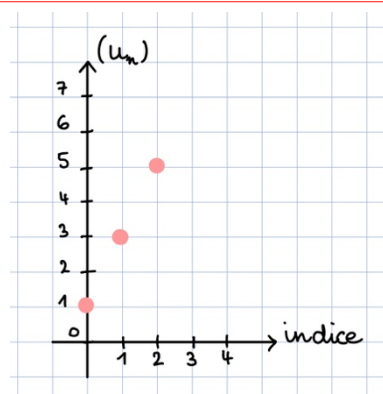
On place les abscisses $u_0; u_1; u_2; \dots$



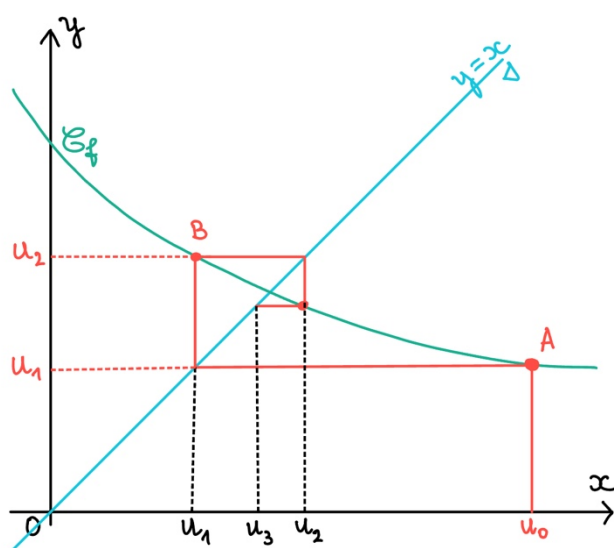
DANS UN REPÈRE

- Pour une formule **explicite** de type $u_n = f(n)$, on place les points de coordonnées $(n; u_n)$.

On représente ci-contre la suite (u_n) définie par $u_n = 2n + 1$.



- Pour une suite définie par un **premier terme connu** et une **relation de récurrence** de type $u_{n+1} = f(u_n)$, on place de proche en proche les valeurs. On représente la droite Δ d'équation $y = x$. Et la courbe C_f qui représente f .



- On commence avec $(u_0; 0)$
- $u_1 = f(u_0)$: on reporte l'ordonnée du point A sur l'axe des abscisses : on retrouve $u_1 = f(0)$ sur l'axe horizontal.
- L'ordonnée du point B est la valeur de u_2 , que je trouve sur l'axe horizontal avec la symétrie par rapport à la droite Δ .

Exercices

1. On considère une fonction f représentée ci-contre.

a. Soit (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$.

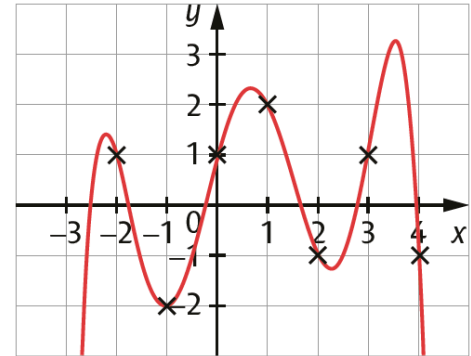
Déterminer :

$$u_0 = \underline{\hspace{2cm}} \quad u_1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

b. Soit (v) la suite définie par $v_0 = -2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$.

Déterminer :

$$v_1 = \underline{\hspace{2cm}} \quad v_2 = \underline{\hspace{2cm}}$$



2. Représenter graphiquement une suite.

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Représenter les 3 premiers termes de la suite:

a. Sur une droite graduée :

b. dans un repère :

3. Représenter graphiquement les 3 premiers termes de la suite.

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 1$.

Suites arithmétiques



DÉFINITION

Une **suite arithmétique** est une suite dont chaque terme s'obtient en **ajoutant** au terme précédent un même nombre réel, appelé **raison**.

Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel **r** tel que tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + r$$

c'est une relation de récurrence

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, la formule **explicite** est donnée par :

Si le premier terme est u_0

$$u_n = u_0 + n \times r$$

Si le premier terme est u_p

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

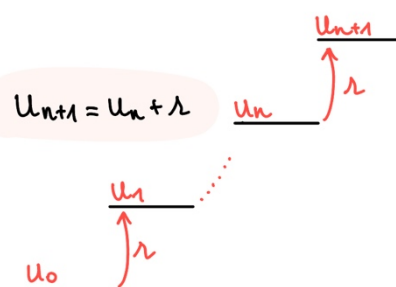
✚ **Méthode** : Pour calculer le terme de rang **n**, on remplace **n** par le nombre.

Soit la suite arithmétique définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 3$. Calculer u_5 .

On lit par l'expression que $r = 3$ et $u_0 = 2$. On obtient :

$$u_5 = u_0 + 5 \times r = 2 + 5 \times 3 = 17 \quad \checkmark$$

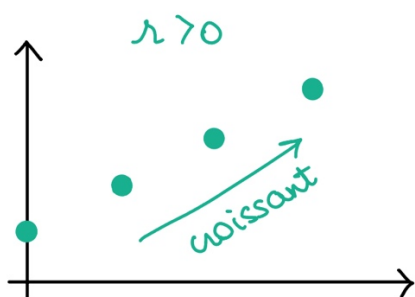
Une suite arithmétique c'est comme un escalier.



SENS DE VARIATION

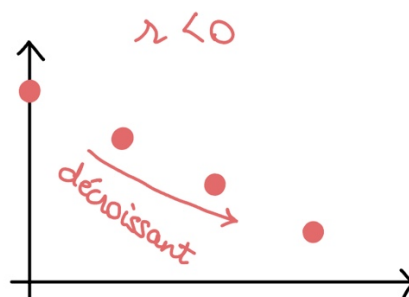
La suite (u_n) est strictement

croissante $\Leftrightarrow r > 0$



La suite (u_n) est strictement

décroissante $\Leftrightarrow r < 0$



Exercices

1. Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ?

- a. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n - u_{n+1} = \frac{2}{3}$ ☐ Oui ☐ Non
- b. (u_n) telle que $u_3 < u_4$ et $u_5 < u_4$ ☐ Oui ☐ Non
- c. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + 2n$ ☐ Oui ☐ Non
- d. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = u_n - \sqrt{3}$ ☐ Oui ☐ Non
- e. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (n+7)^2 - (n-3)^2$ ☐ Oui ☐ Non

2. Placer les suites suivantes selon leurs sens de variation.

$$\begin{matrix} u_0 = 1 \\ u_1 = 3 \\ u_2 = 5 \end{matrix}$$

$$(u_n) \text{ de raison } 2 - \sqrt{2}$$

$$u_{n+1} - u_n = -3$$

$$u_n = u_{n+1} + 3$$

$$(u_n) \text{ de raison } 10^{-2}$$

$$u_0 = -100 \text{ et } \lambda = 1$$

DÉCROISSANT

CROISSANT

3. Déterminer le premier terme u_0 et la raison des suites suivantes.

Cas 1 : $u_4 = 12$ et $u_9 = -8$

Cas 2 : $u_{27} = 7$ et $u_{10} = \frac{15}{7}$

Suites géométriques



DÉFINITION

Une **suite géométrique** est une suite dont chaque terme s'obtient en **multipliant** au terme précédent un même nombre réel, appelé **raison**.

Une suite (u_n) dont tous les termes sont non nuls est **géométrique** si et seulement s'il existe un réel **q** tel que tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, la formule **explicite** est donnée par :

Si le premier terme est u_0

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Si le premier terme est u_p

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$



Méthode : Pour calculer le terme de rang **n**, on remplace **n** par le nombre.

Soit la suite géométrique définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n$. Calculer u_5 .

On lit par l'expression que $q = 2$ et $u_0 = 3$. On obtient :

$$u_4 = u_0 \times q^4 = 3 \times 2^4 = 48 \quad \checkmark$$



SENS DE VARIATION

Le sens de variation dépend du signe et de la valeur de **q**. (u_n) est strictement :

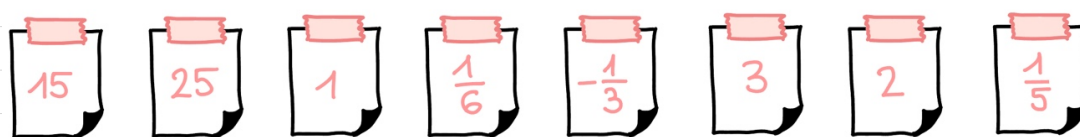
$q > 1$		$0 < q < 1$	
$u_0 > 0$	$u_0 < 0$	$u_0 > 0$	$u_0 < 0$
croissante	décroissante	décroissante	croissante

Exercices

1. Les suites suivantes sont-elles géométriques ?

- | | | |
|--|------------------------------|------------------------------|
| a. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n \times u_{n+1} = 5$ | ☐ Oui | ☐ Non |
| b. (u_n) telle que $u_1 < u_2$ et $u_4 < u_5$ | ☐ Oui | ☐ Non |
| c. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 2n^2 + 3$ | ☐ Oui | ☐ Non |
| d. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = \sqrt{3}u_n$ | ☐ Oui | ☐ Non |
| e. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 5 \times 3^n$ | ☐ Oui | ☐ Non |

2. Associer chaque suite à sa raison géométrique.



raison

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{6} \end{cases}$$

$$u_n = 3^{n-1}$$

$$u_n = 3^n \times 5^n$$

$$u_n = -3 \times 5^{-n}$$

raison

$$u_n = 5^{2n+1}$$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}$$

$$u_n = 3$$

$$u_n = 3 \times 2^n + 2^{n+1}$$

3. Les suites (u_n) suivantes sont géométriques de raison q .

- a. On donne $u_1 = 5$ et $q = -3$. Calculer u_2 et u_{15} .

- b. Calculer la raison de la suite telle que $u_5 = -20$ et $u_9 = -80$. Il peut y avoir plusieurs réponses possibles.

Variations d'une suite

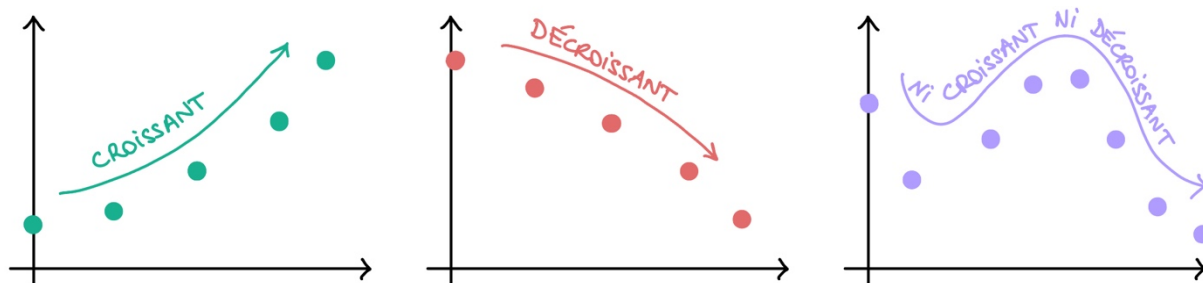
Soit (u_n) une suite. Pour tout n :

- si $u_{n+1} - u_n > 0$, alors (u_n) est strictement **croissante**.
- si $u_{n+1} - u_n < 0$, alors (u_n) est strictement **décroissante**.

Remarque : une suite peut être croissante ou décroissante à **partir d'un certain rang**, et pas forcément sur l'ensemble de définition.

Vocabulaire : Une suite est **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante.

Attention ! Une suite peut être **ni croissante, ni décroissante**.



CAS SPÉCIAL

Soit (u_n) une suite dont tous les termes sont **strictement positifs**. Pour tout n , si

- si $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ alors est strictement **croissante**.
- si $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors est strictement **décroissante**.

Cette propriété est pratique pour étudier les **suites géométriques**.



MÉTHODE

Pour déterminer le sens de variation d'une suite :

1. On détermine si la suite est **arithmétique, géométrique**, ou ni **l'une ni l'autre**.
2. Si la suite est arithmétique on conclut selon le **signe de la raison**.
3. Si la suite est géométrique, on conclut à l'aide du **tableau** de la fiche précédente.
4. Sinon, on calcule $u_{n+1} - u_n$ et on conclut selon le signe.

Exercices

1. Vrai ou faux ?

- a. Si pour tout n , $u_{n+1} \geq u_n$, alors la suite (u_n) est croissante. ☐ Vrai ☐ Faux
- b. Une suite décroissante peut parfois augmenter pour certaines valeurs de n . ☐ Vrai ☐ Faux
- c. Pour prouver qu'une suite définie explicitement est croissante, on peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$. ☐ Vrai ☐ Faux
- d. Pour une suite géométrique (u_n) de raison $q > 1$, la suite est décroissante. ☐ Vrai ☐ Faux
- e. Si $u_{n+1} = u_n$ pour tout n , la suite est constante et donc monotone. ☐ Vrai ☐ Faux

2. Déterminer le sens de variation des suites suivantes, définies pour $n \in \mathbb{N}$.

a. $u_n = (n - 1)^2 - n^2$

b. $u_n = -5 \times (-2)^n$

c. $u_n = \frac{5}{3^n}$

d. $u_0 = -\frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{7}{2}$

Somme d'une suite



SUITE ARITHMÉTIQUE

Soit n un entier naturel non nul, alors :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exemple : $1 + 2 + 3 + \dots + 20 = \frac{20 \times 21}{2} = 210$ ✓

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r . Notons S_n la somme de tous les termes d'indice inférieur ou égal à n .

- si le premier terme est u_0 alors $S_n = (n + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$
- si le premier terme est u_1 alors $S_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2}$

De manière générale, la somme est donnée par la formule :

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$



SUITE GÉOMÉTRIQUE

Soit n un entier naturel non nul. Si $q \neq 1$, alors :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exemple : $1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^5 = \frac{1 - 2^6}{1 - 2} = 63$ ✓

Propriété

Soit (v_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Notons S_n la somme de tous les termes d'indice inférieur ou égal à n .

- si le premier terme est v_0 alors $S_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
- si le premier terme est u_1 alors $S_n = v_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$

De manière générale, la somme est donnée par la formule :

$$S = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Exercices

1. Calculer les sommes suivantes sans calculatrice.

$$A = 1 + 2 + 3 + \dots + 10 =$$

$$B = 1 + 2 + 3 + \dots + 50 =$$

$$C = 1 + 2 + 3 + \dots + 100 =$$

$$D = 2 + 4 + 6 + \dots + 100 =$$

$$E = 11 + 12 + \dots + 20 =$$

2. Relier chaque somme à sa valeur.

$$1 + 2 + 3 + \dots + 30 \bullet$$

$$\bullet 465$$

$$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{10} \bullet$$

$$\bullet 3280$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2048 \bullet$$

$$\bullet 4095$$

$$60 + 61 + 62 + \dots + 99 + 100 \bullet$$

$$\bullet 88\,573$$

3. Calculer les sommes suivantes.

- a. Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = -2$.
Calculer la somme des 50 premiers termes.

- b. Soit (v_n) la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = 3$.
Calculer la somme $S = v_4 + v_5 + v_6 + \dots + v_{12}$.

Polynôme de second degré



DÉFINITION

On appelle **fonction polynôme** du second degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

coefficient du terme du plus haut degré (pointing to a) *coefficient constant* (pointing to c)
coefficient du terme de degré 1 (pointing to b)

Polynôme de second degré ou non ?

$f(x) = 2x^2 + 3\sqrt{x} + 2$	$f(x) = \sqrt{2}x^2 + 3x + 2$	$f(x) = x^3 + 3x^2 + x$	$f(x) = 5x^2 - 1$
✗ Non car il y a un terme en $\sqrt{x}$	✓ Oui car tous les coefficients sont réels. Ici $a = \sqrt{2}$.	✗ Non car il y a un terme en x^3	✓ Oui car tous les coefficients sont réels. Ici $b = 0$.



FORME CANONIQUE

Toute fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, peut s'écrire sous forme canonique :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \quad \text{où} \quad \alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha)$$



Méthode : Comment mettre sous forme canonique ?

Mettre sous forme canonique $x^2 + 10x + 7$

- On reconnaît dans $x^2 + 10x$ **le début d'une identité remarquable**.
- Pour faire apparaître l'expression complète, on **introduit le terme** $+5^2 - 5^2$ (on peut car il vaut 0)
- Dans la dernière étape, on a regroupé les trois premiers termes dont la somme s'écrit sous **forme factorisée** $(x + 5)^2$
- On ajoute les deux derniers termes entre eux.

$$x^2 + 10x = x^2 + \underset{a}{2} \times \underset{b}{x} \times 5$$

$$x^2 + 10x + 7 = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 - 5^2 + 7$$

$$= \underbrace{(x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2)}_{\text{identité remarquable}} - (25 - 7)$$

$$x^2 + 10x + 7 = (x + 5)^2 - 18$$

je regroupe les 2 derniers termes

Exercices

- 1. Indiquer si les fonctions sont des polynômes de degré 2 ou non. Si oui, donner les valeurs de a, b et c.**

	oui/non	Coefficients		
		a	b	c
a. $f(x) = 3x^2 + x - 1$				
b. $f(x) = x^3 - x^2 + 3$				
c. $f(x) = \pi x^2 - (1+\pi)x + \pi$				
d. $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$				
e. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x} - 3$				

- 2. Déterminer la forme canonique des fonctions suivantes.**

a. $f(x) = x^2 + 4x + 9$

b. $f(x) = x^2 - 6x$

c. $f(x) = x^2 + 3x + 1$

d. $f(x) = x^2 - 6x - 16$

Équation du second degré



DISCRIMINANT

On appelle **discriminant** de la fonction $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ le réel

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

La forme canonique de f s'écrit alors :
 $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\Delta}{4a}$

À quoi sert le discriminant ?

À connaître le nombre de solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Graphiquement, résoudre $ax^2 + bx + c = 0$, c'est chercher les intersections de la courbe qui représente f et l'axe horizontal.

Si $\Delta < 0$

L'équation n'a pas de solution réelle.



Si $\Delta = 0$

L'équation a une seule solution

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

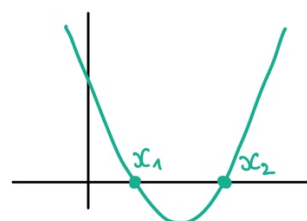


Si $\Delta > 0$

L'équation a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$



RACINES ET FACTORISATION

x_1 et x_2 sont appelées les racines de $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$. La fonction peut alors se factoriser selon la valeur de Δ .

- Si $\Delta < 0$, $f(x)$ ne s'écrit pas comme un produit de polynômes de degré 1.
- Si $\Delta = 0$, alors $f(x) = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$, alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Somme et produit des racines

$$\text{Somme} = -\frac{b}{a}$$

$$\text{Produit} = \frac{c}{a}$$

Exercices

1. Relie chaque fonction au produit et à la somme de ses racines.

SOMME

 $\frac{1}{6}$

•

$$\bullet \quad f(x) = 3x^2 - 6x + 1 \quad \bullet$$

6

•

$$\bullet \quad g(x) = 6x^2 - 1 + 3 \quad \bullet$$

2

•

$$\bullet \quad h(x) = x^2 - 6x + 3 \quad \bullet$$

3

•

$$\bullet \quad k(x) = -x^2 + 3x - 6 \quad \bullet$$

PRODUIT

6

•

3

•

 $\frac{1}{3}$

•

 $\frac{1}{2}$

•

2. Résoudre les équations suivantes.

$$2x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$3x + 3x^2 = -1$$

$$8x^2 - 4x + 2 = \frac{3}{2}$$

$$-2(x-1)^2 - 3 = 0$$

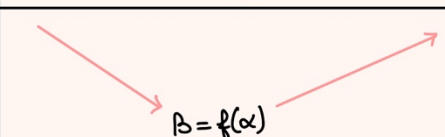
$$(x+2)(3-2x) = 0$$

Variations d'un trinôme

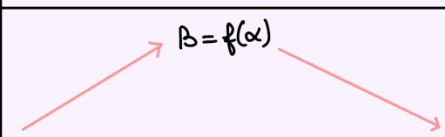
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c des réels et $a \neq 0$.

Les **variations** du trinôme dépendent du **signe de a** .

Si $a > 0$

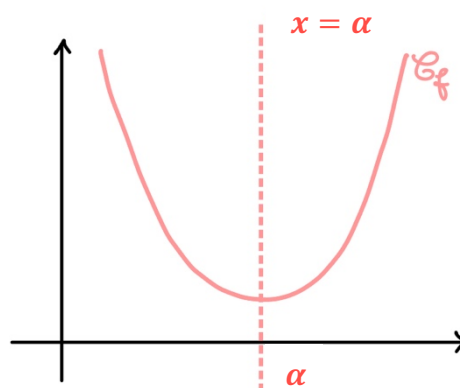
x	$-\infty$	$\alpha = -\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f			

Si $a < 0$

x	$-\infty$	$\alpha = -\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f			

Axe de symétrie

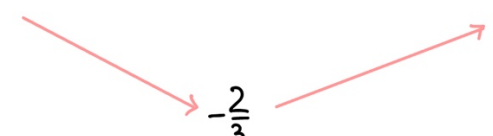
Dans un repère orthonormé, $\mathcal{C}_f$ a pour axe de symétrie la **droite d'équation $x = \alpha$** .



Exemple

Dresser le tableau de variations de f définie par $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$.

$$\begin{aligned} a &= 3 > 0 \\ \alpha &= -\frac{(-2)}{2 \times 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ f(\alpha) &= f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$\alpha = \frac{1}{3}$	$+\infty$
f			

Exercices

1. Cocher la bonne réponse.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 7$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- a. $\mathcal{C}_f$ a pour axe de symétrie ☐ $x = 3$ ☐ $x = -3$ ☐ $y = 3$ ☐ $x = 7$
- b. Sur l'intervalle $] -\infty; 3]$, f est ☐ croissante ☐ décroissante
- c. Le minimum de f est ☐ 6 ☐ -2 ☐ 2 ☐ 3

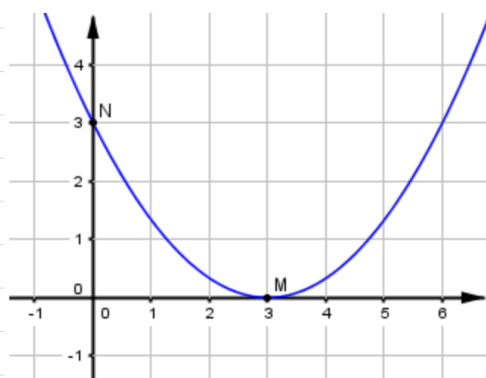
2. Déterminer les tableaux de variations des fonctions suivantes.

- a. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x + 3$

- b. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 1$

- c. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 - x)(1 + x)$

3. Donner la forme factorisée du polynôme de degré 2 ci-dessous.



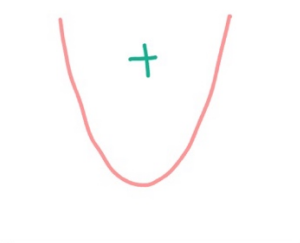
Signes d'un trinôme

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c des réels et $a \neq 0$.

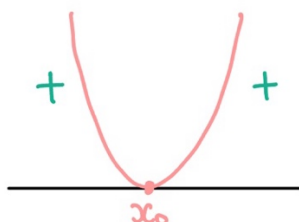
Les **variations du trinôme** dépendent du **signe de a** .

Si $a > 0$

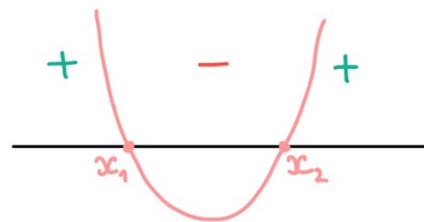
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	+	



x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	+	0	+

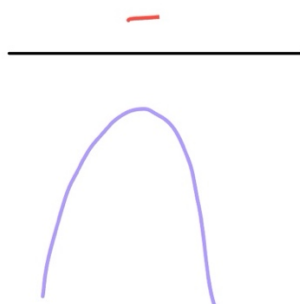


x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

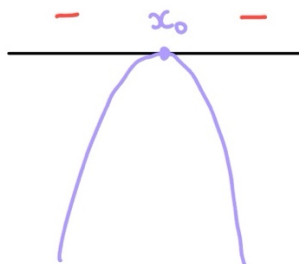


Si $a < 0$

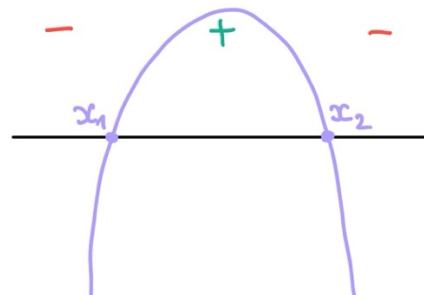
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	-	



x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	-	0	-



x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-



Exercices

1. Dresser le tableau de signes des polynômes, connaissant leurs racines.

$$A(x) = 2x^2 - 8x + 6 \quad \text{Racines : 1 et 3}$$

x	
$A(x)$	

$$B(x) = -3x^2 - 11x + 4 \quad \text{Racines : } \frac{1}{3} \text{ et } -4$$

x	
$B(x)$	

$$R(x) = x^2 - 10x + 38 \quad \text{Pas de racine}$$

x	
$C(x)$	

2. Dresser le tableau de signes des polynômes suivants.

$$A(x) = x^2 - 9$$

x	
$A(x)$	

$$B(x) = -2x^2 - 8x$$

x	
$B(x)$	

$$F(x) = 3x - 2x^2 - 1$$

x	
$F(x)$	

Inéquations de second degré

Méthode pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$2x^2 - 5x + 17 \gg x^2 + 6x - 13$$

Étape 1. Se ramener à un second membre nul.

$$2x^2 - 5x + 17 \gg x^2 + 6x - 13 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 11x + 30 \geq 0$$

Étape 2. Déterminer les racines de la fonction polynôme ainsi obtenue.

$$\Delta = 11^2 - 4 \times 1 \times 30 = 1 > 0$$

La fonction polynôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{11-1}{2} = 5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{11+1}{2} = 6$$

Étape 3. Dresser le tableau de signes de cette fonction.

Comme $a = 1 > 0$, $x^2 - 11x + 30$ est positif à l'extérieur des racines :

x	$-\infty$	5	6	$+\infty$
$x^2 - 11x + 30$	+	0	0	+

↑
↑

Étape 4. Conclure en revenant à l'inéquation de l'énoncé.

$$2x^2 - 5x + 17 \gg x^2 + 6x - 13 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 11x + 30 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; 5] \cup [6; +\infty[$$

Attention, il faut bien penser à

1. placer les racines dans **l'ordre croissant** dans le tableau et
2. bien vérifier si les crochets de l'ensemble des solutions sont **ouverts ou fermés**, selon que l'inégalité demandée est stricte ou non.

Exercices

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

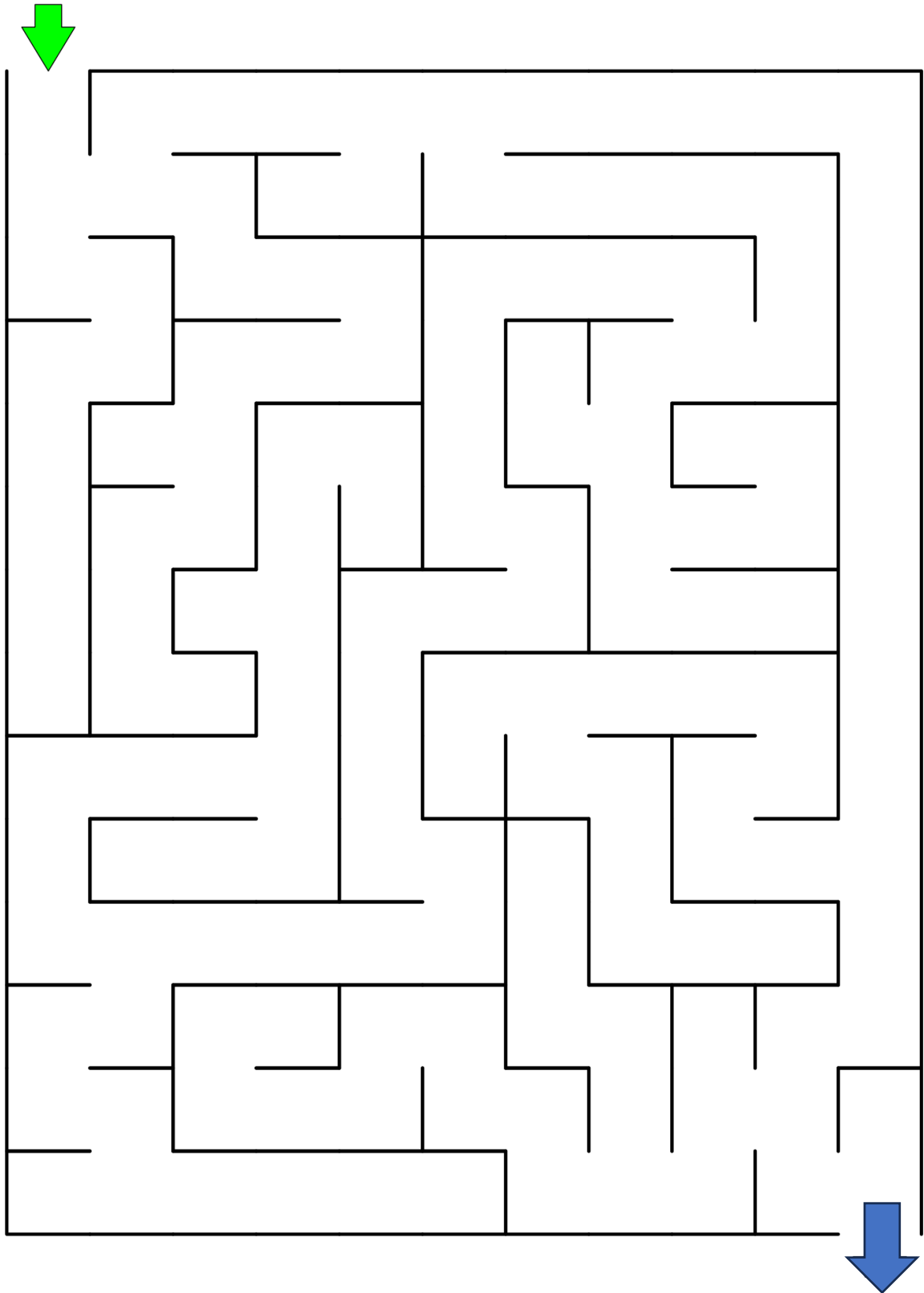
a. $3x^2 > 2x + 1$

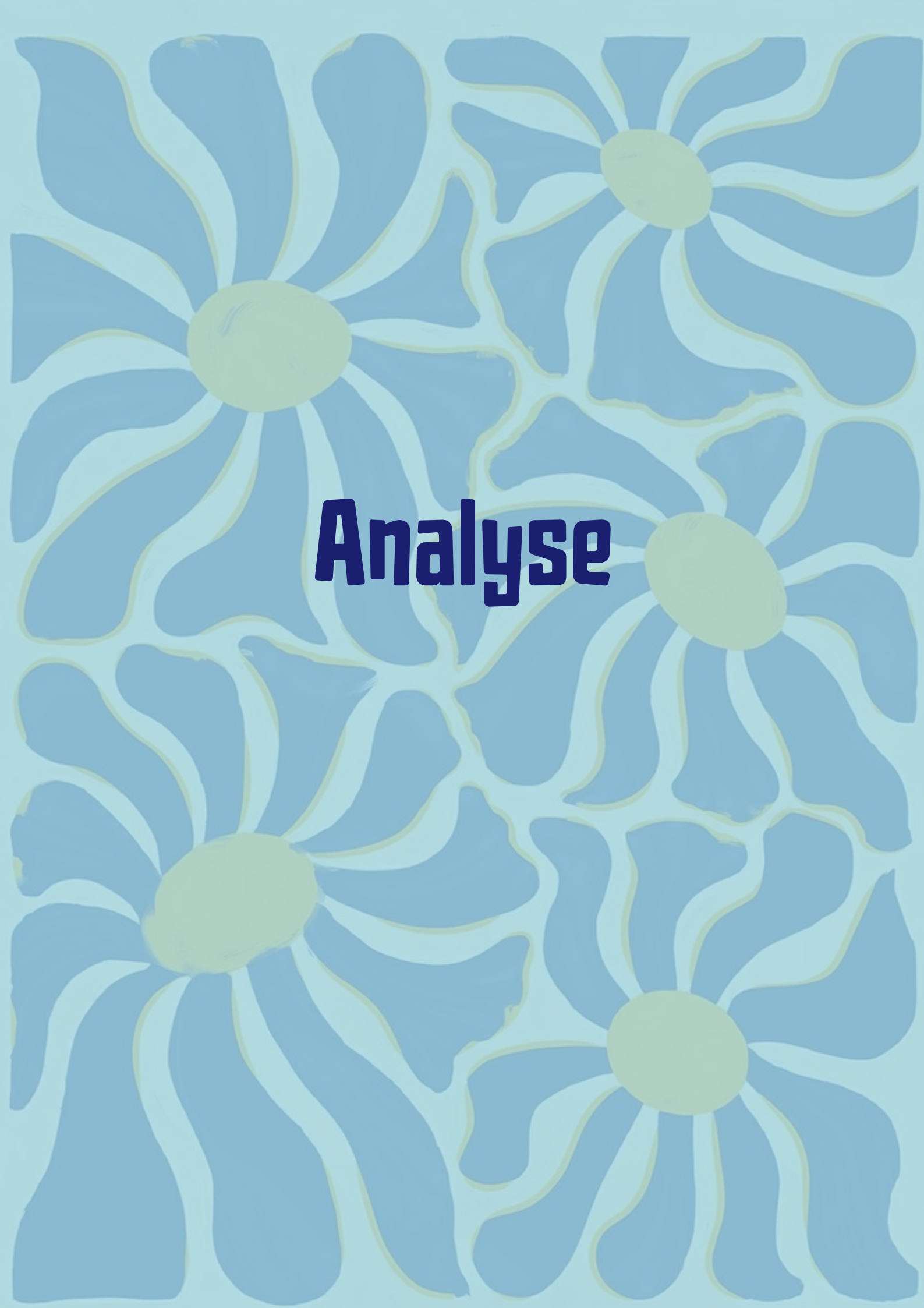
b. $x^2 \leq 6x - 1$

c. $\frac{2x^2 - 12x + 19}{x - 2} \leq 0$

d. $\frac{1}{x} > \frac{x}{x+2}$

Jeu



The background of the slide is a repeating pattern of stylized flowers. Each flower has a central yellow circle and several blue petals. The petals are outlined in yellow, creating a high-contrast, graphic look. The flowers are arranged in a grid-like fashion, with some overlapping.

Analyse

Dérivée en un point



DÉFINITIONS

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , a un réel tel que $a \in I$ et h un réel non nul tel que $a + h \in I$. On appelle **taux de variation** de f en a le quotient :

$$\text{taux de variation} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Dérivabilité

On dit que f **est dérivable en a** si la limite $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0 existe et est finie. Dans ce cas, on note $f'(a)$ cette limite et on l'appelle **nombre dérivé de f en a** .



INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

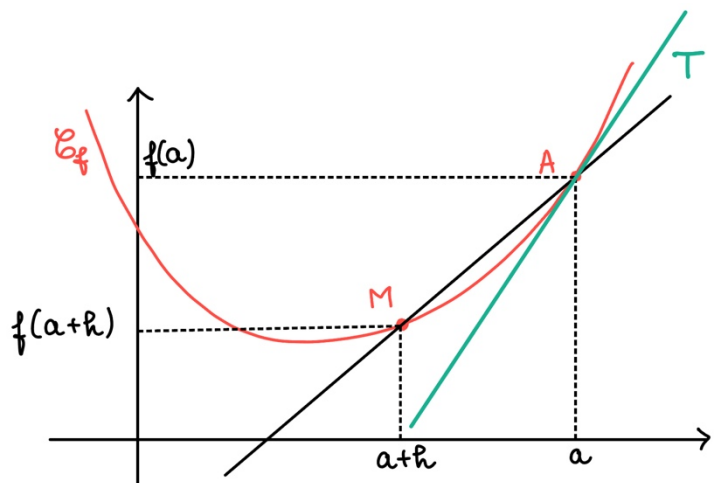
On considère un plan muni d'un repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$, la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f . Soit $\mathbf{A}(a; f(a))$ un point $\mathcal{C}_f$ et un point $\mathbf{M}$ autre que $\mathbf{A}$.

Alors $\mathbf{M}$ a pour coordonnées $(a + h; f(a + h))$ avec $h \neq 0$.

Le **taux de variation** $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ représente le **coefficient directeur** de la droite (AM) .

Dire que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $f'(a)$ quand h tend vers 0 signifie que le **coefficient directeur de la sécante** (AM) tend vers $f'(a)$.

Autrement dit, quand $\mathbf{M}$ tend vers $\mathbf{A}$ sur $\mathcal{C}_f$, la droite (AM) tend vers une position limite : celle de la droite $\mathbf{T}$ passant par $\mathbf{A}$ et de coefficient directeur $f'(a)$.



Exercices

1. Cocher la bonne case.

1. f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = 3+h$

- On peut dire que f est dérivable en 3 ☐ Vrai ☐ Faux
- $f'(-2) = 3$ ☐ Vrai ☐ Faux

2. h est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\frac{h(3+h) - h(3)}{h} = 2(h+1)^2 - 2h + 5$

- h est dérivable en 3 ☐ Vrai ☐ Faux
- $h'(3) = 5$ ☐ Vrai ☐ Faux

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)^2$.

a. Déterminer $A = \frac{f(1+h) - f(-1)}{h}$ en fonction de h et simplifier son expression.

b. La fonction f est-elle dérivable en 1 ? Si oui, que vaut $f'(1)$?

3. Soit g la fonction définie sur $] -\infty; -\frac{1}{2} [$ par $g(x) = \frac{1}{2x+1}$. Soit h un réel non nul, proche de 0.

a. Montrer que $\frac{g(h) - g(0)}{h} = -\frac{2}{2h+1}$.

b. La fonction g est-elle dérivable en 0 ? Si oui, que vaut $g'(0)$?

Fonctions dérivées



DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f **est dérivable sur I** si f est **dérivable** en tout x de I . On appelle alors **fonction dérivée** de f la fonction qui à tout nombre de $x \in I$ associe le nombre $f'(x)$, et on la note f' .



DÉRIVÉES USUELLES ET OPÉRATIONS

dérivées usuelles

f	f'	I_{der}
k constante	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{*+}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

opérations

f	f'
$(u+v)'$	$u' + v'$
ku k constante	ku'
$(uv)'$	$u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$v \circ u(x)$ ou $v(u(x))$	$v'(u(x)) \times u'(x)$

Exercices

1. Relier chacune de ces fonctions à la fonction dérivée correspondante.

x^2	x^{-5}	$-5x+3$	-6	$\sqrt{-2x+7}$	$3x^5$	$\frac{1}{x^4}$
0	$-4x^{-5}$	$\frac{-1}{\sqrt{-2x+7}}$	$15x^4$	$\frac{-5}{x^6}$	-5	$2x$

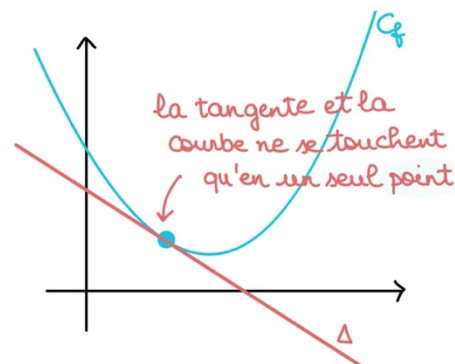
2. Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes.

$f(x) = x^2 + 1$	$f(x) = x + 3\sqrt{x}$
$f(x) = 3x^5 + 7x^2 + 1$	$f(x) = \frac{x^4}{5} + 2x^2 + \frac{1}{x^2}$
$f(x) = x\sqrt{x}$	$f(x) = \frac{1}{x^5}(3 - x)$
$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3 - 1}$	$f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{x^2 - 4}$

Tangente en un point

DÉFINITION DE LA TANGENTE

Si f est dérivable en a , la droite passant par $A(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée **tangente à C_f au point A**.



ÉQUATION RÉDUITE DE LA TANGENTE

Soit f une fonction dérivable en a , alors l'équation réduite de la tangente au point de C_f d'abscisse a est :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

dérivée de f en a

 **Méthode : déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a**

1. On place le point A d'abscisse a sur la courbe de f .
2. On détermine $f'(a)$
3. À partir du point A, on trace le vecteur de coordonnées $(1; f'(a))$: c'est un **vecteur directeur** de la tangente cherchée.
4. On utilise la formule : $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

On donne la courbe C_f ci-dessous. On sait que f est dérivable en -2 et que $f'(-2) = \frac{5}{3}$.
On cherche à tracer la tangente à C_f au point d'abscisse -2 .

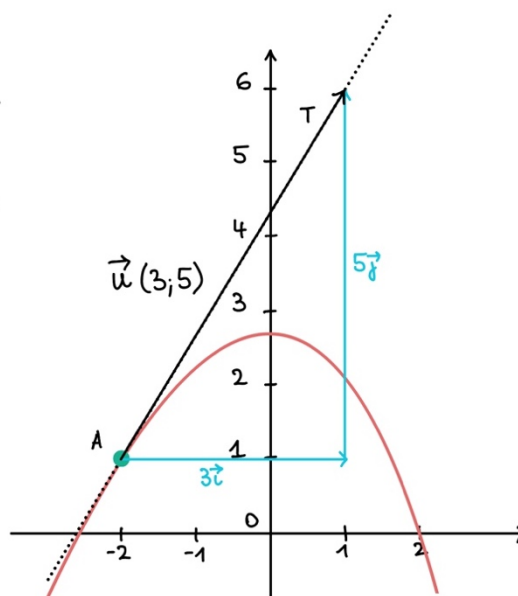
- Un vecteur $\vec{u}(3; 5)$ est un vecteur directeur de la tangente.
- On applique la formule $a = -2$:

$$y = f(-2) + f'(-2)(x - (-2))$$

$$= f(-2) + f'(-2)(x + 2)$$
- Ici on lit $f(-2)$: c'est l'ordonnée de A et donc $f(-2) = 1$

On en déduit :

$$y = 1 + \frac{5}{3}(x + 2) = \frac{5}{3}x + \frac{13}{3}$$



Exercices

1. Relier chaque définition de tangente à son équation réduite.

$$f(1)=5 \text{ et } f'(-1)=0 \quad \bullet$$

$$\bullet y=5$$

$$g'(2)=-1 \text{ et } g(2)=3 \quad \bullet$$

$$\bullet y=2x-6$$

$$h'(-5)=0,5 \text{ et } h(-5)=-1,5 \quad \bullet$$

$$\bullet y=-x+5$$

$$k(3)=0 \text{ et } k'(3)=2 \quad \bullet$$

$$\bullet y=0,5x+1$$

2. On a tracé la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $[-1; 4]$. La droite (AB) est tangente à $\mathcal{C}_f$ en A.

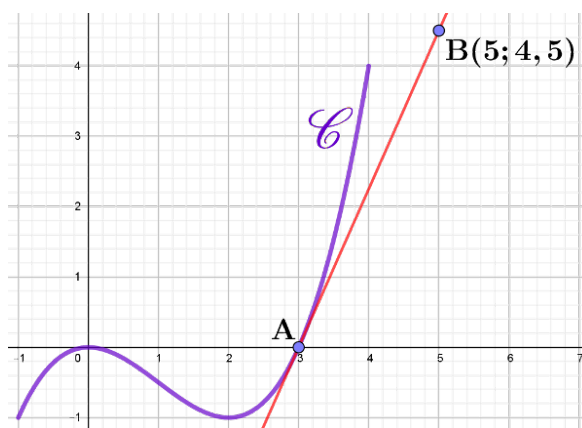
À l'aide du graphique, déterminer :

$$f(0) =$$

$$f'(0) =$$

$$f(3) =$$

$$f'(3) =$$



3. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer une équation de la tangente à la courbe représentant la fonction au point d'abscisse a .

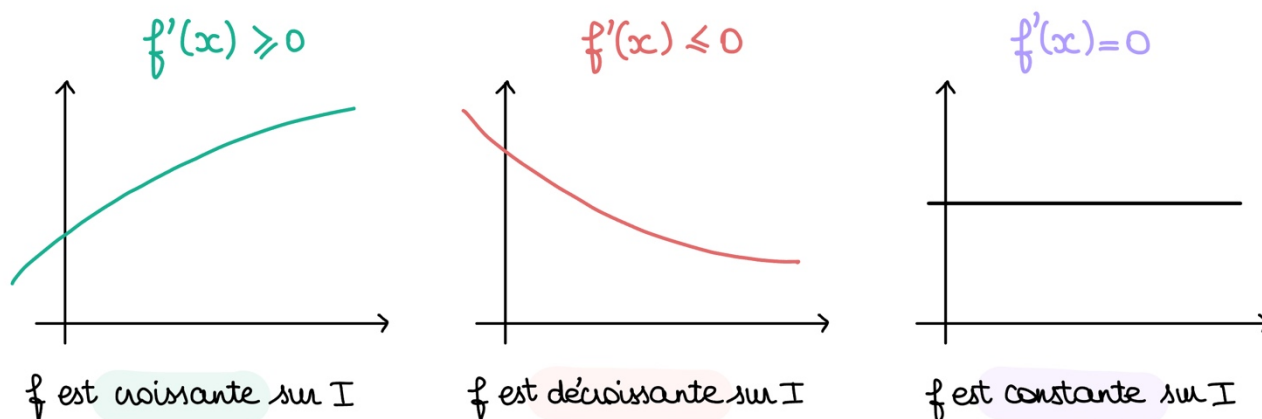
a. $f(x) = x^3 - 3x + 1 \quad a = 0$

b. $f(x) = \frac{x^2}{3x-9} \quad a = 1$

c. $f(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad a = 2$

Dérivées et variations

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .



MÉTHODE : Étudier les variations d'une fonction

Exemple : étudier les variations de f définie par $f(x) = x^3 - 3x$

1. Calculer $f'(x)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

2. Si son signe n'est pas évident, mettre $f'(x)$ sous forme de produit ou de quotient pour construire un **tableau de signes**.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x^2 - 1) \\ &= 3(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

Si $f'(x)$ ne peut être mis sous forme d'un produit ou d'un quotient, résoudre l'équation $f'(x) = 0$ et l'inéquation $f'(x) > 0$.

$3 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $(x-1)(x+1)$.

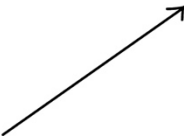
3. À partir du **signe de $f'(x)$** , donner les variations de f dans un tableau de variations.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x-1$	-		- 0	+
$x+1$	-	0	+	
$(x-1)(x+1)$	+	0	- 0	+
$f(x)$				

Exercices

1. Compléter les tableaux de variations suivants.

x	$-\infty$	5	$+\infty$
f'		0	+
f			

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
g'		-	0	+
g				

2. Étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$.

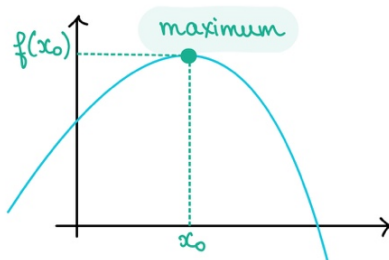
Extremum



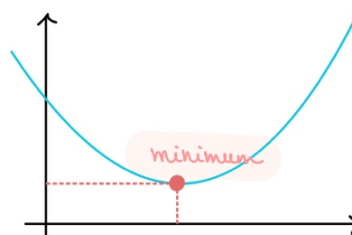
DÉFINITIONS

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un élément de I .

$f(x_0)$ est le **maximum** de f sur $I \Leftrightarrow$ pour tout x de I
 $f(x) \leq f(x_0)$



$f(x_0)$ est le **minimum** de f sur $I \Leftrightarrow$ pour tout x de I
 $f(x) \geq f(x_0)$



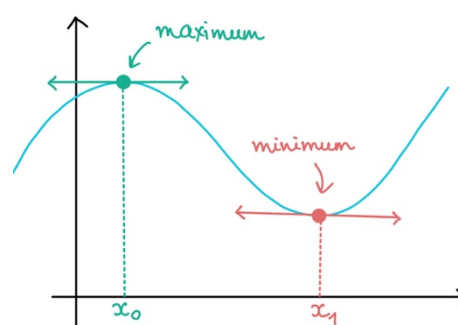
Vocabulaire

- Lorsque x_0 n'est pas une borne de I , on dit que f admet un **maximum local** en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 pour lequel $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout x de J .
- Lorsque x_0 n'est pas une borne de I , on dit que f admet un **minimum local** en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 pour lequel $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout x de J .
- $f(x_0)$ est un **extremum** de f si $f(x_0)$ est un **maximum** ou un **minimum** local.

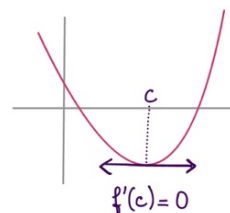


EXTREMUM ET DÉRIVÉE

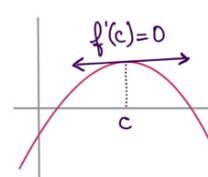
Si f présente un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$. En **extremum local**, la tangente à la courbe est **horizontale**.



Si f' s'annule en x_0 et change de signe en x_0 alors, f admet un extremum local en x_0 .



	c		
f'	-	0	+
f	↘ ↗		



	c		
f'	+	0	-
f	↗ ↘		

Exercices

1. Indiquer pour les fonctions de référence suivantes si elles admettent un minimum ou maximal local. Donner les coordonnées de l'extremum local.

Affine	Carré	Cube	Racine carrée

2. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Démontrer que cette fonction admet un minimum qu'on précisera.

Exponentielle



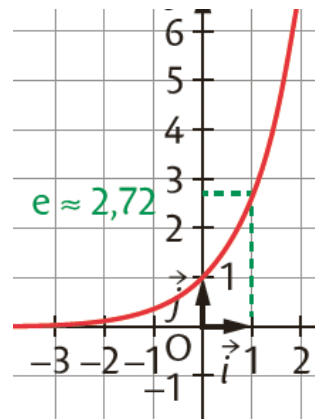
DÉFINITIONS

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

La fonction **exponentielle** se note **exp**.

On note $e = \exp(1)$. $e \approx 2,72$.

On remarque que $\exp(a) = [\exp(1)]^a = e^a$



PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$(e^a)^n = e^{a \times n}$$

→ on retrouve les propriétés de la puissance



Méthode : simplifier une expression avec l'exponentielle

Exemple 1 : Simplifier l'expression $e^5 \times e^2 \times e^{-7}$.

On utilise l'égalité $e^x \times e^y = e^{x+y}$: $e^5 \times e^2 \times e^{-7} = e^{5+2-7} = e^0 = 1$ ✓

Exemple 2 : Montrer que $\frac{e^9 \times e}{(e^3)^2} = (e^2)^2$.

On sait que $e^1 = e$ donc $\frac{e^9 \times e}{(e^3)^2} = \frac{e^9 \times e^1}{e^3 \times e^3}$.

On utilise l'égalité $e^x \times e^y = e^{x+y}$ au numérateur et au dénominateur, puis $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$:

$$\frac{e^9 \times e}{(e^3)^2} = \frac{e^{9+1}}{e^{2 \times 3}} = \frac{e^{10}}{e^6} = e^4 = (e^2)^2 \quad \checkmark$$

Exercices

1. Simplifier les expressions suivantes.

$$\frac{e^4 \times e^{-5}}{e} =$$

$$\frac{e^{-2} \times e^4 \times e^{-1}}{e^7} =$$

$$e^3 \times (e^{-4})^2 =$$

$$\frac{e \times (e^5)^7}{e^{-9} \times e^4} =$$

$$1 - \left(\left(e^{\frac{3}{2}} \right) \times e^{-3} \right)^2 \times e^3 =$$

$$(e^x)^3 \times (e^{2x} - e^{-3x}) =$$

2. Factoriser les expressions suivantes.

$$A = 5e^{-4x} - 3e^{-4x} + 7e^{-4x} =$$

$$B = 9e^{2x} + 6 + e^{2x} =$$

$$C = e^{2x} - 9x^2 =$$

$$D = (-5x + 2)(e^{-2x})^4 - 5e^{-8x} =$$

3. Démontrer l'égalité $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$.

(In)équations avec exp



ÉQUATION

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ $e^{2x} = e^3$

$$\begin{aligned} e^{2x} = e^3 &\Leftrightarrow 2x = 3 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$



INÉQUATION

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

$$e^a \geq e^b \Leftrightarrow a \geq b$$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\frac{e^{3x^2}}{e^{6x}} \geq 1$.

$$\begin{aligned} \frac{e^{3x^2}}{e^{6x}} \geq 1 &\Leftrightarrow e^{3x^2} \times \frac{1}{e^{6x}} \geq 1 \\ &\Leftrightarrow e^{3x^2} \times e^{-6x} \geq 1 \\ &\Leftrightarrow e^{3x^2-6x} \geq e^0 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 - 6x \geq 0 \end{aligned}$$

On factorise et on étudie le signe de $3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.

Pour cela on dresse un tableau de signes.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$3x$	$-$	0	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$
$3x(x-2)$	$+$	0	$-$	$+$

L'ensemble des solutions est donc $] -\infty; 0] \cup [2; +\infty[$.

Exercices

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$e^x - e = 0$	$4xe^x + 3e^{x+2} = 0$
$e^{2x+4} = e^2$	
$e^x + 5 = 0$	$e^{2x} - e^x - e^{x+1} + e = 0$
$e^{-3x+5} = 1$	

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a. $e^{-2x} > 1$

b. $e^{2x} < e^6$

c. $e^{3x+4} \geq e^{13}$

d. $e^{-2x+5} \leq e^9$

e. $e^{3x+5} \geq e^{6x-1}$

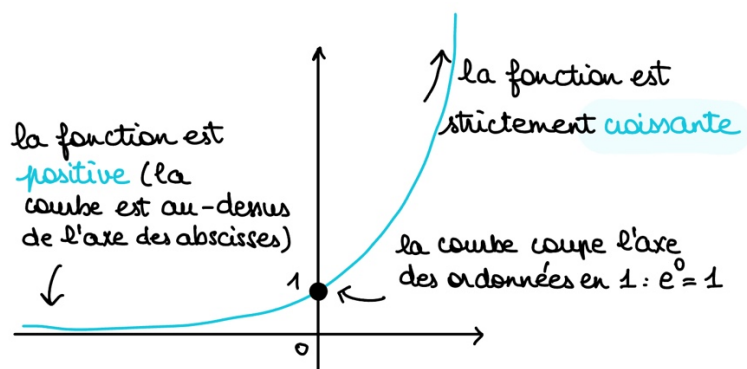
Fonction exponentielle



DÉFINITION

La fonction **exponentielle** $\exp$ est définie sur $\mathbb{R}$: $f(x) = \exp(x)$.

La fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x			

Diagram showing the curve of e^x passing through $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, and $(+\infty, +\infty)$.



DÉRIVATION

$$(e^x)' = e^x$$

→ la fonction dérivée de l'exponentielle est **ELLE-MÊME**

$$(e^{ax+b})' = a e^{ax+b}$$

→ technique : on multiplie par a la fonction pour obtenir la dérivée :

$$(e^{2x+3})' = 2e^{2x+3}$$

Exercices

1. Relier chaque expression de fonction à l'expression de sa dérivée.

$$-2e^{3x}$$

$$4e^{-2x} + 8e^x$$

$$\frac{2x-1}{e^x}$$

$$\sqrt{x}e^x$$

$$\frac{3-2x}{e^x}$$

$$-8e^{-2x} + 8e^x$$

$$\frac{(2x+1)e^x}{2\sqrt{x}}$$

$$-6e^{3x}$$

2. Déterminer $f'(x)$ pour chacun des cas suivants.

$f(x)$	$f'(x)$
$e^x + x^2$	
$3e^x + 4x + 6$	
xe^x	

$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{x^2+5}{e^x}$	
e^{5x-3}	
e^{-2x-1}	

3. Déterminer les variations des fonctions suivantes.

a. $f(x) = e^{x+4} + 3x$

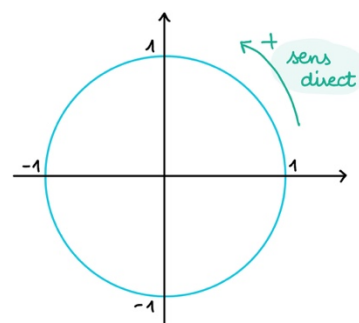
b. $f(x) = -\frac{e^x}{e^{x+1}}$

c. $f(x) = (x^2 + 1)e^{2x}$

Cercle trigonométrique

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, le cercle **trigonométrique** est le cercle de centre **O** et de **rayon 1**.

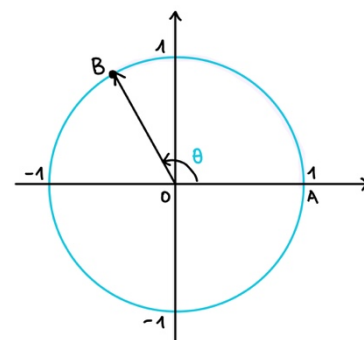
Sur un cercle, on appelle **sens direct**, **sens positif** ou **sens trigonométrique** le sens contraire des aiguilles d'une montre.



ARC DE CERCLE ET MESURE EN RADIAN

Sur le cercle de centre O et de rayon R, si A et B sont deux points du cercle tels que $\widehat{AOB} = \theta$ radians, alors la longueur de l'arc $\widehat{AB}$ est donnée par la formule :

$$AB = R \times \theta$$



On définit alors une nouvelle unité d'angle : le **radian**, tel qu'un tour complet mesure **360°** ou **2π radians**. En effet, son rayon est 1 donc $P = 2\pi R = 2\pi \times 1 = 2\pi$. ✓

La longueur du cercle est égale à 2π .

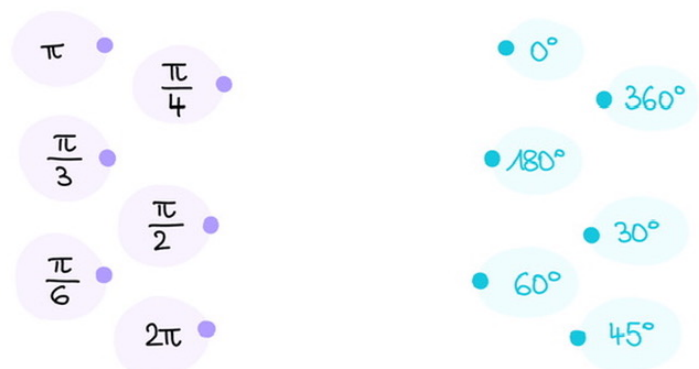


CORRESPONDANCE DEGRÉS ET RADIAN

Angle en degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Exercices

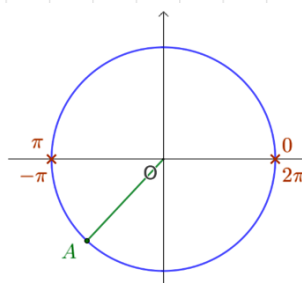
1. Relier la valeur en radian ou en degré des angles donnés sans regarder le cours.



2. Lire sur le cercle trigonométrique le nombre associé au point A.

Sur l'intervalle $[0; 2\pi]$:

Sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$:



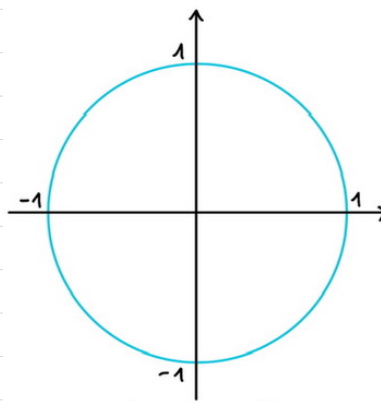
3. Placer les points suivants sur le cercle trigonométrique.

Point A associé au nombre $\frac{3\pi}{4}$

Point B associé au nombre $\frac{9\pi}{4}$

Point C associé au nombre $\frac{8\pi}{3}$

Point D associé au nombre $-\frac{9\pi}{2}$



4. Déterminer la mesure principale, c'est-à-dire la valeur dans $]-\pi; \pi[$ de chacun des angles suivants. 🌶

a. $\frac{22\pi}{3} =$

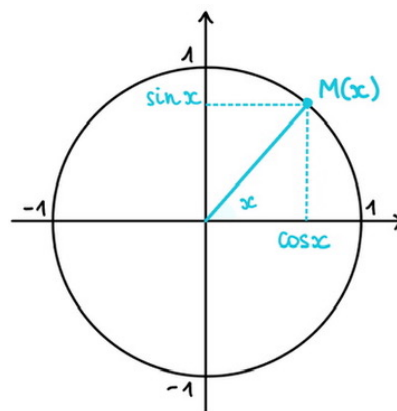
b. $-\frac{27\pi}{4} =$

c. $\frac{79\pi}{6} =$

Cosinus et sinus d'un angle

Soit M le point du cercle trigonométrique associé au nombre x (qui est un angle orienté).

- Le **cosinus** de x est l'abscisse de M et on note $\cos(x)$;
- Le **sinus** de x est l'ordonnée de M et on note $\sin(x)$.



$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

Notation : $(\sin(x))^2$, par exemple, se note $\sin^2(x)$.



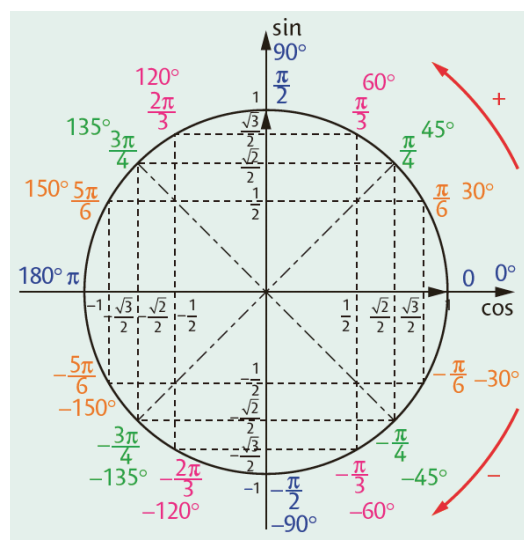
VALEURS REMARQUABLES

Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Angles associés

- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$



Exercices

1. Relier chaque valeur à son cosinus et sinus.

COSINUS		SINUS	
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	1	
0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}$	

2. Déterminer grâce au cercle trigonométrique les valeurs suivantes. 🌶

$$\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) =$$

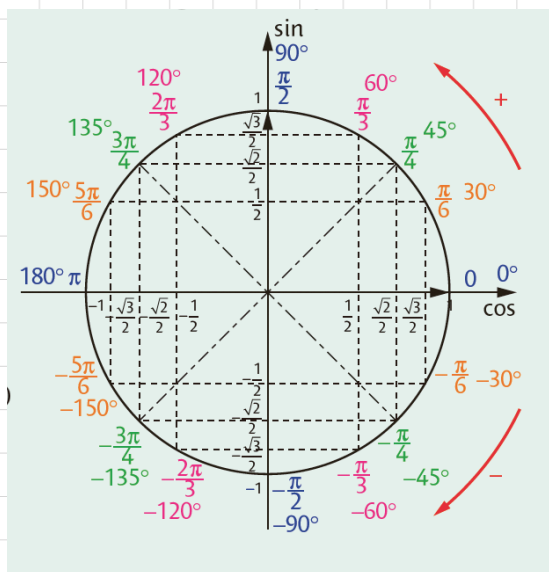
$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) =$$

$$\sin(-\pi) =$$

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) =$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) =$$

$$\sin\left(-\frac{17\pi}{3}\right) =$$



Équations trigonométriques



RÉSoudre $\cos x = \cos a$ ou $\sin x = \sin a$

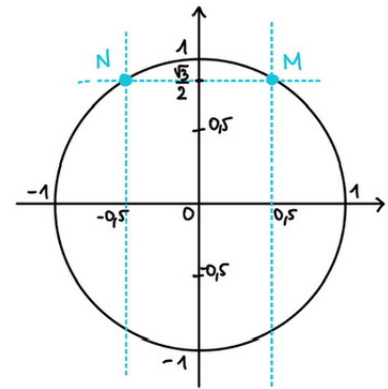
- Placer sur le cercle trigonométrique le point M d'affixe a , puis, s'il existe, l'autre point du cercle ayant la même abscisse (ou ordonnée).
- Déduire les solutions de l'équation à l'aide des résultats suivants :

$$\cos(x) = \cos(a) \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -a + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - a + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- On a $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Plaçons $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$. L'autre point du cercle ayant pour ordonnée $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est le point $N\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.
- $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{ou} \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$



TROUVER $\cos a$ CONNAISSANT $\sin a$ (OU INVERSEMENT)

Exemple : Soit a un réel vérifiant $\sin a = 0,8$ et tel que $a \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Déterminer la valeur de $\cos a$.

Calculons $\cos^2(a)$:

- Calculer $\cos^2 a$ à l'aide de la relation $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$.

$$\begin{aligned} \cos^2(a) + \sin^2(a) &= 1 \Leftrightarrow \cos^2(a) + 0,8^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \cos^2(a) = 0,36 \end{aligned}$$

- Déduire, de l'intervalle auquel appartient a , le signe de $\cos a$.

Comme $a \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, on sait que $\cos(a)$ est négatif. Par conséquent,

$$\cos(a) = -0,6$$

Exercices

1. Déterminer les réels t de l'intervalle $] -\pi; \pi[$ tels que :

$$\cos(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(t) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{🌶} \sin(t) = \sin\left(\frac{17\pi}{5}\right)$$

2. Déterminer les réels t tels que :

$$\cos(t) = \cos \frac{\pi}{8}$$

$$\cos(t) = \frac{1}{2}$$

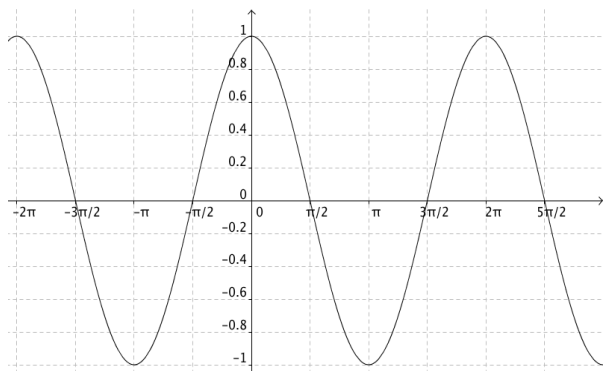
$$\sin(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(t) = -1$$

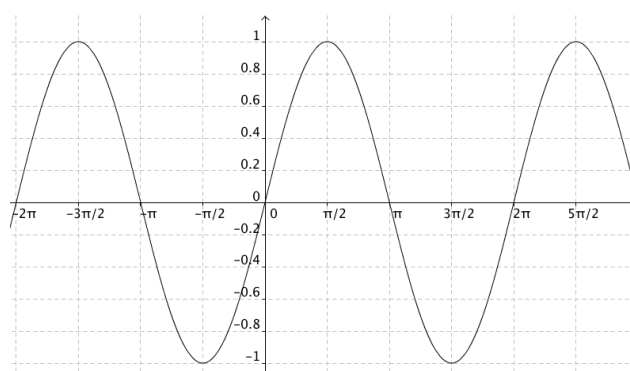
3. Soit a un réel vérifiant $\cos a = \frac{5}{7}$ et tel que $a \in [0; \pi]$. Déterminer $\sin a$.

Fonctions trigonométriques

La fonction **cosinus** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x , associe $\cos(x)$.



La fonction **sinus**, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x , associe $\sin(x)$.



PÉRIODICITÉ

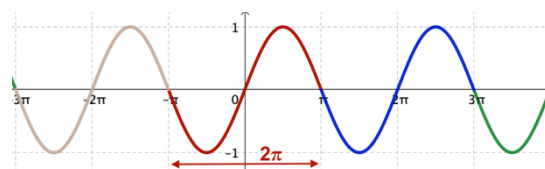
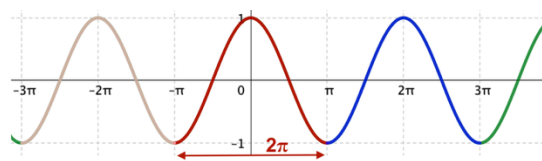
$$\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$$

$$\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$$

où k entier relatif.

On dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques de période 2π** .

Cela signifie qu'on retrouve le même morceau de courbe sur chaque intervalle de longueur 2π .



PARITÉ

Rappel de Seconde :

Une fonction dont la courbe est

- **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées** est une fonction **paire**.
- **symétrique par rapport à l'origine du repère** est une fonction **impaire**.

La fonction **cosinus** est **paire**
et on a :

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

La fonction **sinus** est **impaire**
et on a :

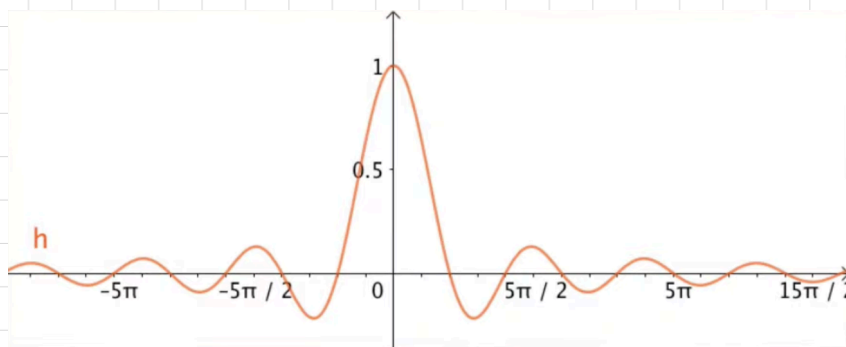
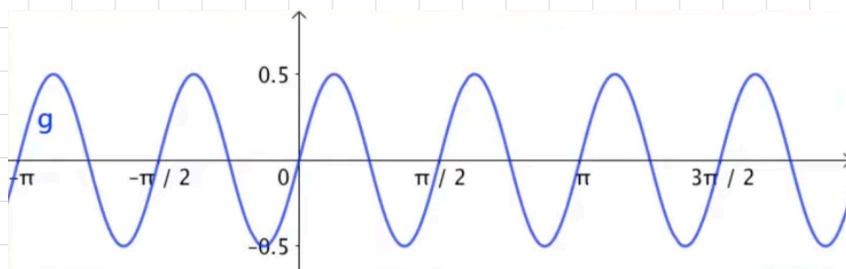
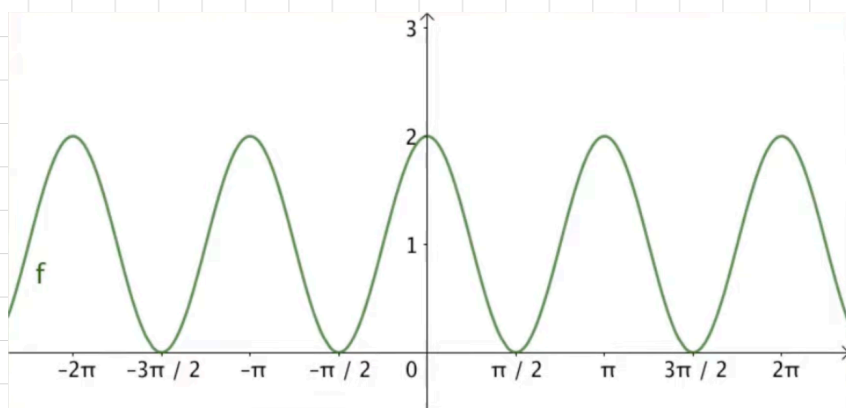
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

Exercices

1. Cocher la bonne case.

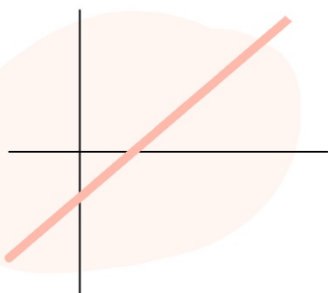
- a. $f(x) = \sin^2(-x)$ est paire. ☐ Vrai ☐ Faux
- b. $f(x) = \cos(3x)$ est périodique de période 3π . ☐ Vrai ☐ Faux
- c. $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ est périodique de période π . ☐ Vrai ☐ Faux
- d. $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ est impaire. ☐ Vrai ☐ Faux

2. Déterminer graphiquement la parité et la périodicité des fonctions f, g et h représentées ci-dessous.



Fonctions de référence

affine



$f(x) = ax + b$ définie sur $\mathbb{R}$

Si $a > 0$ alors la fonction est croissante.

Si $a < 0$ alors la fonction est décroissante.

$a > 0$

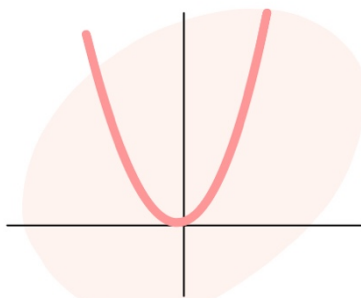
x	$-\frac{b}{a}$
$f(x)$	$- \quad 0 \quad +$

$a < 0$

x	$-\frac{b}{a}$
$f(x)$	$+ \quad 0 \quad -$

$$f'(x) = a$$

carré



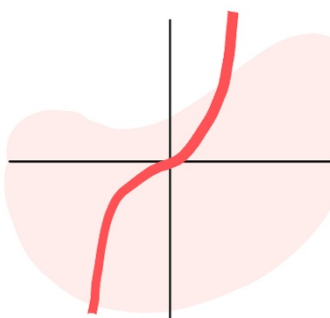
$f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$

- la fonction est paire
- elle a un minimum en 0

x	0
$f(x)$	$\swarrow \quad \searrow$ 0

$$f'(x) = 2x$$

cube



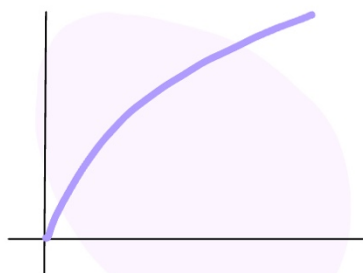
$f(x) = x^3$ définie sur $\mathbb{R}$

- la fonction est impaire
- elle est croissante sur $\mathbb{R}$

x	0
$f(x)$	$\nearrow$

$$f'(x) = 3x^2$$

racine carrée



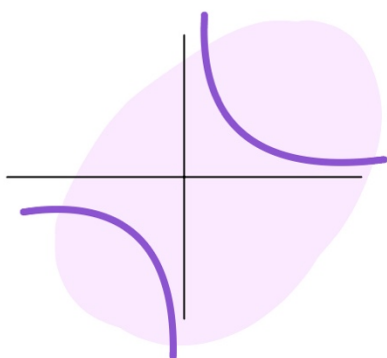
$f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $[0; +\infty[$

- la fonction est croissante sur $[0; +\infty[$
- elle est positive sur $[0; +\infty[$

x	0
$f(x)$	

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

inverse



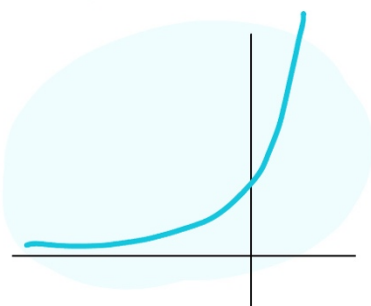
$f(x) = \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

- la fonction est impaire
- elle est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$

x	0
$f(x)$	

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

exponentielle



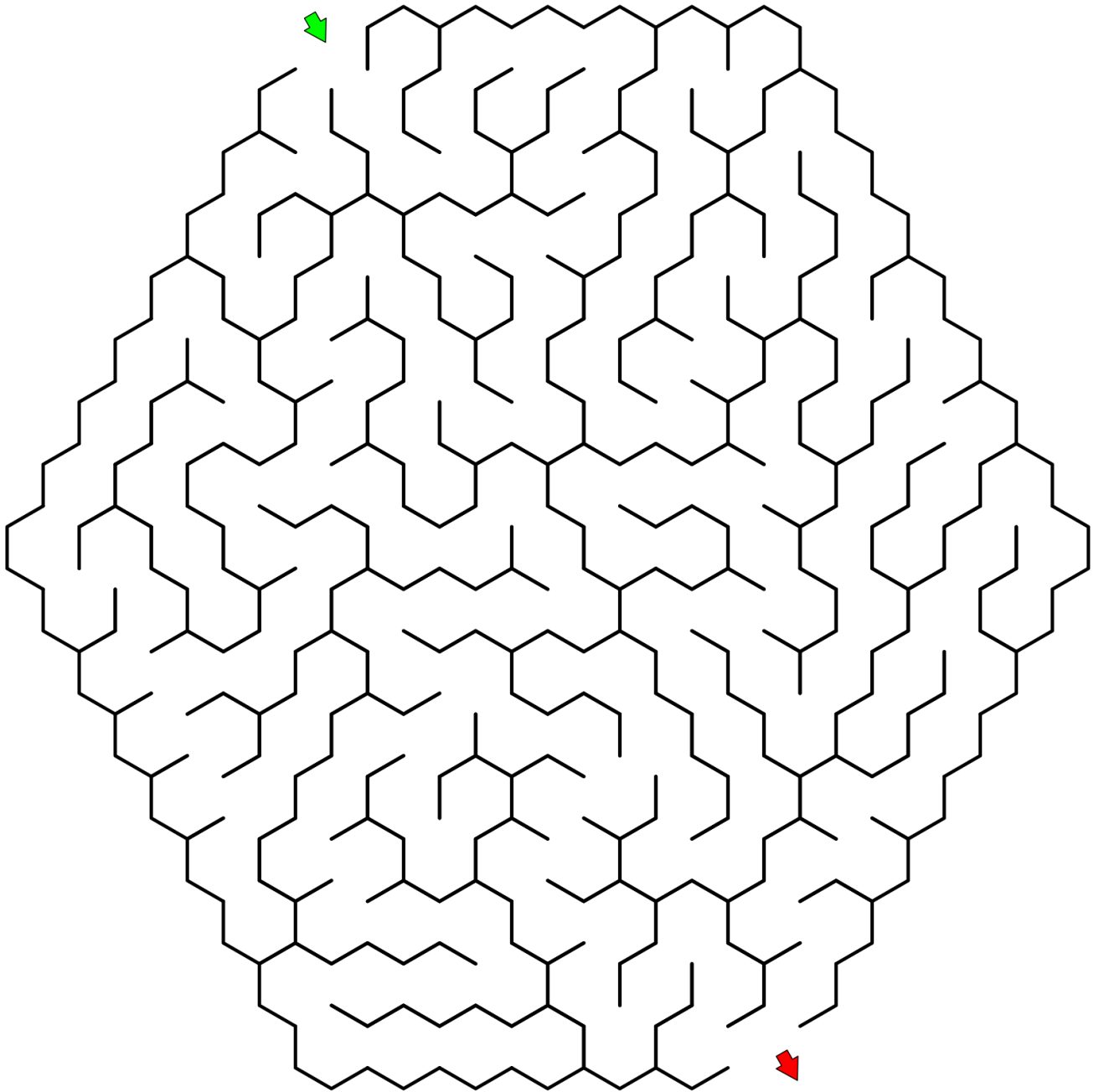
$f(x) = e^x$ définie sur $\mathbb{R}$

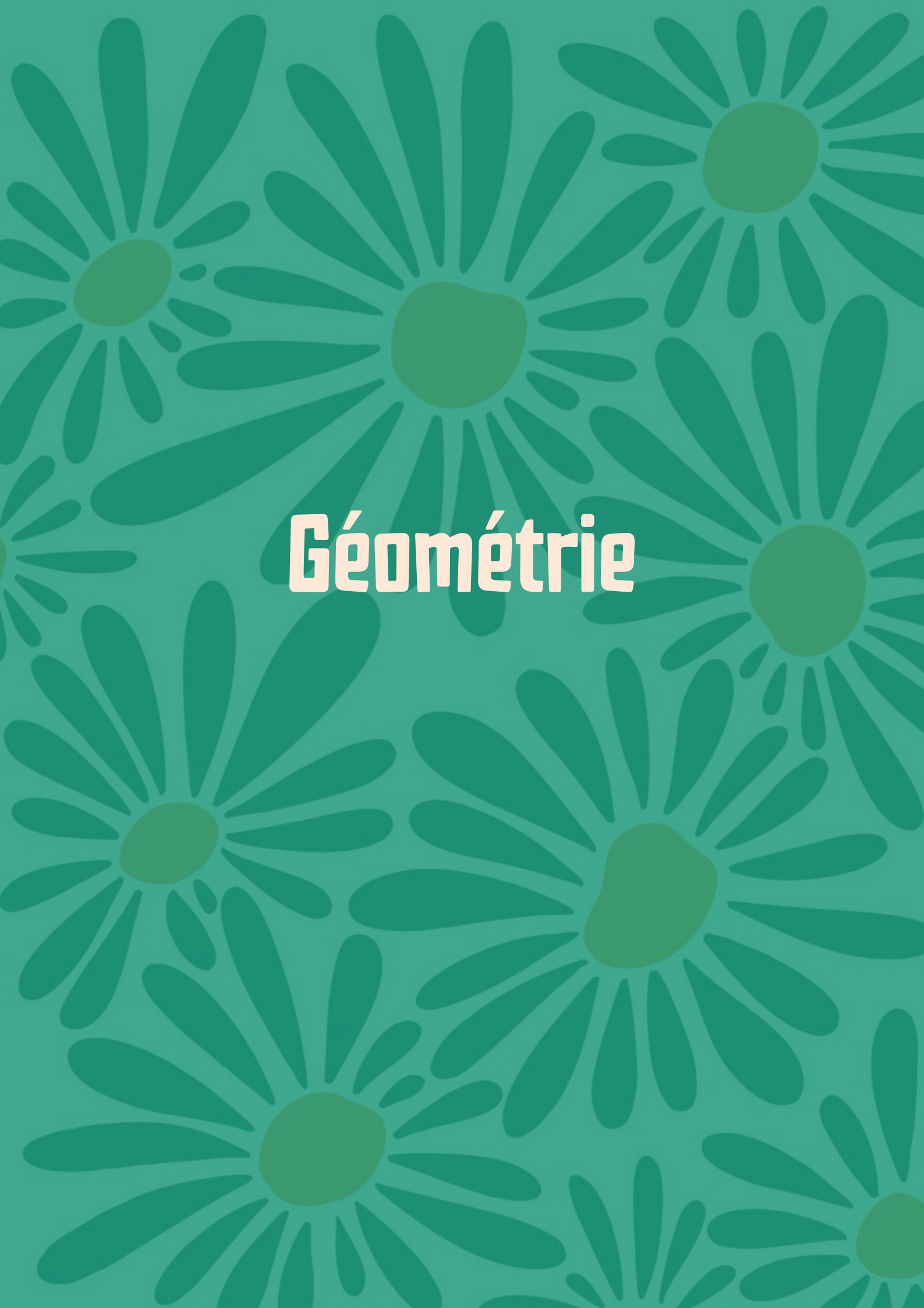
- la fonction est croissante sur $\mathbb{R}$
- elle est strictement positive

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		1	

$$f'(x) = e^x$$

Jeu





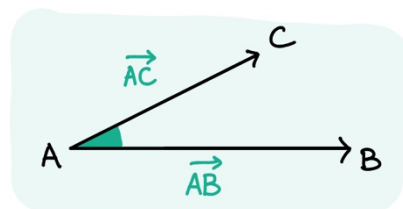
Géométrie

Produit scalaire

C'EST QUOI, LE PRODUIT SCALAIRE ?

Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs. On appelle **produit scalaire** de $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{AC}$, noté $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, le nombre réel défini par :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$



- $\vec{u} \cdot \vec{v}$ se lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ »
- si l'un des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

ATTENTION

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ← un nombre réel !
Ne pas confondre avec $\vec{u} = \vec{0}$
vecteur nul

DANS UN REPÈRE ORTHONORMÉ

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs. On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Exemple

On considère $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Alors leur produit scalaire vaut :
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 1 + (-2) \times 4 = 3 - 8 = -5$.

NORME

Soit deux points A et B. La **norme du vecteur** $\overrightarrow{AB}$, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, est la distance AB.

Propriété : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$

PROPRIÉTÉS

Symétrie

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

Bilinéarité

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \vec{u} \cdot \vec{v}$$

↳ nombre réel

Identités remarquables

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

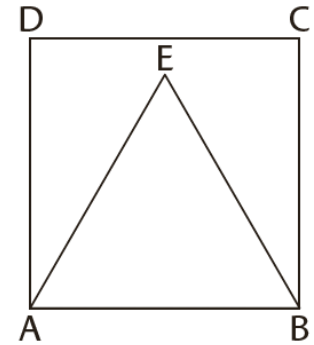
$$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

Exercices

1. Cocher la (ou les) réponse(s) exacte(s).

ABCD est un carré de côté a et ABE est un triangle équilatéral intérieur au carré.

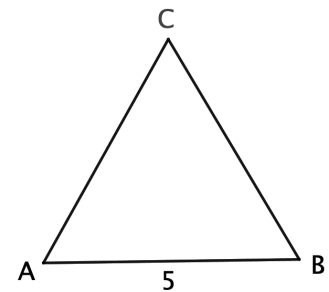
- a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} =$ ☐ a^2 ☐ $\frac{1}{2}a^2$ ☐ $-\frac{1}{2}a^2$ ☐ $a^2\sqrt{3}$
- b. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA} =$ ☐ $-a^2$ ☐ 0 ☐ $2a$ ☐ a^2
- c. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BE} =$ ☐ $\frac{1}{2}a^2$ ☐ a^2 ☐ $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ ☐ $\frac{3}{4}a^2$
- d. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AE} =$ ☐ a^2 ☐ $\frac{1}{2}a^2$ ☐ $-a^2$ ☐ $-\frac{1}{2}a^2$



2. Calculer les produits scalaires suivants.

- a. On donne : $AB = 2$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- b. Soit un triangle équilatéral ABC de côté 5. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



- c. Dans le triangle précédent, soit I le milieu de $[AB]$. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Calculer le produit scalaire



CALCUL AVEC LA NORME

Propriété

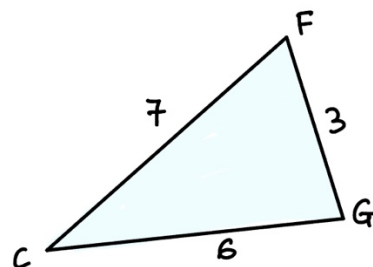
Soit A, B et C trois points. On a les égalités suivantes :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2) \quad \text{ou} \quad BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC}$$

Exemple

On considère la figure ci-contre, calculer le produit scalaire $\vec{CG} \cdot \vec{CF}$.

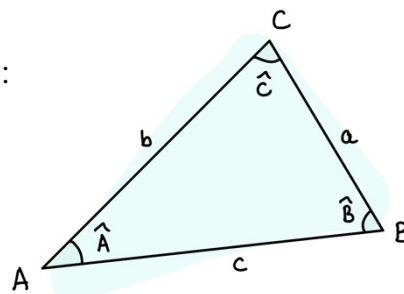
$$\begin{aligned} \vec{CG} \cdot \vec{CF} &= \frac{1}{2} (CG^2 + CF^2 - GF^2) \\ &= \frac{1}{2} (6^2 + 7^2 - 3^2) \\ &= \frac{1}{2} (36 + 49 - 9) \\ &= \frac{1}{2} \times 76 = 38 \quad \checkmark \end{aligned}$$



THÉORÈME D'AL KASHI

Dans un triangle ABC, on a, avec les notations de la figure :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$$



Exemple

On considère la figure ci-contre. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.

D'après le théorème d'Al Kashi, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$5^2 = 7^2 + 6^2 - 2 \times 7 \times 6 \times \cos(\widehat{BAC})$$

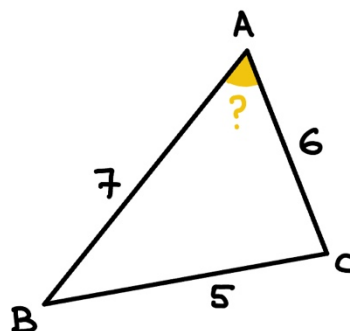
$$25 = 49 + 36 - 84 \cos(\widehat{BAC})$$

$$84 \cos(\widehat{BAC}) = 49 + 36 - 25$$

$$84 \cos(\widehat{BAC}) = 60$$

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{60}{84} = \frac{5}{7}$$

$$\widehat{BAC} \approx 44^\circ$$



Exercices

1. Sans regarder la page précédente, entourer les formules correctes.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

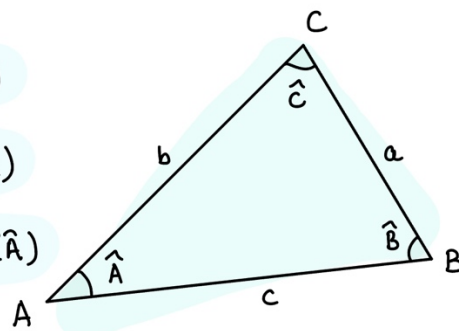
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cos(\hat{A})$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} (AB + AC + BC)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

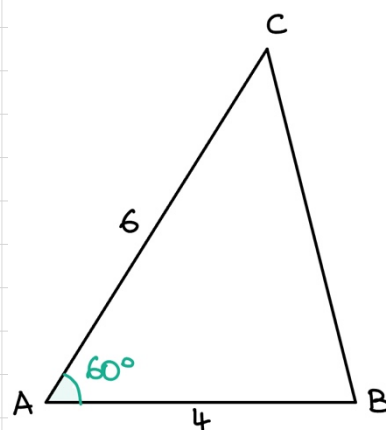
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos(\hat{A})$$



2. Calculer une longueur avec le théorème d'Al Kashi.

On considère la figure ci-contre. Calculer la longueur BC .

On donnera une valeur arrondie au dixième.



3. Trouver la mesure d'un angle avec le théorème d'Al Kashi.

Dans le triangle ABC , $AB = 8$, $AC = 5$ et $BC = 7$. Trouver la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

Orthogonalité



PROPRIÉTÉS

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

- Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = 0$.
- Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = 0$, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux**.
- Le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tous les autres vecteurs.

Exemple

Les vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ?

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 7 \times (-2) + 3 \times 5 = -14 + 15 = 1$$

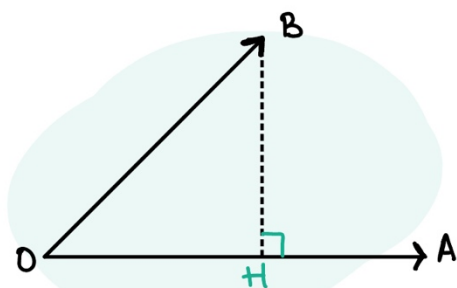
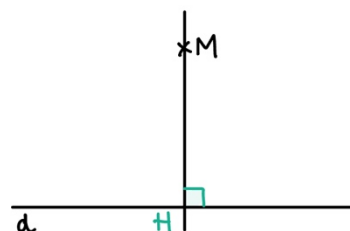
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \neq 0$ donc ces vecteurs ne sont pas orthogonaux.



PROJETÉ ORTHOGONAL

Soit une droite d et un point M .

Le **projeté orthogonal** du point M sur la droite d est le point d'intersection H de la droite d avec la perpendiculaire à d passant par M .



Soit $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ deux vecteurs non nuls.

H est le **projeté orthogonal** du point B sur la droite (OA) .

On a :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$$

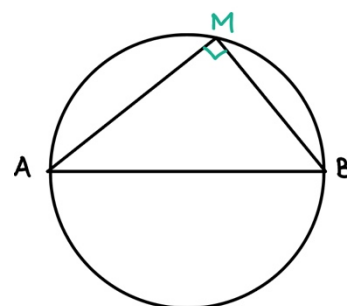


TRANSFORMATION DE $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

L'ensemble des points M vérifiant l'égalité $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le **cercle de diamètre $[AB]$** .

Pourquoi ?

Comme $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont **orthogonaux**. L'ensemble des points M tel que le triangle ABM soit rectangle en M est donc le **cercle de diamètre $[AB]$** .



Exercices

1. Cocher Vrai ou Faux.

- a. $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux. ☐ Vrai ☐ Faux
- b. $\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux. ☐ Vrai ☐ Faux
- c. $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux. ☐ Vrai ☐ Faux
- d. $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux. ☐ Vrai ☐ Faux

2. Vrai ou faux ?

Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$ on a $A(2; -1)$, $B(4; 2)$, $C(4; 0)$ et $D(1; 2)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$. Que peut-on en déduire ?
2. Démontrer que les droites (DB) et (BC) sont perpendiculaires.
3. Calculer $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}$. En déduire une valeur approchée de l'angle $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$.

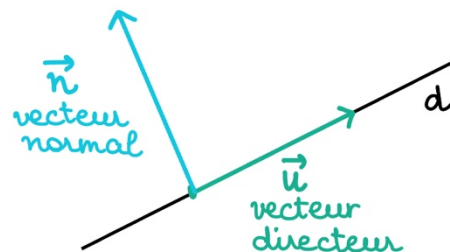
Équation de droite

VECTEUR NORMAL À UNE DROITE

On appelle **vecteur normal** à la droite d , un vecteur non nul **orthogonal** à un vecteur directeur de d .

$\vec{u}$ est un vecteur **directeur** de d

$\vec{n}$ est un vecteur **normal** de d



ÉQUATION CARTÉSIENNE

Une droite de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$

c est un nombre à déterminer avec un point appartenant à la droite

Réciproquement, la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour **vecteur normal** et le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ pour **vecteur directeur**.

Exemple

Soit la droite d'équation cartésienne $3x + 4y - 8 = 0$. Je reconnais $a = 3$, $b = 4$ et $c = -8$.

- Un vecteur **normal** de la droite est $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
- Un vecteur **directeur** de la droite est $\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On vérifie que $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux : $\vec{u} \cdot \vec{n} = (-4) \times 3 + 3 \times 4 = 0$. ✓

MÉTHODE : DÉTERMINER UNE ÉQUATION DE DROITE

On considère la droite d passant par le point $B(2 ; -3)$ et dont un vecteur normal est le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Réponse

Comme $\vec{n} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de d , une équation de d est $-2x + 5y + c = 0$.

Le point $B(2 ; -3)$ appartient à d , donc $-2 \times 2 + 5 \times (-3) + c = 0$ d'où $c = 19$. Ainsi, une équation cartésienne de d est : $-2x + 5y + 19 = 0$.

Exercices

1. Cocher la réponses) exacte.

On considère la droite d'équation cartésienne $4x - 5y + 7 = 0$.

- a. Un vecteur normal est : ☐ $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ ☐ $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ ☐ $\vec{n} \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$ ☐ $\vec{n} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$
- b. Un vecteur directeur est : ☐ $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ ☐ $\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ ☐ $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ ☐ $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$
- c. Cette droite passe par le point : ☐ $(2 ; 3)$ ☐ $(-1 ; -3)$ ☐ $(1 ; -1)$ ☐ $(-3 ; -1)$
- d. Cette droite a pour coefficient directeur : ☐ $\frac{5}{4}$ ☐ $-\frac{4}{5}$ ☐ $-\frac{5}{4}$ ☐ $\frac{4}{5}$

2. Associer chaque droite au vecteur normal correspondant.

$-4x + 7y - 3 = 0$	•	•	$\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$
$4x + 7y + 1 = 0$	•	•	$\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$
$-7x - 4y + 6 = 0$	•	•	$\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$
$7x - 4y - 2 = 0$	•	•	$\begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}$
$4x - 7y + 5 = 0$	•	•	$\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

3. Déterminer une équation cartésienne d'une droite.

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $C(3 ; -1)$ et $D(7 ; 5)$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (CD) .

Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Soit la droite d d'équation $x + 3y - 4 = 0$ et le point $A \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées du point H , **projeté orthogonal** de A sur la droite d .

ÉTAPE 1 – ÉQUATION DE LA DROITE (AH)

On commence par déterminer une **équation de la droite** (AH).

Comme d et (AH) sont perpendiculaires, un vecteur directeur de d est un vecteur **normal** de (AH).

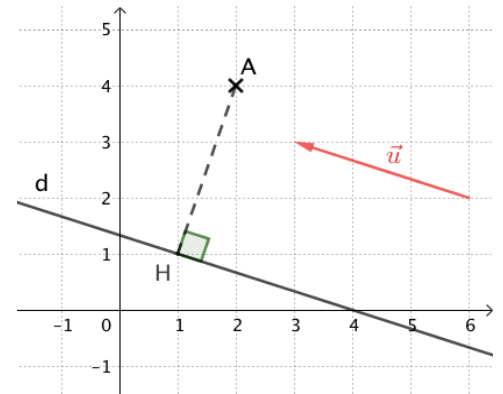
Une équation cartésienne de d est $x + 3y - 4 = 0$,

donc le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d .

Et donc $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ **est un vecteur normal de (AH)**. Une équation de (AH) est de la forme : $-3x + y + c = 0$.

Or, le point $A \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ appartient à (AH), donc ses coordonnées vérifient l'équation de la droite.

On a : $-3 \times 2 + 4 + c = 0$ soit $c = 2$. Une équation de (AH) est donc : $-3x + y + 2 = 0$.



ÉTAPE 2 – COORDONNÉES DU POINT D'INTERSECTION

H est le **point d'intersection** de d et (AH), donc ses coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifient les équations des deux droites. Résolvons alors le système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 3y - 4 = 0 \\ -3x + y + 2 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + 4 \\ -3(-3y + 4) + y + 2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + 4 \\ 9y - 12 + y + 2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + 4 \\ 10y - 10 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + 4 \\ y = \frac{10}{10} = 1 \end{cases} \quad d'où \quad \begin{cases} x = -3 \times 1 + 4 = 1 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Le point H , projeté orthogonal de A sur la droite d , a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. ✓

Exercice

Soit la droite d d'équation $2x - y + 1 = 0$ et le point $A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées du point H , **projeté orthogonal** de A sur la droite d .

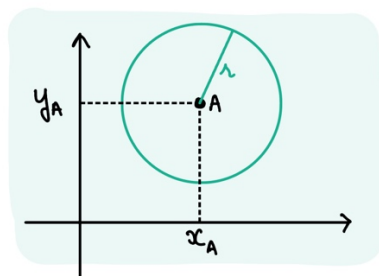
 **Étape 1 – Équation de la droite (AH)**

 **Étape 2 – Coordonnées du point d'intersection**

Équation de cercle

Une **équation du cercle** de centre $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et de rayon r est :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$$



Exemple :

Le cercle de centre $A \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et de rayon 5 a pour équation :

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

Cas particulier : Cercle centré en l'origine

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \rightarrow \quad A(0;0)$$

⚠ Attention

Les équations suivantes ne sont pas des équations de cercle

✗ le membre de droite est négatif	✗ il n'y a pas de terme en y^2	✗ le signe devant le terme en y^2 est négatif
$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = -3$	$(x - 2)^2 + 5y = 10$	$(x - 2)^2 - (y + 3)^2 = 25$



MÉTHODE : DÉTERMINER UNE ÉQUATION DE CERCLE

On considère le cercle de centre $C \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et passant par le point $D \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer une équation du cercle.

1. J'écris **l'équation du cercle** avec les coordonnées du centre.
2. Je détermine le carré du rayon à l'aide de la formule de la distance.
3. J'en déduis l'équation du cercle.

$$\begin{aligned} (x - (-2))^2 + (y - 3)^2 &= r^2 \\ (x + 2)^2 + (y - 3)^2 &= r^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r^2 &= CD^2 = (4 - (-2))^2 + (1 - 3)^2 \\ r^2 &= (4 + 2)^2 + (-2)^2 = 6^2 + (-2)^2 \\ &= 36 + 4 = 40 \end{aligned}$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 40$$

Exercices

1. Relier les équations de cercle au centre de cercle correspondant.

$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 16$	●	●	$(4; -1)$
$(x+2)^2 + (y-5)^2 = 9$	●	●	$(2; 3)$
$(x-(-3))^2 + (y-2)^2 = 25$	●	●	$(-2; 5)$
$(x+1)^2 + (y+(-4))^2 = 49$	●	●	$(-3; 2)$
$(x-2)^2 + (y-(-3))^2 = 36$	●	●	$(-1; -4)$

2. Cocher la réponse exacte.

On considère le cercle d'équation $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 5^2$.

- a. Son centre est le point : ☐ $(-2; 4)$ ☐ $(2; -4)$ ☐ $(-2; -4)$ ☐ $(2; 4)$
- b. Son rayon est : ☐ 10 ☐ 5 ☐ 25 ☐ $\sqrt{5}$
- c. Ce cercle passe par le point : ☐ $(3; 4)$ ☐ $(-2; 9)$ ☐ $(0; 4)$ ☐ $(-2; -1)$

3. Équation de cercle ? 🌶️

On considère l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient l'équation :

$$x^2 - 6x + y^2 + 2y - 8 = 0.$$

- Justifier que cet ensemble est un cercle.
- Préciser les coordonnées de son centre et son rayon.

Paraboles



ÉQUATION DE LA PARABOLE

On appelle **parabole** toute courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$. La parabole est la courbe représentative d'une **fonction polynomiale du second degré**.

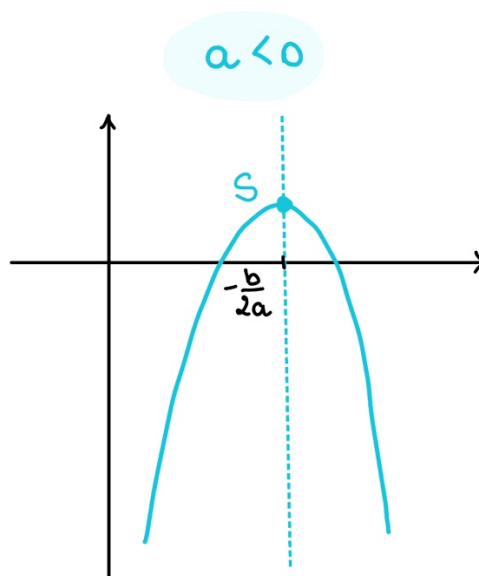
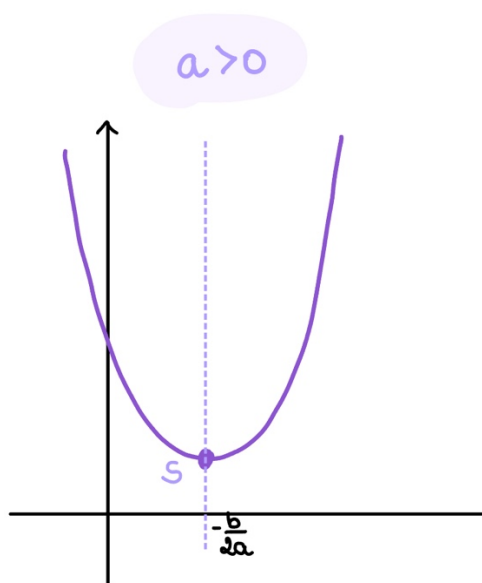


PROPRIÉTÉS

Soit $\mathcal{P}$ une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$. On peut écrire son équation sous forme **canonique** :

$$y = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

- Le **sommet** de la parabole a pour coordonnées $S(\alpha; \beta) = S\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.
- La parabole possède un **axe de symétrie** d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.
- Si $a > 0$, les branches sont tournées "vers le haut", si $a < 0$, les branches sont tournées "vers le bas".



Exercices

1. Associer chaque équation de parabole à son sommet et son orientation.

Orientation

vers le haut

vers le bas

• $y = 2(x-3)^2 + 1$ •

• $y = -(x+1)^2 + 4$ •

• $y = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 2$ •

• $y = -3(x+2)^2 - 1$ •

• $y = (x-5)^2 + 3$ •

Sommet

• $(4; -2)$

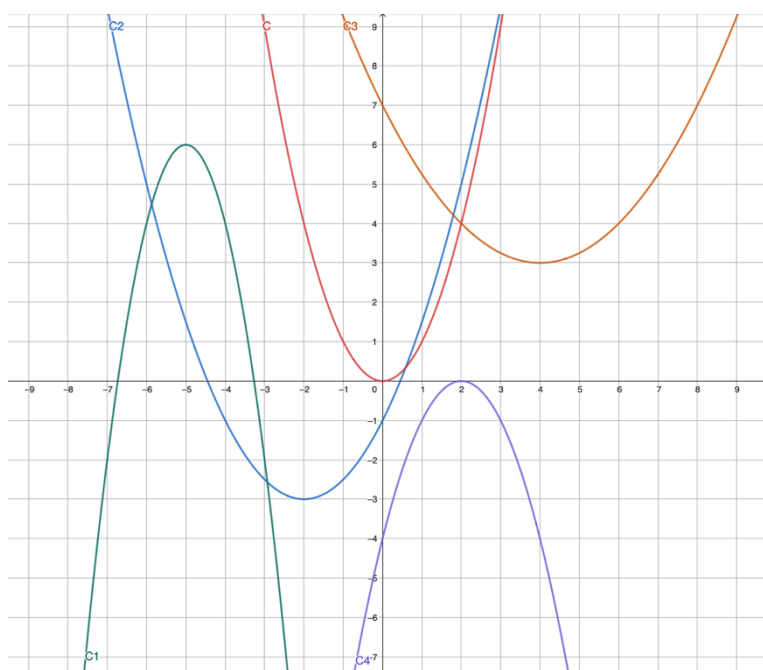
• $(-1; 4)$

• $(3; 1)$

• $(5; 3)$

• $(-2; -1)$

2. Choisir la réponse exacte.



a. La courbe C_1 a pour équation :

- ☐ $y = 2(x-5)^2 + 6$
- ☐ $y = 2(x+5)^2 + 6$
- ☐ $y = -2(x-5)^2 + 6$
- ☐ $y = -2(x+5)^2 + 6$

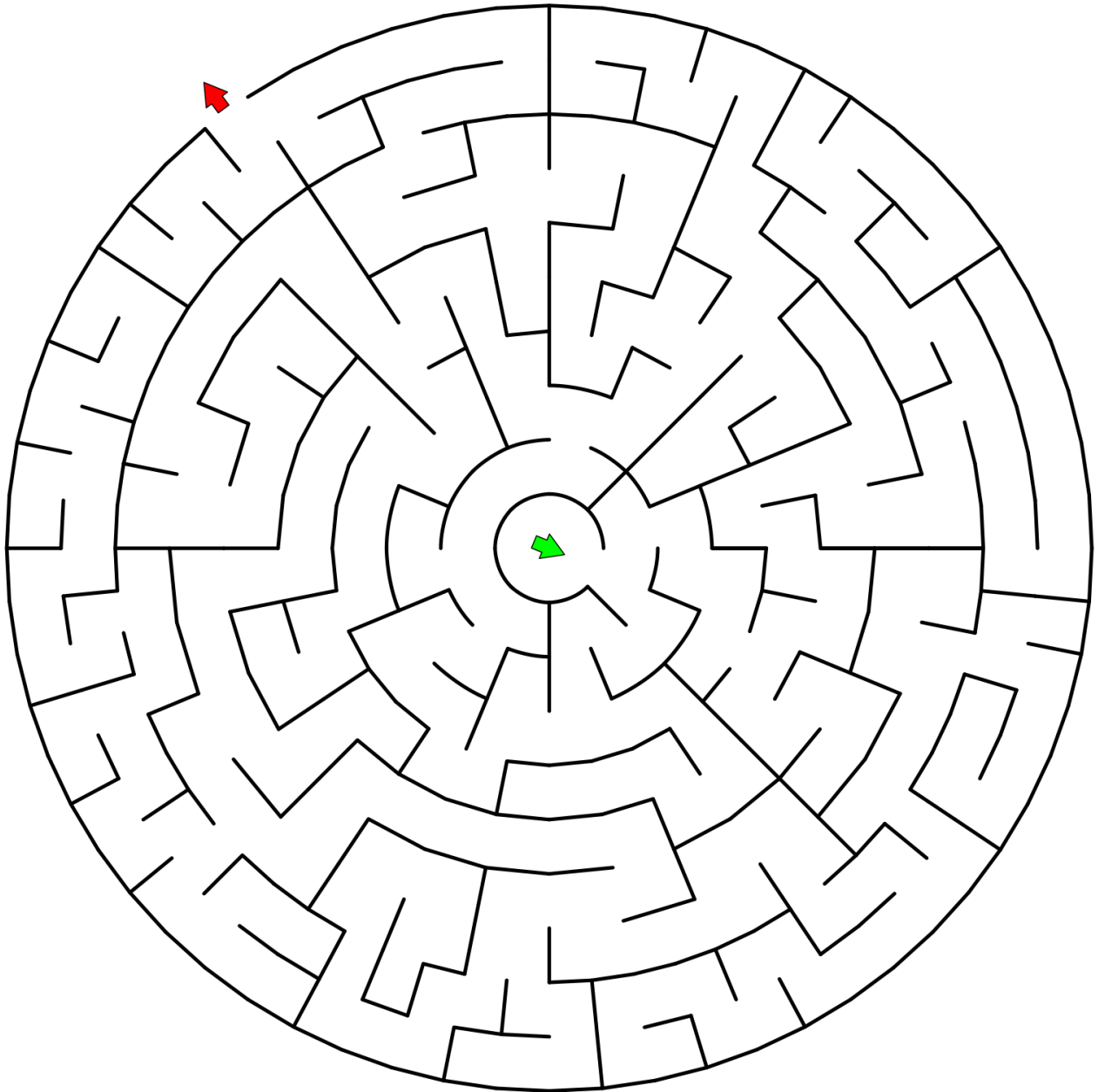
b. La courbe C_2 a pour équation :

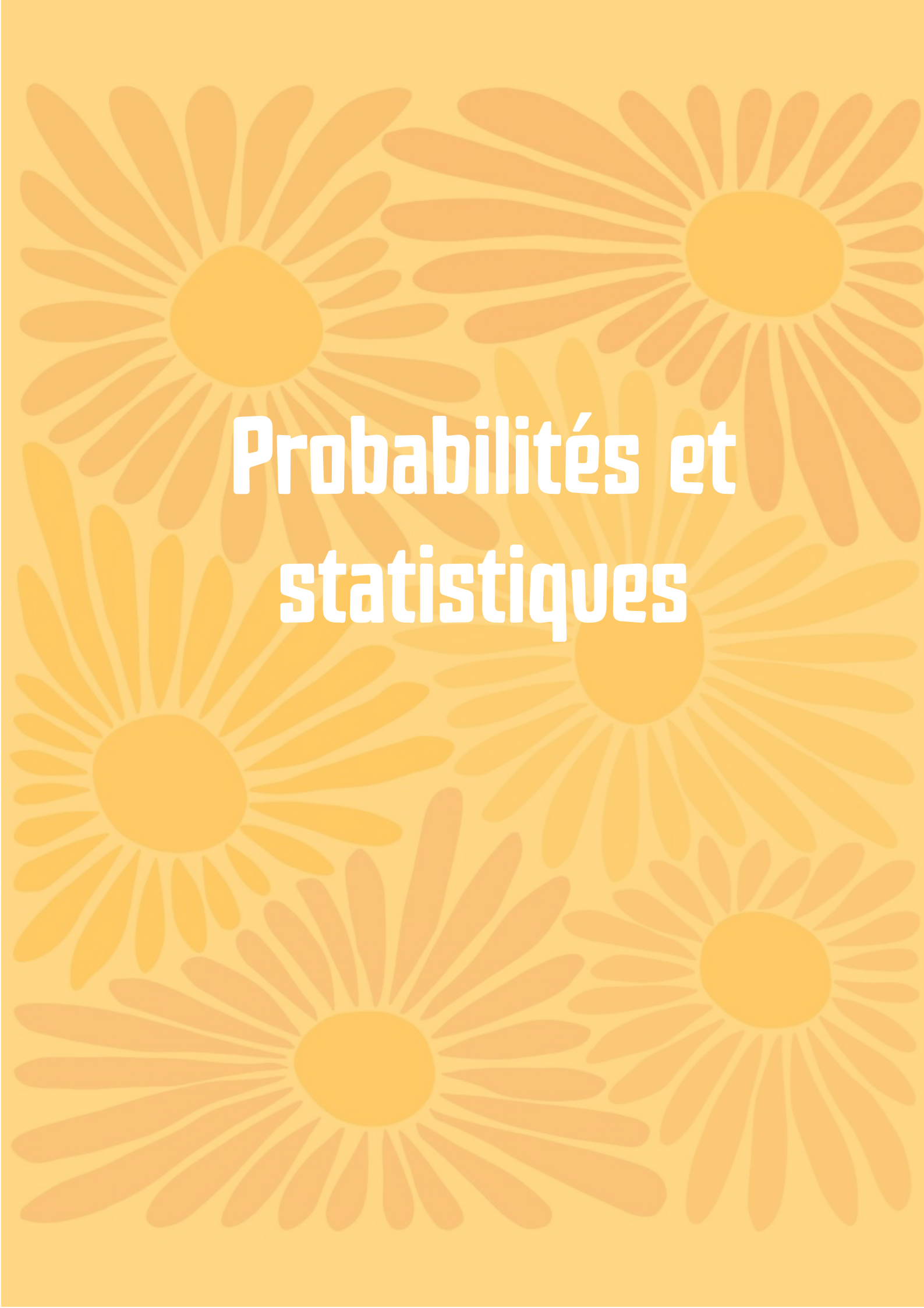
- ☐ $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$
- ☐ $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 3$
- ☐ $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 - 3$
- ☐ $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 3$

c. La courbe C_4 admet pour axe de symétrie

- ☐ l'axe d'équation $y = 2$
- ☐ l'axe d'équation $x = 2$
- ☐ l'axe des abscisses
- ☐ l'axe des ordonnées

Jeu





Probabilités et statistiques

Probabilités conditionnelles

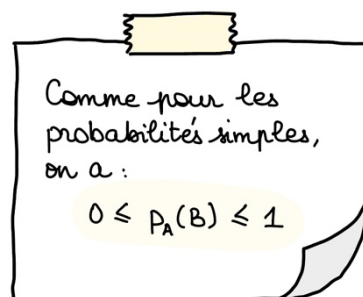


DÉFINITION

On appelle **probabilité conditionnelle de B sachant A**, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé. On la note : $P_A(B)$.

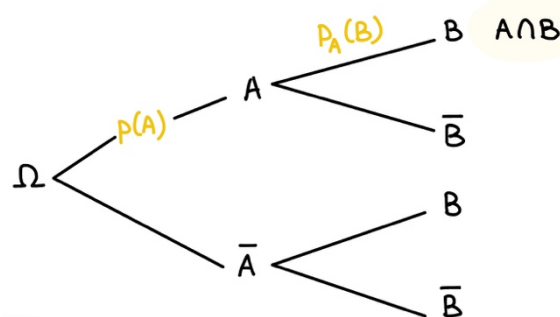
Propriété

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{ou encore} \quad P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

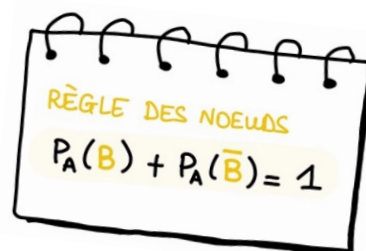


DANS UN ARBRE PONDÉRÉ

Ainsi, en pondérant la branche reliant A à B par la probabilité de B sachant A, on trouve la probabilité de $A \cap B$ en **multipliant les probabilité le long des branches**.



Règle des noeuds : La somme des probabilités rencontrées sur les branches partant d'un même événement est égale à 1.



CALCULER UNE PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Soit A l'événement : « Le résultat est un pique » et B l'événement : « Le résultat est un roi ». Calculer $P_A(B)$, la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique.

Réponse :

$$P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{32} \quad (\text{tirer un roi de pique}).$$

Donc la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique est :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{32} : \frac{1}{4} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \quad \checkmark$$

Exercices

1. Choisir la bonne réponse.

On interroge 40 élèves sur la langue vivante qu'ils étudient. On obtient le tableau suivant. On choisit un élève au hasard parmi ces 40 élèves.

	Anglais (E)	Allemand (D)	Total
Garçons (G)	10	14	24
Filles (F)	6	10	16
Total	16	24	40

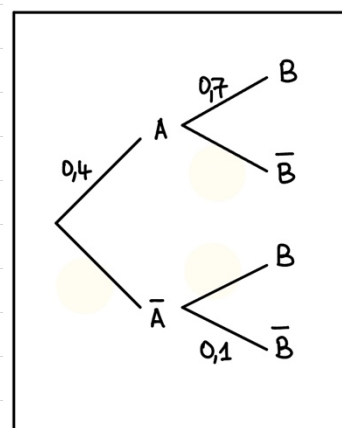
- a. $p(E \cap G) =$ ☐ $\frac{10}{16}$ ☐ $\frac{10}{24}$ ☐ $\frac{10}{40}$ ☐ $\frac{16}{40}$
- b. $p(D \cap F) =$ ☐ $\frac{6}{16}$ ☐ $\frac{10}{16}$ ☐ $\frac{10}{24}$ ☐ $\frac{10}{40}$
- c. $p_E(F)$ ☐ $\frac{6}{40}$ ☐ $\frac{16}{40}$ ☐ $\frac{6}{16}$ ☐ $\frac{24}{40}$
- d. $p_F(D)$ ☐ $\frac{10}{16}$ ☐ $\frac{24}{40}$ ☐ $\frac{10}{40}$ ☐ $\frac{16}{40}$

2. On considère l'arbre pondéré. Répondre aux questions.

a. Donner les probabilités qu'on peut y lire.

b. Compléter l'arbre.

c. Calculer les probabilités $p(A \cap B)$ et $p(\bar{A} \cap \bar{B})$.



3. Calculer les probabilités suivantes.

Noah boit un smoothie **trois fois sur cinq**, sinon il boit un soda. Quand il boit un smoothie, il utilise une paille **50 %** du temps. Quand il boit un soda, il utilise une paille **20 %** du temps. On note : **S** : « Il boit un smoothie » et **P** : « Il utilise une paille ».

1. Donner les probabilités correspondant à l'énoncé.

$$P(S) = \quad P(\bar{S}) = \quad P_S(P) = \quad P_S(\bar{P}) =$$

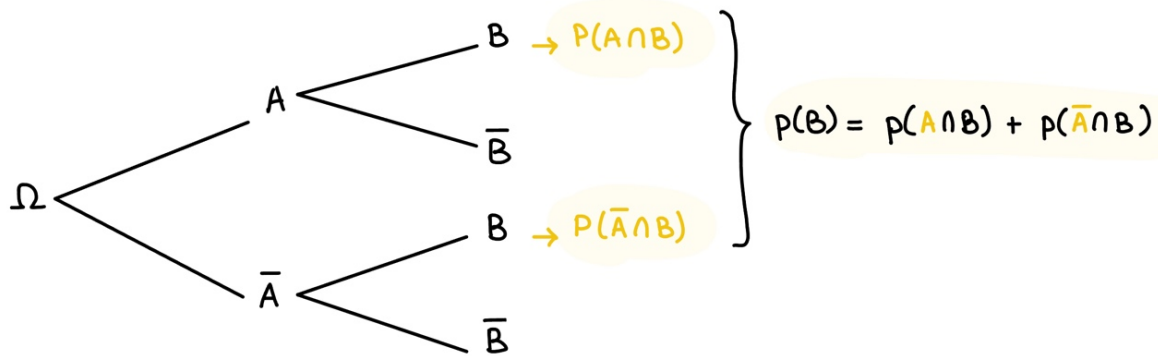
$$2. P(S \cap P) =$$

$$3. P_{\bar{S}}(P) =$$

Probabilités totales

La **probabilité de B** s'obtient en **ajoutant** les probabilités des branches qui aboutissent à B. Autrement dit :

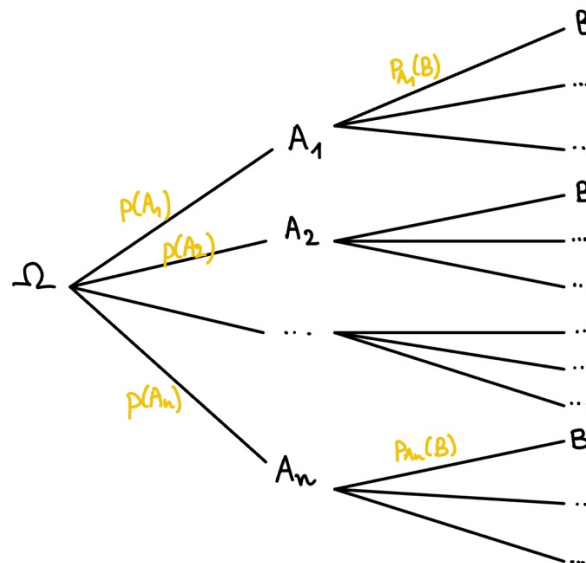
$$\begin{aligned} p(B) &= p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) \\ &= p(A) \times p_A(B) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B) \end{aligned}$$



FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ une partition de l'univers et B un événement, alors la **probabilité de B** est donnée par :

$$\begin{aligned} p(B) &= p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \dots + p(B \cap A_n) \\ &= p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + \dots + p(A_n) \times p_{A_n}(B) \end{aligned}$$



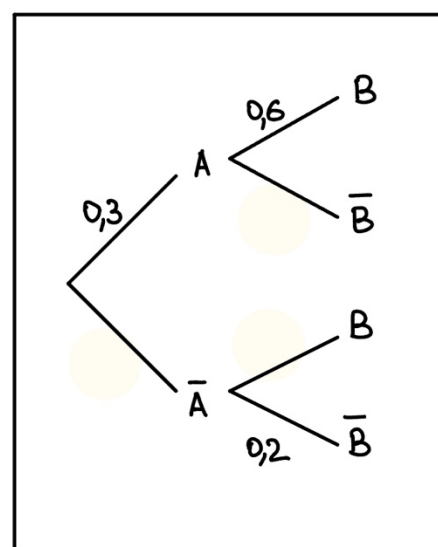
Exercices

1. Vrai ou faux ?

- | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| a. $p(A \cap B) = p(A) + p(B)$ | ☐ Vrai | ☐ Faux |
| b. $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ | ☐ Vrai | ☐ Faux |
| c. $p(B) = p_A(B) + p_{\bar{A}}(B)$ | ☐ Vrai | ☐ Faux |
| d. $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ | ☐ Vrai | ☐ Faux |

2. Compléter l'arbre pondéré.

- a. Compléter l'arbre pondéré.



- b. Calculer la probabilité $P(B)$.
- c. En déduire la probabilité de A sachant B.

Épreuves indépendantes

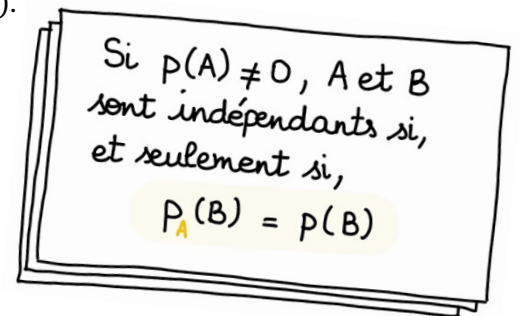


DÉFINITION

Deux épreuves sont dites **indépendantes** si le résultat de l'une n'a pas d'influence sur le résultat de l'autre, c'est-à-dire qu'alors : $P_A(B) = P(B)$.

Deux événements A et B sont **indépendants** lorsque :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$



SUCCESION D'ÉPREUVES

Lors de n expériences successives indépendantes :

$$p(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = p(E_1) \times p(E_2) \times \dots \times p(E_n)$$

Dans le cas d'une succession d'épreuves indépendantes, l'arbre pondéré est pondéré par des probabilités **non conditionnelles**.



MÉTHODE : DÉTERMINER SI DEUX ÉVÉNEMENTS SONT INDÉPENDANTS

1. On détermine $P(A)$, $P(B)$, et $P(A \cap B)$.
2. On calcule $P(A) \times P(B)$.
3. On compare $P(A) \times P(B)$ et $P(A \cap B)$: s'ils sont égaux les événements A et B sont indépendants. Sinon, il ne le sont pas.

Exercices

1. Dans chacun des cas suivants, les épreuves sont-elles indépendantes ?

- | | | |
|-----------------------|------------------------------|------------------------------|
| a. Tirage sans remise | ☐ Oui | ☐ Non |
| b. Tirage avec remise | ☐ Oui | ☐ Non |
| c. Tirage simultané | ☐ Oui | ☐ Non |

2. Effectuer les conversions suivantes entre capacité et volume.

On considère deux événements A et B tels que :

$$p(A) = \frac{1}{5}, p(B) = \frac{3}{10} \text{ et } p(A \cap B) = \frac{1}{20}.$$

- a. Calculer les probabilités $p_A(B)$ et $p_B(A)$.

$$p_A(B) =$$

$$p_B(A) =$$

- b. En déduire si les événements A et B sont indépendants ou non.

3. Naissances indépendantes

Dans une maternité, on observe n naissances, n entier strictement positif.

On admet que dans cette maternité la probabilité qu'un nouveau-né soit une fille est de 0,49. Les naissances sont supposées indépendantes. On veut déterminer le nombre minimal de naissances nécessaires pour que la probabilité qu'il naisse au moins une fille dépasse 0,95.

Démontrer que la question revient à déterminer la plus petite valeur de l'entier $n > 0$ pour laquelle : $1 - 0,51^n > 0,95$.

Variables aléatoires



VARIABLE ALÉATOIRE

Une **variable aléatoire réelle** X est une fonction qui à chaque issue E_i de l'univers Ω associe un réel x_i .



LOI DE PROBABILITÉ

Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$. La **loi de probabilité** de X est donnée par toutes les probabilités $P(X = x_i)$.

les « x_i » sont toutes les valeurs prises par X



MÉTHODE : DÉTERMINER LA LOI DE PROBABILITÉ

Exemple

Soit l'expérience aléatoire : « On lance un dé à six faces et on regarde le résultat. »

L'ensemble de toutes les issues $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ s'appelle **l'univers des possibles**.

On considère le jeu suivant :

- Si le résultat est 5 ou 6, on gagne 2 €.
- Sinon, on perd 1 €.

1. On peut définir ainsi une **variable aléatoire** X sur $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ qui donne le gain et qui peut prendre les valeurs 2 ou -1.

Pour les issues 5 et 6, on a : $X = 2$ ✓

Pour les issues 1, 2, 3 et 4, on a : $X = -1$. ✓



2. Loi de probabilité

- Il y a **2 issues favorables** pour $X = 2$: $\{5, 6\}$. $P(X = 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- Il y a **4 issues favorables** pour $X = -1$: $\{1, 2, 3, 4\}$. $P(X = -1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Loi de probabilité de X

X	-1	2
$P(X=x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Exercices

1. Cocher la (ou les) réponse(s) exacte(s).

On lance un dé cubique équilibré. Si la face est **impair**, on gagne **3 euros**, et sinon (face paire) on **perd le triple de la valeur de la face**. On note **X** la variable aléatoire donnant le gain algébrique à ce jeu.

a. $p(X = -12)$ est égale à : ☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{1}{6}$

b. $p(X = 3)$ est égale à : ☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{1}{6}$

c. $p(X = -6)$ est égale à : ☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{1}{6}$

d. $p(X \geq 3)$ est égale à : ☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{1}{6}$

2. Déterminer la loi de probabilité.

Une urne contient dix boules indiscernables au toucher, l'une d'entre elles porte le numéro 10, deux portent le numéro 5, trois portent le numéro 2 et les autres portent le numéro 1.

L'expérience consiste à extraire au hasard une boule de l'urne et à noter son numéro X .

Déterminer la loi de probabilité de X .

Espérance, variance, écart-type

Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.

La loi de probabilité de X associe à toute valeur x_i la probabilité $p_i = P(X = x_i)$.



ESPÉRANCE

C'est la **moyenne théorique** des valeurs que peut prendre la variable aléatoire.

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = \sum_{i=1}^n x_i p(X=x_i)$$



VARIANCE

C'est une mesure qui indique à quel point les valeurs de la variable **s'écartent en moyenne de l'espérance**.

$$\begin{aligned} V(X) &= p_1 (x_1 - E(X))^2 + p_2 (x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n (x_n - E(X))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p(X=x_i) \end{aligned}$$



ÉCART-TYPE

C'est la racine carrée de la variance, donc une **mesure de la dispersion** exprimée dans la même unité que la variable.

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exercices

1. Cocher la réponse exacte.

On lance un dé cubique équilibré. Si la face est impair, on perd 4 euros. Si la face est paire, on gagne le triple de la valeur indiquée par la face. On note X la variable aléatoire correspondant au **gain algébrique de ce jeu**. On peut utiliser la formule $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

- a. $E(X)$ est égale à : ☐ 0 ☐ 4 ☐ $\frac{7}{2}$ ☐ 10
- b. $V(X)$ est égale à : ☐ 76 ☐ 12 ☐ 0 ☐ $\frac{195}{2}$
- c. $\sigma(X)$ est égale à : ☐ 0 ☐ $\sqrt{76}$ ☐ $\frac{\sqrt{195}}{2}$ ☐ 10

2. Répondre aux questions.

Une urne contient 60 billes numérotées de 1 à 60.

Si le numéro est compris entre 1 et 20, on gagne **4 euros**.

Si le numéro est compris entre 21 et 45, on gagne **2 euros**.

Si le numéro est supérieur ou égal à 46, on **perd 1 euro**.

On note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique à chaque tirage de bille.

1. Donner la loi de probabilité de X (compléter le tableau).

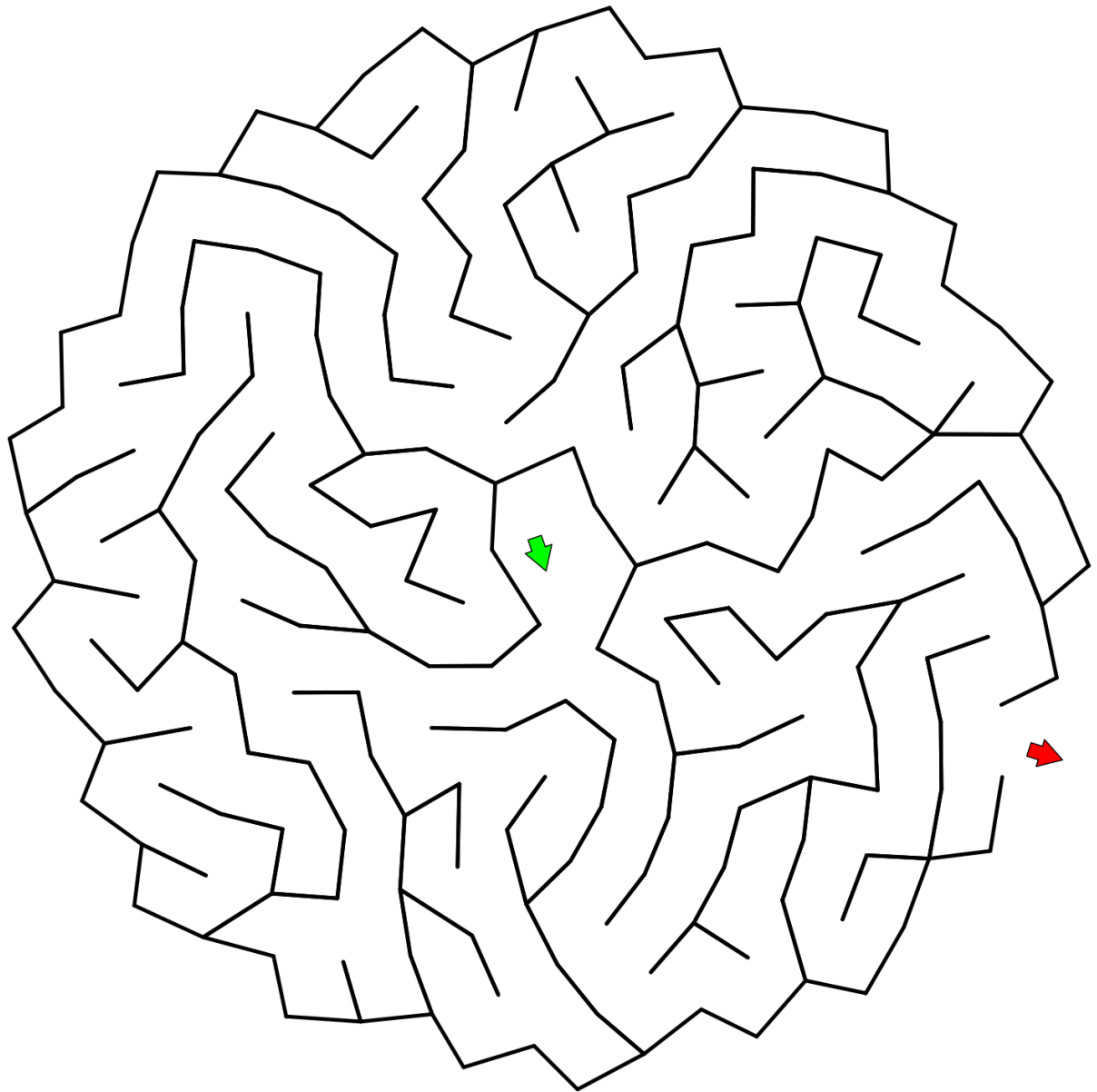
x_i	4	2	-1
$P(X = x_i)$			

2. Calculer l'espérance de X .

3. Calculer la variance et l'écart-type de X .

On peut utiliser la formule $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

Jeu



SOLUTIONS

Calculer les puissances

Exercice 1

Les intrus sont :

- $0,035 \times 10^{-2}$
- 4^3
- 6

Exercice 2

a) $5x^2 + x^2 - (2x)^2 = 6x^2 - 4x^2 = \boxed{2x^2}$

b) $(5x)^2 - 5x + 5y = \boxed{25x^2 - 5x + 5y}$

c) $(2xy)^2 - 5x + 5y = \boxed{4x^2y^2 - 5x + 5y}$

d) $x^4 + 3x^2 + \frac{x^2}{2} - 2x(3x^2 \cdot x) = x^4 + 3x^2 + \frac{x^2}{2} - 6x^4 = \boxed{-5x^4 + \frac{7}{2}x^2}$

e) $(x^3y)^2 - y^2(x^4) = x^6y^2 - x^4y^2 = \boxed{x^4y^2(x^2 - 1)}$

Exercice 3

a) $a^{-1}(ab)^2 = a^{-1} \cdot a^2b^2 = \boxed{ab^2}$

b) $(a^2 \cdot ab)^3 = (a^3b)^3 = \boxed{a^9b^3}$

c) $(a^{-3} \cdot ab)^3 = (a^{-2}b)^3 = \boxed{\frac{b^3}{a^6}}$

d) $\frac{a^3b^{-2}}{(ab^2)^{-1}} \times (\frac{b^{-1}}{a})^2 = a^4 \times$

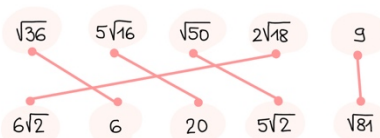
$a^{-2}b^{-2} = \boxed{\frac{a^2}{b^2}}$

e) $\frac{a}{b^2} \times \frac{b^3}{a^{-1}}$

$ab^{-2} \cdot b^3 \cdot a = \boxed{a^2b}$

Calculer les racines

Exercice 1



Exercice 2

$\frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{3a^2}} = \frac{2}{\sqrt{3a}}$

$\sqrt{81a^2} \times \sqrt{a} = 9a\sqrt{a}$

$\sqrt{\frac{25a}{a^3}} = \frac{5}{a}$

$\frac{\sqrt{144a^2}}{6a} \times \sqrt{a^4} = 2a^2$

Exercice 3

$\frac{\sqrt{105} \times \sqrt{51}}{3\sqrt{34}} = \frac{\sqrt{105 \times 51}}{3\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{595}}{3\sqrt{34}} = \sqrt{\frac{595}{34}} = \sqrt{\frac{35}{2}} = \frac{\sqrt{70}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{70}$

$\frac{3\sqrt{297} \times 2\sqrt{616}}{\sqrt{44} \sqrt{396}} = \frac{6\sqrt{27 \times 11 \times 8 \times 7 \times 11}}{\sqrt{4 \times 11 \times 36 \times 11}} = 6\sqrt{\frac{3^3 \times 2^3 \times 7 \times 11^2}{2^2 \times 2^2 \times 3^2 \times 11^2}} = 6\sqrt{\frac{3 \times 7}{2}} = 6\sqrt{\frac{21}{2}}$

On rend rationnel en multipliant et en divisant par $\sqrt{2}$.

On obtient $6 \times \frac{\sqrt{42}}{2} = \boxed{3\sqrt{42}}$

$\sqrt{\frac{98}{27}} \times \frac{3\sqrt{72}}{\sqrt{28}} = \frac{7\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \times \frac{18\sqrt{2}}{2\sqrt{7}} = \frac{63 \times 2}{3\sqrt{21}} = \frac{42}{\sqrt{21}} = \frac{42\sqrt{21}}{21} = \boxed{2\sqrt{21}}$

Calculer les fractions

Exercice 1

$\frac{\frac{x^2+1}{x}}{\frac{3x}{x+6}} = \frac{x+1}{3-x} \cdot \frac{x+6}{3-x} = \frac{(x+1)(x+6)}{(3-x)^2} = \frac{x^2+7x+6}{(3-x)^2}$

Exercice 2

$A = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{3}{10} = \frac{10}{30} + \frac{9}{30} = \frac{19}{30}$

$B = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{4} - \frac{5}{8} = \frac{10}{8} - \frac{5}{8} = \frac{5}{8}$

$C = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{3}}{\frac{4}{5} + \frac{3}{3}} = \frac{\frac{15}{12}}{\frac{12}{12} + \frac{12}{12}} = \frac{\frac{15}{12}}{\frac{24}{12}} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$

$D = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}}{\frac{5}{5} - \frac{4}{4}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{20}{20} - \frac{20}{20}} = \frac{\frac{3}{10}}{-\frac{17}{20}} = -\frac{3}{10} \times \frac{20}{17} = -\frac{6}{17}$

Exercice 3

$A(x) = \frac{x+3}{x} - \frac{x+1}{x+2} = \frac{(x+3)(x+2) - x(x+1)}{x(x+2)} = \frac{4x+6}{x(x+2)} = \frac{2(2x+3)}{x(x+2)}$

Valeurs interdites :

$x \neq 0, -2$

$B(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + \frac{x}{x} + 1 = 2$

Valeur interdite : $x \neq 0$

$C(x) = x - 2 - \frac{x-4}{x+2} = \frac{(x-2)(x+2) - (x-4)}{x+2} = \frac{x^2-x}{x+2} = \frac{x(x-1)}{x+2}$

Valeur interdite : $x \neq -2$

Équations et inéquations

Exercice 1

- $2x(5-2x) = 0$ a pour solution $\{0; \frac{5}{2}\}$
- $(3x-4)(x+5) = 0$ a pour solution $\{\frac{4}{3}; -5\}$
- $\frac{3x+6}{x-7} = 0$ existe si $x \neq 7$ a pour solution -2
- $\frac{x-4}{x^2-1} = 0$ existe si $x \neq -1$ et $x \neq 1$ a pour solution 4

Exercice 2

$x = 3$ et $x \neq -4$	$x = -8$ et $x \neq -\frac{5}{2}$
$x = \frac{1}{3}$ et $x \neq -2$	$x = -\frac{2}{5}$ et $x \neq 1$ et $x \neq -\frac{4}{3}$

Exercice 3

$S =]-\frac{4}{3}; 3[$

x	$-\frac{4}{3}$	3
$2x+1$	-	+
$x-3$	-	+
$(2x+1)(x-3)$	+	-

$S =]-\infty; -\frac{4}{3}] \cup [5; +\infty[$

x	$-\frac{4}{3}$	5
$2x+1$	-	+
$x-5$	-	-
$(2x+1)(x-5)$	+	-

C'est quoi, une suite ?

Exercice 1



Exercice 2

- $u_0 = 2; u_1 = 3; u_2 = 6$
- $u_{n+1} = (n+1)^2 + 2$
 $= n^2 + 2n + 3$
 $u_n + 1 = n^2 + 3$

Exercice 3

- Calcul des premiers termes :
 - $v_0 = 7$
 - $v_1 = v_0 + 3 = 7 + 3 = 10$
 - $v_2 = v_1 + 3 = 10 + 3 = 13$
- Calcul des premiers termes
 - $w_1 = -3$
 - $w_2 = w_1 \times (-2) = -3 \times (-2) = 6$
 - $w_3 = w_2 \times (-2) = 6 \times (-2) = -12$

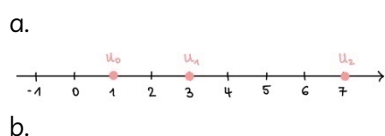
Représentation graphique

Exercice 1

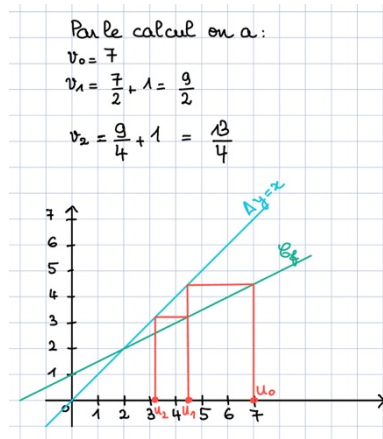
$$u_0 = 1; u_1 = 2$$

$$v_0 = -2; v_1 = 1; v_2 = 2$$

Exercice 2



Exercice 3



Suites arithmétiques

Exercice 1

- Oui
- Non car une suite arithmétique doit être monotone
- Non
- Oui
- Oui

Exercice 2

DÉCROISSANT

$u_{n+1} - u_n = -3$

$u_n = u_{n+1} + 3$

CROISSANT

$u_0 = 1$
 $u_1 = 3$
 $u_2 = 5$

(u_n) de raison
 10^{-2}

(u_n) de raison
 $2 - \sqrt{2}$

$u_0 = -100$ et
 $\lambda = 1$

Exercice 3

On note u_0 le premier terme et r la raison arithmétique de u_n :

$$u_n = u_0 + nr$$

Cas 1

$$\begin{cases} u_4 = 12 = u_0 + 4r \\ u_9 = -8 = u_0 + 9r \end{cases}$$

Par soustraction membre à membre :

$$-8 - 12 = 9r - 4r$$

$$\Leftrightarrow -20 = 5r$$

$$r = -4$$

D'où

$$u_4 = 12 = u_0 + 4 \times (-4)$$

$$= u_0 - 16$$

$$u_0 = 28$$

Le premier terme est donc $u_0 = 28$ et la raison est $r = -4$.

Cas 2

$$\begin{cases} u_{27} = 7 = u_0 + 27r \\ u_{10} = \frac{15}{7} = u_0 + 10r \end{cases}$$

Par soustraction membre à membre :

$$7 - \frac{15}{7} = 27r - 10r = 17r$$

$$\Leftrightarrow \frac{34}{7} \times \frac{1}{17} = r$$

$$r = \frac{2}{7}$$

D'où

$$u_{10} = \frac{15}{7} = u_0 + 10 \times \frac{2}{7} = u_0 + \frac{20}{7}$$

$$u_0 = -\frac{5}{7}$$

Le premier terme est donc $u_0 = -\frac{5}{7}$ et la raison est $r = \frac{2}{7}$.

Suites géométriques

Exercice 1

- Non
- Non
- Non
- Oui
- Oui

Exercice 2

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{6} \end{cases}$$

$$u_n = 3^{n-1}$$

$$u_n = 3^n \times 5^n$$

$$u_n = -3 \times 5^{-n}$$

$$u_n = 5^{2n+1}$$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}$$

$$u_n = 3$$

$$u_n = 3 \times 2^n + 2^{n+1}$$

Exercice 1

a. $u_2 = u_1 \times q = 5 \times (-3) = -15$

Pour $n \geq 1 : u_n = u_1 \times q^{n-1}$

Donc :

$$u_{15} = 5 \times (-3)^{15-1} = 5 \times (-3)^{14} = 23\,914\,845$$

b. $u_n = u_0 \times q^n$

donc $u_5 = -20 = u_0 \times q^5$ et

$$u_9 = -80 = u_0 \times q^9$$

$$= u_0 \times q^5 \times q^4$$

$$= -20q^4$$

$$-80 = -20q^4 \Leftrightarrow q^4 = \frac{-80}{-20} = 4$$

$$\Leftrightarrow q^2 = \sqrt{4} = 2$$

$$\Leftrightarrow q = \sqrt{2} \text{ ou } q = -\sqrt{2}$$

Variations d'une suite

Exercice 1

- Vrai
- Faux
- Vrai
- Faux, cela dépend du signe du premier terme
- Vrai

Exercice 2

a. $u_n = (n-1)^2 - n^2 = 1 - 2n$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = (-2) < 0.$$

La suite est **strictement décroissante**.

b. $u_n = -5(-2)^n = -5(-1)^n 2^n$.

Le rapport $u_{n+1}/u_n = -2 < 0$ (changement de signe, valeurs en module croissantes).

La suite n'est **ni croissante ni décroissante** (elle alterne et diverge).

c. $u_n = \frac{5}{3^n} = 5\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Suite géométrique de raison $r = \frac{1}{3}$. Le premier terme est positif,

donc la suite est **strictement décroissante**.

d. $u_0 = -\frac{1}{2}$ et $u_{n+1} - u_n = \frac{7}{2} > 0$.

Différence constante positive $\Rightarrow$ suite arithmétique de raison $\frac{7}{2}$.

La suite est donc **strictement croissante**.

Somme d'une suite

Exercice 1

On utilise les formules de somme :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

De manière générale, la somme est donnée par la formule :

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

$$A = 1 + 2 + 3 + \dots + 10 = 55$$

$$B = 1 + 2 + 3 + \dots + 50 = \frac{50 \times 51}{2} = 1275$$

$$C = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$$

$$= \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

$$D = 2 + 4 + 6 + \dots + 100$$

$$= 2(1 + 2 + \dots + 50) = 2 \times 1275$$

$$= 2550$$

$$E = 11 + 12 + \dots + 20$$

$$= 10 \times \frac{11+20}{2} = 155$$

Exercice 2

$$\begin{array}{lcl} 1 + 2 + 3 + \dots + 30 & \bullet & 465 \\ 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{40} & \bullet & 3280 \\ 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2048 & \bullet & 4095 \\ 60 + 61 + 62 + \dots + 99 + 100 & \bullet & 88573 \end{array}$$

Exercice 3

a. Suite arithmétique :

- raison : $r = 3$
- premier terme : $u_0 = -2$
- nombre de termes : $50 \rightarrow$ ce sont $u_0, u_1, \dots, u_{49}$

Calcul du terme u_{49}

$$u_n = u_0 + nr$$

$$u_{49} = -2 + 49 \times 3$$

$$-2 + 147 = 145$$

Somme des 50 termes

$$S_{50} = \frac{(u_0 + u_{49}) \times 50}{2}$$

$$S_{50} = \frac{(-2 + 145) \times 50}{2}$$

$$S_{50} = \frac{143 \times 50}{2} = 143 \times 25 = \boxed{3575}$$

b. Somme $S = v_4 + v_5 + \dots + v_{12}$

Suite géométrique :

- raison : $q = 2$
- premier terme : $v_0 = 3$

Expression d'un terme

$$v_n = v_0 q^n = 3 \cdot 2^n$$

Somme des termes du rang 4 à 12. C'est une somme partielle d'une suite géométrique :

$$S = v_4 + v_5 + \dots + v_{12}$$

Nombre de termes :

$$12 - 4 + 1 = 9$$

Formule de somme géométrique :

$$v_4 + v_5 + \dots + v_{12} = v_4 \cdot \frac{1 - q^9}{1 - q}$$

Comme $q = 2$, on obtient :

$$v_4 = 3 \cdot 2^4 = 48$$

$$S = 48 \cdot \frac{1 - 2^9}{1 - 2} = 48 \cdot (2^9 - 1)$$

$$2^9 = 512 \Rightarrow 512 - 1 = 511$$

$$S = 48 \times 511 = \boxed{24528}$$

Polynôme de second degré

Exercice 1

- Oui. $a = 3$; $b = 1$ et $c = -1$
- Non. Il y a un terme en x^3
- Oui.
 $a = \pi$; $b = -(1 + \pi)$ et $c = \pi$
- Oui. $a = \frac{3}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$
- Non. Il y a un terme en $\frac{1}{x}$

Exercice 2

a. $f(x) = (x + 2)^2 + 5$

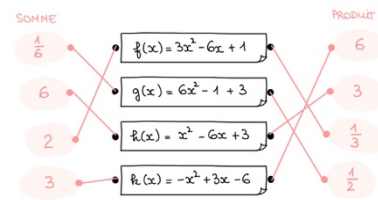
b. $f(x) = (x - 3)^2 - 9$

c. $f(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$

d. $f(x) = (x - 3)^2 - 25$

Équation du second degré

Exercice 1



Exercice 2

• $2x^2 - 2x - 3 = 0$

Solutions : $x = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$ ou $x = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$

• $3x + 3x^2 = -1$

$\Delta < 0$ donc pas de solution réelle.

• $8x^2 - 4x + 2 = \frac{3}{2}$

On multiplie par 2 pour simplifier :

$16x^2 - 8x + 1 = 0$

$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 1 = 64 - 64 = 0$

Donc une seule solution :

$x = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

Solution : $x = \frac{1}{4}$

• $-2(x-1)^2 - 3 = 0$

On isole :

$-2(x-1)^2 = 3$

$(x-1)^2 = -\frac{3}{2}$

Un carré ne peut pas être négatif. Aucune solution réelle.

• $(x+2)(3-2x) = 0$

Produit nul $\Rightarrow$ un des deux facteurs vaut 0.

Cas 1

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

Cas 2

$3 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

Solutions

$x = -2$ ou $x = \frac{3}{2}$

Variation d'un trinôme

Exercice 1

- $x = 3$
- Décroissante
- 2

Exercice 2

a. $f(x) = x^2 + 3x + 3$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow \frac{3}{4} \nearrow$	$+\infty$

b. $f(x) = -2x^2 + 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	1	$\searrow -\infty$

c. $f(x) = (1-x)(1+x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	1	$\searrow -\infty$

Exercice 3

Le sommet de la parabole est $M(3; 0)$. Ainsi $f(x) = a(x-3)^2$.

On sait que le point $N(0; 3)$ appartient à la parabole. Donc $f(0) = a(-3)^2 = 3 \Leftrightarrow 9a = 3 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$

La forme factorisée est

$f(x) = \frac{1}{3}(x-3)^2$

Signes d'un trinôme

Exercice 1

$A(x) = 2x^2 - 8x + 6$

Le coefficient principal est $a > 0$.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$P(x)$		+	-	+

$B(x) = -3x^2 - 11x + 4$

Le coefficient principal est $a < 0$.

x	$-\infty$	-4	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$Q(x)$		-	+	-

$R(x) = x^2 - 10x + 38$

Pas de racine. Le coefficient principal est $a = 1 > 0$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$R(x)$		+

Exercice 2

$A(x) = x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$

Le polynôme possède deux racines -3 et 3. Le coefficient principal est $a=1 > 0$.

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
$A(x)$		+	-	+

$B(x) = -2x^2 - 8x = -2x(x+4)$

Le polynôme possède deux racines 0 et -4. Le coefficient principal est $a=-2 < 0$.

x	$-\infty$	-4	0	$+\infty$
$B(x)$		-	+	-

$F(x) = 3x - 2x^2 - 1$

On calcule le discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$

Il y a donc deux racines réelles:

$x_1 = \frac{-3-1}{-4} = 1$ et $x_2 = \frac{-3+1}{-4} = \frac{1}{2}$

Le coefficient principal est $a = -2 < 0$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$F(x)$		-	+	-

Inéquations de second degré

a. $3x^2 > 2x + 1$

On met tous les termes du même côté :

$3x^2 - 2x - 1 > 0$

Calcul du discriminant :

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 4 + 12 = 16$

Racines :

$x_1 = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}, x_2 = \frac{2+4}{6} = 1$

Le trinôme est **positif** à l'extérieur des racines (car $a > 0$) :

$x < -\frac{1}{3}$ ou $x > 1$

b. $x^2 \leq 6x - 1$

On met tous les termes du même côté :

$$x^2 - 6x + 1 \leq 0$$

Discriminant :

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \cdot 1 = 36 - 4 = 32$$

Racines :

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{32}}{2} = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{6 + \sqrt{32}}{2} = 3 + 2\sqrt{2}$$

Le trinôme est **négligatif ou nul** entre les racines (car $1 > 0$) :

$$3 - 2\sqrt{2} \leq x \leq 3 + 2\sqrt{2}$$

c. $\frac{2x^2 - 12x + 19}{x - 2} \leq 0$

Domaine : $x \neq 2$.

Étude du numérateur

$$2x^2 - 12x + 19$$

Discriminant :

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 2 \times 19$$

$$= 144 - 152 = -8 < 0$$

$\Rightarrow$ pas de racine réelle, et $2 > 0$, donc

$$2x^2 - 12x + 19 > 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Le signe de la fraction est donc le **même que celui de** $x - 2$:

- si $x - 2 < 0$ (i.e. $x < 2$), la fraction est **négligative** ;
- si $x - 2 > 0$ (i.e. $x > 2$), la fraction est **positive**.

Comme le numérateur n'est jamais nul, la fraction n'est **jamais égale à 0**.

Donc

$$\frac{2x^2 - 12x + 19}{x - 2} \leq 0 \Leftrightarrow x < 2.$$

$$S_c =] - \infty, 2[$$

d. $\frac{1}{x} > \frac{x}{x+2}$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{x}{x+2} > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2-x^2}{x(x+2)} > 0$$

On calcule le discriminant

de $x + 2 - x^2$ avec $a = -1$, $b = 1$ et $c = 2$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 8 = 9 > 0$$

Il y a donc deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{-2} = 2 \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{-2} = -1.$$

$$x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -2 \text{ et } x(x + 2) > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in] - \infty; -2[\cup]0; +\infty[.$$

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-2	-1	0	2	$+\infty$
$x + 2 - x^2$	-	-	+	+	-	-
x	-	-	-	+	+	+
$x + 2$	-	+	+	+	+	+
$\frac{x+2-x^2}{x(x+2)}$	-	+	+	-	-	-

L'ensemble des solutions est donc

$$S_d =] - 2, -1[\cup]0, 2[$$

Dérivée en un point

Exercice 1

1.

- Faux : f est dérivable en -2

- Vrai

2.

- Vrai

- Vrai

Exercice 2

a. $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{h^2-0}{h} = h$

b. $\lim_{h \rightarrow 0} h = 0$ donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$

Exercice 3

Soit h un réel non nul, proche de 0 :

a. $\frac{g(h)-g(0)}{h} = \frac{\frac{1}{2h+1}-1}{h} = \frac{\frac{1-2h-1}{2h+1}}{h} = \frac{-2h}{h(2h+1)} = \frac{-2}{2h+1}$

b. $\lim_{h \rightarrow 0} 2h + 1 = 1$

d'où $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{2h+1} = -2$ donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = -2$.

Fonctions dérivées

Exercice 1

x^3	x^2	$-5x+3$	-6	$\sqrt{3x+1}$	$3x^2$	$\frac{1}{2x}$
$2x$	$\frac{3}{2x}$	-5	0	$\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$	$6x$	$-\frac{1}{4x^2}$

Exercice 2

$f'(x) = 2x$	$f'(x) = 1 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$
$f'(x) = 15x^4 + 14x$	$f'(x) = \frac{4}{5}x^3 + 4x - \frac{2}{x^3}$
$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{4x-15}{x^6}$
$f'(x) = \frac{x^6-4x^3-3x^2}{(x^3-1)^2}$	$f'(x) = \frac{3x^2+4}{\sqrt{x}(x^2-4)^2}$

Tangente en un point

Exercice 1

$f(1) = 5$ et $f'(1) = 0$ $\rightarrow y = 5$
 $g(2) = -1$ et $g'(2) = 3$ $\rightarrow y = 2x - 6$
 $R'(-5) = 0.5$ et $R'(-5) = -1.5$ $\rightarrow y = -x + 5$
 $R(3) = 0$ et $R'(3) = 2$ $\rightarrow y = 0.5x + 1$

Exercice 2

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 0$$

$$f(3) = 0$$

$$f'(3) = \frac{9}{4}$$

Exercice 3

a.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $a = 0$ est

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0).$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$\text{Donc } f'(0) = -3$$

$$\text{De plus } f(0) = 1.$$

Une équation de la tangente est par conséquent

$$y = -3x + 1.$$

b.

La fonction f est dérivable sur $] - \infty; 3[\cup]3; + \infty[$.

Une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $a = 1$ est $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.

Pour déterminer l'expression de f' on applique la formule

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ avec } u(x)$$

$$= x^2 \text{ et } v(x) = 3x - 9.$$

Donc $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 3$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(3x-9) - 3(x^2)}{(3x-9)^2} \\ &= \frac{6x^2 - 18x - 3x^2}{(3x-9)^2} \\ &= \frac{3x^2 - 18x}{(3x-9)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi $f'(1) = -\frac{5}{12}$. De

plus $f(1) = -\frac{1}{6}$.

Une équation de la tangente est par conséquent

$$y = -\frac{5}{12}(x-1) - \frac{1}{6} \text{ soit}$$

$$y = -\frac{5}{12}x + \frac{1}{4}.$$

c.

La fonction f est dérivable sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.

Une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $a = 2$ est $y = f'(2)(x-2) + f(2)$.

Pour déterminer l'expression de f' on applique la formule

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ avec } u(x) = x+1 \text{ et } v(x) = x-1.$$

Donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x-1 - (x+1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-2}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Donc $f'(2) = -2$.

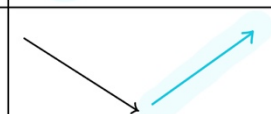
De plus $f(2) = 3$.

Une équation de la tangente est par conséquent

$$\begin{aligned} y &= -2(x-2) + 3 \text{ soit} \\ y &= -2x + 7. \end{aligned}$$

Dérivées et variation

Exercice 1

x	$-\infty$	5	$+\infty$
f'	-	0	+
f			

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
q'	-	0	+	+
q				

Exercice 2

La fonction f est définie pour tout réel x vérifiant $x+2 \neq 0$ soit $x \neq -2$.

Ainsi l'ensemble de définition de f est $\mathcal{D}_f =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$.

La fonction f est également dérivable sur $\mathcal{D}_f$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathcal{D}_f$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathcal{D}_f$.

f est de la forme $\frac{u}{v}$. On utilise donc la formule

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

avec

$$u(x) = x^2 - 1 \text{ et } v(x) = x + 2.$$

On a donc

$$\begin{aligned} u'(x) &= 2x \text{ et } v'(x) = 1. \\ f'(x) &= \frac{2x(x+2) - (x^2-1)}{(x+2)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 4x - x^2 + 1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{x^2 + 4x + 1}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

Le signe de $f'(x)$ ne dépend que de celui de $x^2 + 4x + 1$.

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 1 = 12 > 0$$

Il y a donc deux racines réelles :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-4 - \sqrt{12}}{2} = -2 - \sqrt{3} \text{ et } x_2 \\ &= \frac{-4 + \sqrt{12}}{2} \\ &= -2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

Puisque $a = 1 > 0$ on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-2 - \sqrt{3}$	-2	$-2 + \sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f					

La fonction f est donc **croissante** sur les intervalles

$] -\infty; -2 - \sqrt{3}]$ et $[-2 + \sqrt{3}; +\infty[$ et **décroissante** sur les intervalles $[-2 - \sqrt{3} - 2[$ et $] -2; -2 + \sqrt{3}]$.

Extremum

Exercice 1

Affine : Pas d'extremum sur $\mathbb{R}$

Carré : Minimum en $O(0;0)$

Cube : Pas d'extremum sur $\mathbb{R}$

Racine carrée : Minimum en $O(0;0)$

Exercice 2

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} \\ &= \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} \end{aligned}$$

Sur $]0; +\infty[$, on sait

que x^2 et $x+1$ sont positifs.

Le signe de $f'(x)$ ne dépend donc que de celui de $x-1$.

$$x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

On obtient par conséquent le tableau de variation suivant :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f			

Exponentielle

Exercice 1

$$\frac{e^4 \times e^{-5}}{e} = e^{4-5-1} = e^{-2}$$

$$\begin{aligned} e^{-2} \times e^4 \times e^{-1} &= e^{-2+4-1} = e^1 \\ &= e \end{aligned}$$

$$\frac{e^7}{e^{-10}} = e^{7-(-10)} = e^{17}$$

$$e^3 \times (e^{-4})^2 = e^3 \times e^{-8} = e^{-5}$$

$$\frac{e \times (e^5)^7}{e^{-9} \times e^4} = \frac{e^{1+35}}{e^{-9+4}} = \frac{e^{36}}{e^{-5}} = e^{41}$$

$$1 - ((e^{\frac{3}{2}} \times e^{-3})^2) \times e^3 = 1 - (e^{-3/2})^2 e^3 = 1 - e^{-3} e^3 = 1 - 1 = 0$$

$$(e^x)^3 \times (e^{2x} - e^{-3x}) = e^{3x} (e^{2x} - e^{-3x}) = e^{5x} - e^0 = e^{5x} - 1$$

Exercice 2

$$A = 5e^{-4x} - 3e^{-4x} + 7e^{-4x} = (5 - 3 + 7)e^{-4x} = 9e^{-4x}$$

$$B = 9e^{2x} + 6 + e^{-2x}$$

On peut réécrire B de manière plus structurée en posant $t = e^{2x}$ (donc $e^{-2x} = 1/t$).

$$\text{Alors : } B = 9t + 6 + \frac{1}{t}.$$

Ensuite on peut remettre sur un seul dénominateur :

$$B = \frac{9t^2 + 6t + 1}{t}.$$

Et remarquer que le numérateur est un **carré parfait** :

$$9t^2 + 6t + 1 = (3t + 1)^2.$$

$$\text{Donc : } B = \frac{(3e^{2x} + 1)^2}{e^{2x}}$$

$$C = e^{2x} - 9x^2$$

On peut appliquer une **identité remarquable** car on reconnaît une **différence de deux carrés** :

$$e^{2x} - 9x^2 = (e^x)^2 - (3x)^2$$

Donc on utilise :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$\text{Ici : } a = e^x \text{ et } b = 3x$$

On obtient :

$$e^{2x} - 9x^2 = (e^x - 3x)(e^x + 3x) \\ D = (-5x + 2)(e^{-2x})^4 - 5e^{-8x} \\ (e^{-2x})^4 = e^{-8x}$$

On remplace :

$$D = (-5x + 2)e^{-8x} - 5e^{-8x}$$

Maintenant on peut factoriser :

$$D = e^{-8x}(-5x + 2 - 5)$$

$$D = e^{-8x}(-5x - 3)$$

Exercice 3

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{(e^x + e^{-x})e^x}{(e^x - e^{-x})e^x} \\ = \frac{(e^{x+x} + e^{-x+x})}{(e^{x+x} - e^{-x+x})} \\ = \frac{e^{2x+1}}{e^{2x-1}}$$

Équations avec exp

Exercice 1

$$e^x - e = 0 \Leftrightarrow e^x = e^1$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

La solution de l'équation est 1.

$$e^{2x+4} = e^2 \Leftrightarrow 2x + 4 = 2$$

$$\Leftrightarrow 2x = -2$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

La solution de l'équation est -1.

$$e^x + 5 = 0$$

La fonction exponentielle est strictement positive donc $e^x + 5 > 0$.

L'équation ne possède donc aucune solution.

$$e^{-3x+5} = 1 \Leftrightarrow e^{-3x+5} = e^0$$

$$\Leftrightarrow -3x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x = -5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$$

La solution de l'équation est $\frac{5}{3}$.

$$4xe^x + 3e^{x+2} = 0$$

On factorise par e^x :

$$4xe^x + 3e^{x+2} = e^x(4x + 3e^2) = 0$$

Or $e^x > 0$ pour tout x , donc :

$$4x + 3e^2 = 0 \Rightarrow 4x = -3e^2 \\ \Rightarrow x = -\frac{3e^2}{4}.$$

$$\text{Solution : } \boxed{x = -\frac{3e^2}{4}}$$

$$e^{2x} - e^x - e^{x+1} + e = 0$$

On pose $t = e^x$ (avec $t > 0$).

On note que $e^{2x} = t^2$ et $e^{x+1} = e \times e^x = e \times t$.

L'équation devient :

$$t^2 - t - e \times t + e = 0 \\ \Rightarrow t^2 - (1 + e)t + e = 0.$$

On résout ce trinôme :

$$\Delta = (1 + e)^2 - 4e \\ = 1 + 2e + e^2 - 4e \\ = 1 - 2e + e^2 = (e - 1)^2.$$

$$\text{Donc } t = \frac{1+e \pm (e-1)}{2}.$$

Avec le « + » :

$$t = \frac{1+e+e-1}{2} = \frac{2e}{2} = e.$$

Avec le « - » :

$$t = \frac{1+e-e+1}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

On revient à e^x :

$$e^x = e \Rightarrow x = 1$$

$$e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

Solutions : $\boxed{x = 0 \text{ ou } x = 1}$.

Exercice 2

a. $e^{-2x} > 1$

$$\Leftrightarrow e^{-2x} > e^0$$

$$\Leftrightarrow -2x > 0 \Leftrightarrow x < 0$$

L'ensemble solution est $] -\infty; 0[$.

b. $e^{2x} < e^6$

$$\Leftrightarrow 2x < 6 \Leftrightarrow x < 3$$

L'ensemble solution est $] -\infty; 3[$.

c. $e^{3x+4} \geq e^{13}$

$$\Leftrightarrow 3x + 4 \geq 13 \Leftrightarrow 3x \geq 9$$

$$\Leftrightarrow x \geq 3$$

L'ensemble solution est $[3; +\infty[$.

d. $e^{-2x+5} \leq e^9$

$$\Leftrightarrow -2x + 5 \leq 9$$

$$\Leftrightarrow -2x \leq 4 \Leftrightarrow x \geq -2$$

L'ensemble solution est $[-2; +\infty[$.

e. $e^{3x+5} \geq e^{6x-1}$

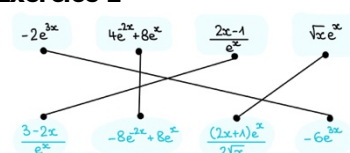
$$\Leftrightarrow 3x + 5 \geq 6x - 1$$

$$\Leftrightarrow -3x \geq -6 \Leftrightarrow x \leq 2$$

L'ensemble solution est $] -\infty; 2]$.

Fonction exponentielle

Exercice 1



Exercice 2

$f(x)$	$f'(x)$
$e^x + x^2$	$e^x + 2x$
$3e^x + 4x + 6$	$3e^x + 4$
xe^x	$(1+x)e^x$
$\frac{x^2+5}{e^x}$	$\frac{-x^2+2x-5}{e^x}$
e^{5x-3}	$5e^{5x-3}$
e^{-2x-1}	$-2e^{-2x-1}$

Exercice 3

a. $f(x) = e^{x+4} + 3x$
 Pour tout réel x on a :
 $f'(x) = e^{x+4} + 3 > 0$
 Car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
 Ainsi la fonction f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

b. $f(x) = -\frac{e^x}{e^x+1}$
 Pour tout réel x on a :

$$f'(x) = -\frac{e^x(e^x+1) - e^x \times e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$= -\frac{e^{2x} + e^x - e^{2x}}{(e^x+1)^2}$$

$$= -\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$< 0$$

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc le numérateur et le dénominateur de la fraction sont positifs (et on considère son opposé). Ainsi la fonction f est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$.

c. $f(x) = (x^2 + 1)e^{2x}$
 Pour tout réel x on a :

$$f'(x) = 2xe^{2x} + (x^2 + 1) \times 2e^{2x}$$

$$= (2x + 2x^2 + 2)e^{2x}$$

$$= 2(x^2 + x + 1)e^{2x}$$

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Le

signe de $f'(x)$ ne dépend donc que de celui de $x^2 + x + 1$.

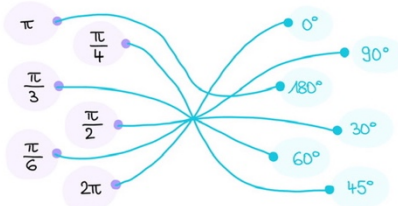
$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0.$$

Le coefficient principal est $a = 1 > 0$.

Ainsi $x^2 + x + 1 > 0$ pour tout réel x . La fonction f est donc **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

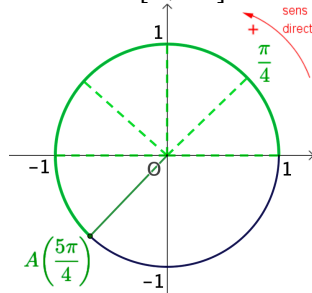
Cercle trigonométrique

Exercice 1

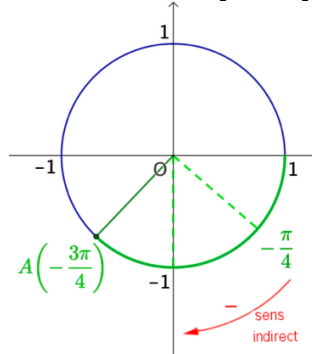


Exercice 2

Sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$, le nombre associé au point A est $\frac{5\pi}{4}$.
 En effet, $\frac{5\pi}{4}$ appartient bien à l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

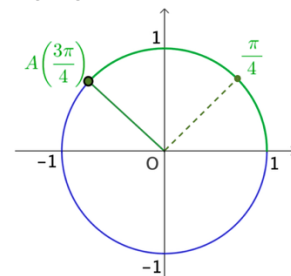


Sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$, le nombre associé au point A est $-\frac{3\pi}{4}$. En effet, $-\frac{3\pi}{4}$ appartient bien à l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.



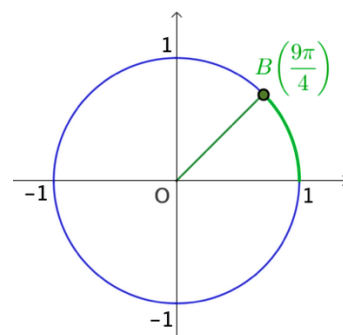
Exercice 3

Point A



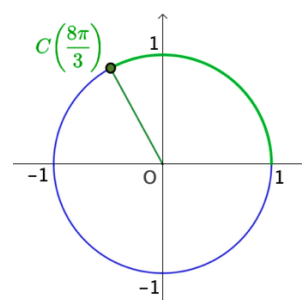
Point B

$\frac{9\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$
 $\frac{9\pi}{4}$ correspond à un tour complet dans le sens direct $+\frac{\pi}{4}$. Le point B a la même position sur le cercle que le point associé à $\frac{\pi}{4}$.



Point C

$\frac{8\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$
 $\frac{8\pi}{3}$ correspond à un tour complet dans le sens direct $+\frac{2\pi}{3}$.
 Le point C a la même position sur le cercle que le point associé à $\frac{2\pi}{3}$.

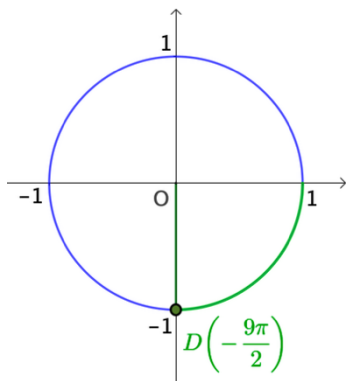


Point D

$$-\frac{9\pi}{2} = -\frac{8\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -4\pi - \frac{\pi}{2}$$

$-\frac{9\pi}{2}$ correspond à deux tours complets dans le sens indirect

$-\frac{\pi}{2}$. Le point D a la même position sur le cercle que le point associé à $-\frac{\pi}{2}$.



Exercice 4

a) $\frac{22\pi}{3}$

Période : $2\pi = \frac{6\pi}{3}$.

On réduit modulo 2π :

$$\frac{22\pi}{3} - 3 \times \frac{6\pi}{3} = \frac{22\pi}{3} - \frac{18\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

Mais $\frac{4\pi}{3} > \pi$ (car $\pi = \frac{3\pi}{3}$), donc ce n'est pas encore dans $] -\pi, \pi]$.

On enlève encore une fois 2π :

$$\frac{4\pi}{3} - 2\pi = \frac{4\pi}{3} - \frac{6\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}.$$

On vérifie : $-\pi < -\frac{2\pi}{3} \leq \pi$.

👉 **Mesure principale :** $-\frac{2\pi}{3}$

b) $-\frac{27\pi}{4}$

Période : $2\pi = \frac{8\pi}{4}$.

On veut remonter vers l'intervalle $] -\pi, \pi]$, donc on ajoute des 2π .

Ajout de $3 \times 2\pi$:

$$-\frac{27\pi}{4} + 3 \times \frac{8\pi}{4} = -\frac{27\pi}{4} + \frac{24\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$$

Vérification : $-\pi < -\frac{3\pi}{4} < \pi$.

👉 **Mesure principale :** $-\frac{3\pi}{4}$

c) $\frac{79\pi}{6}$

Période : $2\pi = \frac{12\pi}{6}$.

Réduction modulo 2π :

$$79 = 12 \times 6 + 7 \Rightarrow \frac{79\pi}{6}$$

soit $\frac{7\pi}{6} \pmod{2\pi}$.

On regarde $\frac{7\pi}{6}$:

$$\frac{7\pi}{6} > \pi \text{ (car } \pi = \frac{6\pi}{6}\text{),}$$

donc on enlève encore 2π :

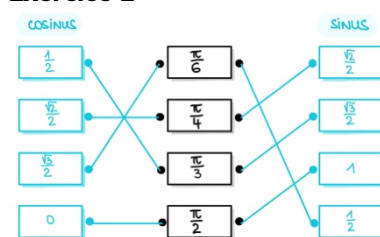
$$\frac{7\pi}{6} - 2\pi = \frac{7\pi}{6} - \frac{12\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}.$$

Vérification : $-\pi < -\frac{5\pi}{6} \leq \pi$.

👉 **Mesure principale :** $-\frac{5\pi}{6}$

Cosinus et sinus d'un angle

Exercice 1



Exercice 2

1. $\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

$$\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{4\pi}{3} + 2\pi\right)$$

$$= \sin\left(-\frac{4\pi}{3} + \frac{6\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right).$$

$\frac{2\pi}{3}$ est dans le 2^e quadrant,

même sinus que $\frac{\pi}{3}$ et positif :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$ (angle du 2^e quadrant).

Le cosinus est négatif et a même valeur absolue que celui de $\frac{\pi}{6}$:

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. $\sin(-\pi) = -\sin(\pi)$.

Sur le cercle,

l'angle π correspond au point $(-1, 0)$, donc $\sin(\pi) = 0$.

$$\sin(-\pi) = 0$$

4. $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right).$$

$\frac{5\pi}{6}$ est dans le 2^e quadrant,

symétrique de $\frac{\pi}{6}$ par rapport à $\frac{\pi}{2}$,

donc

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

5. $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

$$\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$$

→ angle du 3^e quadrant, même valeur que $\frac{\pi}{4}$ mais cosinus

négatif :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

6. $\sin\left(-\frac{17\pi}{3}\right)$

On réduit modulo 2π ($2\pi = \frac{6\pi}{3}$) :

$$-\frac{17\pi}{3} + 3 \times 2\pi = -\frac{17\pi}{3} + 3 \times \frac{6\pi}{3} = -\frac{17\pi}{3} + \frac{18\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

Donc

$$\sin\left(-\frac{17\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\sin\left(-\frac{17\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Équations trigonométriques

Exercice 1

1) $\cos(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Sur le cercle trigo,

$\cos(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pour les angles :

$$t = \pm \frac{\pi}{6}$$

On vérifie qu'ils sont bien dans $] -\pi, \pi]$.

Solutions :

$$t = \frac{\pi}{6} \text{ ou } t = -\frac{\pi}{6}$$

$$2) \sin(t) = -\frac{1}{2}$$

L'angle de référence est $\frac{\pi}{6}$.

Dans $]-\pi; \pi[$, les deux angles ayant un sinus égal à $-\frac{1}{2}$ sont :

$$t = -\frac{5\pi}{6} \text{ et } t = -\frac{\pi}{6}$$

$$3) \cos(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On cherche les angles du cercle trigonométrique où le cosinus

vaut $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Sur le cercle :

$$\cos(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{3\pi}{4} \text{ ou } t = -\frac{3\pi}{4}.$$

Les deux sont dans l'intervalle demandé.

Solutions :

$$t = \frac{3\pi}{4} \text{ ou } t = -\frac{3\pi}{4}$$

$$4) \sin(t) = \sin\left(\frac{17\pi}{5}\right)$$

On doit d'abord

réduire $\frac{17\pi}{5}$ modulo 2π .

Réduction dans $[0, 2\pi[$

$$2\pi = \frac{10\pi}{5}$$

$$\frac{17\pi}{5} - \frac{10\pi}{5} = \frac{7\pi}{5}$$

$$\sin\left(\frac{17\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{5}\right).$$

Comme $\frac{7\pi}{5} = \pi + \frac{2\pi}{5}$, on peut aussi réduire dans $]-\pi, \pi[$.

$$\frac{7\pi}{5} - 2\pi = \frac{7\pi}{5} - \frac{10\pi}{5} = -\frac{3\pi}{5}$$

Donc :

$$\sin\left(\frac{17\pi}{5}\right) = \sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$$

Angles ayant le même sinus
Deux angles ont le même sinus si :

$$t = -\frac{3\pi}{5} \text{ ou } t = \pi - \left(-\frac{3\pi}{5}\right)$$

Calcul :

$$t = \pi + \frac{3\pi}{5} = \frac{8\pi}{5}$$

Réduisons dans $]-\pi, \pi[$:

$$\frac{8\pi}{5} - 2\pi = \frac{8\pi}{5} - \frac{10\pi}{5} = -\frac{2\pi}{5}$$

☞ **Solutions** dans $]-\pi, \pi[$

$$t = -\frac{3\pi}{5} \text{ ou } t = -\frac{2\pi}{5}$$

Exercice 2

$$1) \cos(t) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$t = \frac{\pi}{8} + 2k\pi \text{ ou } t = -\frac{\pi}{8} + 2k\pi$$

$$2) \cos(t) = \frac{1}{2}$$

Angles de référence : $\frac{\pi}{3}$

$$t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } t = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$3) \sin(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Angles de référence : $\frac{\pi}{4}$

$$t = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } t = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$4) \sin(t) = -1$$

C'est le point bas du cercle :

$$t = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Exercice 3

On sait :

$$\cos a = \frac{5}{7}, a \in [0, \pi].$$

Dans $[0, \pi]$, le sinus est positif.

On utilise l'identité

fondamentale :

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1.$$

Donc :

$$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$$

$$= 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2 = 1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49}.$$

Comme $a \in [0, \pi] \Rightarrow \sin a \geq 0$:

$$\sin a = \frac{\sqrt{24}}{7} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

Fonctions trigonométriques**Exercice 1**

$$a. \sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\Rightarrow \sin^2(-x) = \sin^2(x)$$

Donc $f(-x) = f(x) \rightarrow$ paire.

☞ **Vrai**

b. La période de $\cos(kx)$ est $T = \frac{2\pi}{k}$. Ici : $T = \frac{2\pi}{3} \neq 3\pi$

☞ **Faux**

c. La période de $\sin(2x)$ est :

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Le $+\pi/3$ ne change rien.

☞ **Vrai**

d. $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ est impaire.

On teste :

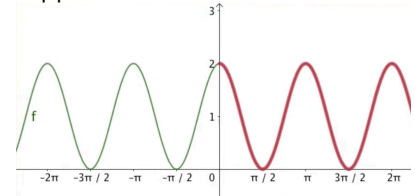
$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{-x} = \frac{\cos x}{-x}$$

$$= -\frac{\cos x}{x} = -f(x)$$

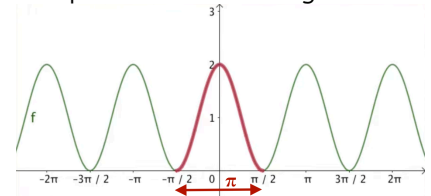
☞ **Vrai**

Exercice 2**• FONCTION f :**

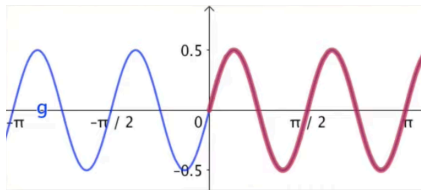
- La fonction f est paire car sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



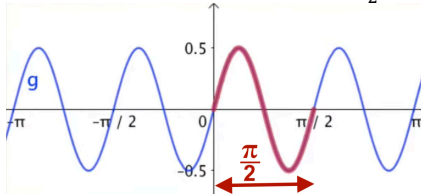
- La fonction f est périodique de période π car on retrouve le même morceau de courbe sur chaque intervalle de longueur π .

**• FONCTION g :**

- La fonction g est impaire car sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.

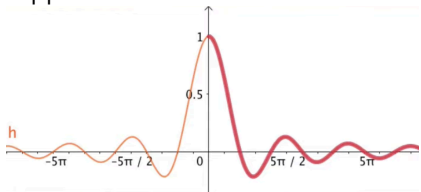


- La fonction g est périodique de période $\frac{\pi}{2}$ car on retrouve le même morceau de courbe sur chaque intervalle de longueur $\frac{\pi}{2}$.



• FONCTION h :

- La fonction h est paire car sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



- La fonction h n'est pas périodique, on ne retrouve pas le même morceau de courbe sur différents intervalles.

Produit scalaire

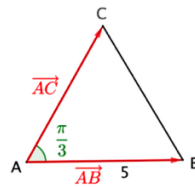
Exercice 1

$$\begin{aligned} \text{a. } \vec{AB} \cdot \vec{AE} &= \frac{1}{2}a^2 \\ \text{b. } \vec{BC} \cdot \vec{DA} &= -a^2 \\ \text{c. } \vec{BC} \cdot \vec{BE} &= \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 \\ \text{d. } \vec{CD} \cdot \vec{AE} &= -\frac{1}{2}a^2 \end{aligned}$$

Exercice 2

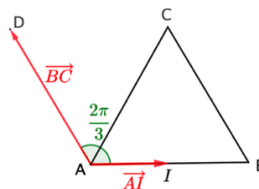
$$\begin{aligned} \text{a. } \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= 2 \times 5 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \\ &= 5 \times 5 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 25 \times 0,5 = 12,5 \end{aligned}$$



c. Le produit scalaire $\vec{AI} \cdot \vec{BC}$ est composé de deux vecteurs qui n'ont pas la même origine. On construit alors le point D tel que : $\vec{AD} = \vec{BC}$. De cette façon, le produit scalaire à calculer est composé de deux vecteurs de même origine le point A .

$$\begin{aligned} \vec{AI} \cdot \vec{BC} &= \vec{AI} \cdot \vec{AD} \\ &= AI \times AD \times \cos(\widehat{IAD}) \\ &= 2,5 \times 5 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= 12,5 \times (-0,5) \\ &= -6,25 \end{aligned}$$



Calculer le produit scalaire

Exercice 1

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(AB + AC + BC)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos(\hat{A})$$

Exercice 2

D'après le théorème d'Al Kashi, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$BC^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \times 4 \times 6 \times \cos(60^\circ)$$

$$BC^2 = 16 + 36 - 48 \times \frac{1}{2}$$

$$BC^2 = 28$$

$$BC = \sqrt{28} \approx 5,3$$

Exercice 3

D'après le théorème d'Al Kashi :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$7^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5$$

$$\times \cos(\widehat{BAC})$$

$$49 = 64 + 25 - 80 \cos(\widehat{BAC})$$

$$80 \cos(\widehat{BAC}) = 64 + 25 - 49$$

$$80 \cos(\widehat{BAC}) = 40$$

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{40}{80}$$

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{1}{2}$$

$$\widehat{BAC} = 60^\circ$$

Orthogonalité

Exercice 1

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$$\text{a. } 3 \times 2 + (-2) \times 3 = 6 - 6 = 0$$

✓ Orthogonaux → Vrai

$$\text{b. } (-4) \times 1 + 1 \times (-1) = -4 - 1 = -5$$

✗ Pas orthogonaux → Faux

$$\text{c. } 5 \times (-2) + 2 \times 5 = -10 + 10 = 0$$

✓ Orthogonaux → Vrai

$$\text{d. } (-3) \times 1 + (-1) \times (-3) = -3 + 3 = 0$$

✓ Orthogonaux → Vrai

Exercice 2

1. On a $\vec{AB}(2; 3)$ et $\vec{CD}(-3; 2)$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{CD} &= 2 \times (-3) + 3 \times 2 \\ &= -6 + 6 = 0. \end{aligned}$$

Les droites (AB) et (CD) sont donc perpendiculaires.

2. On a $\vec{DB}(-3; 0)$ et $\vec{BC}(0; -2)$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \vec{DB} \cdot \vec{BC} &= -3 \times 0 + (-2) \times 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Les droites (DB) et (BC) sont perpendiculaires.

3. $\vec{CB}(0; 2)$ et $\vec{CD}(-3; 2)$.

Donc :

$$\begin{aligned} CB &= 2 \text{ et } CD = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{13}. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \times (-3) + 2 \times 2 = 4.$$

Mais on a aussi :

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = CB \times CD \times \cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$$

Donc :

$$4 = 2\sqrt{13} \cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$$

$$\Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Ainsi :

$$(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) \approx 56,3^\circ$$

Équation de droite

Exercice 1

a. L'équation est :

$$4x - 5y + 7 = 0$$

Donc un vecteur normal est :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

b. Un vecteur directeur est orthogonal à $\vec{n}(4, -5)$.

On prend par exemple :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

car $4 \times 5 + (-5) \times 4 = 20 - 20 = 0$.

Bonne réponse : $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

c. On teste chaque point

dans $4x - 5y + 7 = 0$.

$$(2; 3) : 4 \times 2 - 5 \times 3 + 7 = 8 - 15 + 7 = 0 \rightarrow \checkmark$$

Les autres ne donnent pas 0.

Bonne réponse : $(2; 3)$

d. Coefficient directeur

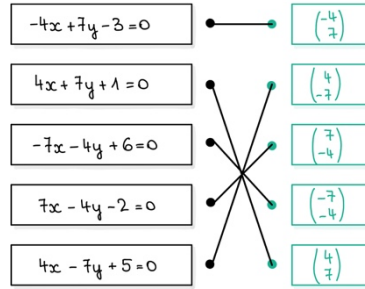
$$4x - 5y + 7 = 0 \Rightarrow -5y = -4x - 7$$

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{7}{5}$$

coefficient directeur $m = \frac{4}{5}$

Bonne réponse : $\frac{4}{5}$

Exercice 2



Exercice 3

On calcule un vecteur directeur de la droite (CD) :

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 7 - 3 \\ 5 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Un vecteur normal est donc obtenu en permutant et

changeant un signe $\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Une équation de droite avec vecteur normal $\vec{n}(6, -4)$ est :

$$6x - 4y + c = 0.$$

On utilise le point $C(3, -1)$ pour trouver c :

$$6 \times 3 - 4 \times (-1) + c = 0$$

$$18 + 4 + c = 0$$

$$c = -22.$$

Équation cartésienne de la droite (CD) :

$$6x - 4y - 22 = 0$$

Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Étape 1 - Équation de la droite (AH)

On commence par déterminer une équation de la droite (AH) .

Comme d et (AH) sont perpendiculaires, un vecteur directeur de d est un vecteur normal de (AH) .

Une équation cartésienne de d est $2x - y + 1 = 0$, donc le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d .

Donc $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un

vecteur normal de (AH) .

Une équation de (AH) est alors de la forme : $x + 2y + c = 0$.

Or, le point $A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartient

à (AH) , donc ses coordonnées vérifient l'équation de la droite :

$$3 + 2 \times 2 + c = 0 \Rightarrow 3 + 4 + c = 0 \Rightarrow c = -7.$$

Une équation de (AH) est donc :

$$x + 2y - 7 = 0.$$

Étape 2 - Coordonnées du point d'intersection

H est le point d'intersection

de d et (AH) , donc ses coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifient les équations des deux droites.

On résout le système :

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases}$$

À partir de la deuxième équation : $x = 7 - 2y$.

On remplace dans la première :

$$2(7 - 2y) - y + 1 = 0$$

$$14 - 4y - y + 1 = 0$$

$$15 - 5y = 0 \Rightarrow y = 3.$$

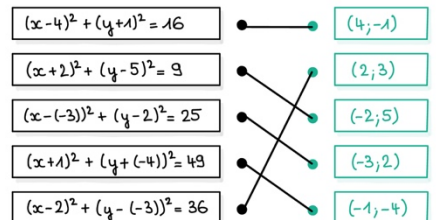
Puis :

$$x = 7 - 2 \times 3 = 7 - 6 = 1.$$

Donc : $H(1; 3)$.

Équation de cercle

Exercice 1



Exercice 2

a. Centre = $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

b. Rayon = $\begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$

c. Point appartenant au cercle

On teste chaque proposition dans $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 25$.

(3; 4) donne :

$$(3+2)^2 + (4-4)^2 = 5^2 = 25$$

Bonne réponse = (3; 4)

Exercice 3

1. On regroupe les termes en x et les termes en y puis on complète les carrés :

$$x^2 - 6x + y^2 + 2y - 8 = 0$$

On complète les carrés :

Pour $x^2 - 6x$, on ajoute et

$$\text{retranche } \left(-\frac{6}{2}\right)^2 = 9$$

Pour $y^2 + 2y$, on ajoute et

$$\text{retranche } \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1$$

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 2y + 1) - 8 - 9 - 1 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 - 18 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 18$$

L'équation obtenue est de la forme

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2,$$

ce qui est bien l'équation d'un cercle.

L'ensemble est donc un cercle.

2. Centre et rayon

En comparant

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 18$$

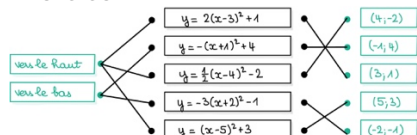
à la forme standard $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, on obtient :

$$\text{Centre : } C(3; -1)$$

$$\text{Rayon : } r = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Paraboles

Exercice 1



Exercice 2

a.

La parabole C_1 a pour sommet $S_1(-5; 6)$ donc son équation est de la forme $y = a(x - (-5))^2 + 6$, soit

$$y = a(x+5)^2 + 6.$$

Ses branches étant tournées vers le bas, on en déduit que $a < 0$.

Bonne réponse :

$$y = -2(x+5)^2 + 6$$

b.

La parabole C_2 a pour sommet $S_2(-2; 3)$ donc son équation est de la forme

$$y = a(x - (-2))^2 + (-3),$$

$$\text{soit } y = a(x+2)^2 - 3.$$

Ses branches étant tournées vers le haut, on en déduit que $a > 0$.

Bonne réponse :

$$y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 3$$

c. Bonne réponse :

l'axe d'équation $x = 2$

Probabilités conditionnelles

Exercice 1

a. $p(E \cap G)$

Élèves qui sont Garçons ET font

Anglais : 10

Au total : 40

$$p(E \cap G) = \frac{10}{40}$$

b. $p(D \cap F)$

Élèves qui sont Filles ET font

Allemand : 10

Au total : 40

$$p(D \cap F) = \frac{10}{40}$$

c. $p_E(F) = p(F | E)$

Nombre de filles en anglais : 6

Total anglais : 16

$$p(F | E) = \frac{6}{16}$$

d. $p_F(D) = p(D | F)$

On cherche : parmi les filles, quelle proportion

font Allemand ?

Nombre de filles en allemand : 10

Total filles : 16

$$p(D | F) = \frac{10}{16}$$

Exercice 2

a. On lit directement :

$$P(A) = 0,4$$

$$\text{Donc } P(\bar{A}) = 1 - 0,4 = 0,6$$

Sur les branches issues de $\bar{A}$:

$$P_{\bar{A}}(B) = 0,7$$

$$\text{Donc } P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1 - 0,7 = 0,3$$

Sur les branches issues de $\bar{A}$:

Une branche indique 0,1 vers $\bar{B}$ donc :

$$P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,1$$

Donc :

$$P_{\bar{A}}(B) = 1 - 0,1 = 0,9$$

b. Arbre complété

Branches issues de A :

vers B : **0,7**

vers $\bar{B}$: **0,3**

Branches issues de $\bar{A}$:

vers B : **0,9**

vers $\bar{B}$: **0,1**

c. Calcul des probabilités

$$p(A \cap B)$$

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$$

$$p(A \cap B) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$$

$$p(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(\bar{B})$$

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,6 \times 0,1 = 0,06$$

Exercice 3

1. Probabilités données dans l'énoncé

$$P(S) = \frac{3}{5}, P(\bar{S}) = \frac{2}{5}$$

$$P_S(P) = 0,5, P_{\bar{S}}(P) = 0,2$$

2. Calcul de $P(S \cap P)$

On cherche la probabilité que

Noah **boive un smoothie ET utilise une paille.**

$$P(S \cap P) = P(S) \times P_S(P)$$

$$P(S \cap P) = \frac{3}{5} \times 0,5 = \frac{3}{10}$$

Réponse : $\frac{3}{10}$

3. Calcul de $P(P | \bar{S})$

C'est la probabilité qu'il utilise une paille **quand il boit un**

soda. Elle est directement dans l'énoncé :

$$P_{\bar{S}}(P) = 0,2$$

Réponse : 0,2

Probabilités totales

Exercice 1

a. $p(A \cap B) = p(A) + p(B) \rightarrow$ **Faux**
La bonne formule est :
 $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

b. $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) \rightarrow$ **Vrai**
Attention : cette égalité n'est vraie que si A et B sont indépendants.

c. $p(B) = p_A(B) + p_{\bar{A}}(B) \rightarrow$ **Faux**
La bonne formule (loi des probabilités totales) est :
 $p(B) = p(A) p_A(B) + p(\bar{A}) p_{\bar{A}}(B)$.

d. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) \rightarrow$ **Faux**
Vrai seulement si A et B sont incompatibles.
En général :
 $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Exercice 2

a.
Données :
 $p(A) = 0,3$
donc $p(\bar{A}) = 1 - 0,3 = 0,7$
Sous A :

$$\begin{aligned} p_A(B) &= 0,6 \\ p_A(\bar{B}) &= 0,4 \end{aligned}$$

Sous $\bar{A}$:
 $p_{\bar{A}}(B) = 0,8$
 $p_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,2$

b. Calcul de $p(B)$
 $p(B) = p(A) \times p_A(B) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B)$
 $p(B) = 0,3 \times 0,6 + 0,7 \times 0,8$
 $p(B) = 0,18 + 0,56 = 0,74$

Réponse : $p(B) = 0,74$

c. Probabilité de A sachant B
 $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$

Or :
 $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$
 $= 0,3 \times 0,6 = 0,18$

Donc :

$$p_B(A) = \frac{0,18}{0,74} \approx 0,243$$

Réponse : $p_B(A) \approx 0,243$

Épreuves indépendantes

Exercice 1

- a. **Non.** Le premier tirage modifie la composition de l'urne. Les probabilités changent d'un tirage à l'autre.
- b. **Oui.** Après chaque tirage, on remet la boule : la composition reste identique. Les probabilités ne changent pas.
- c. **Non.** On tire plusieurs objets en même temps sans remise. Le résultat d'un tirage influence immédiatement les autres.

Exercice 2

a. Calcul de $p_A(B)$ et $p_B(A)$

$$\begin{aligned} \text{Calcul de } p_A(B) \\ p_A(B) &= \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \\ &= \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{20} \times \frac{5}{1} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Calcul de } p_B(A) \\ p_B(A) &= \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \\ &= \frac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{20} \times \frac{10}{3} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

b. Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si :
 $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

$$\begin{aligned} \text{Calculons } p(A) \times p(B) : \\ p(A) \times p(B) &= \frac{1}{5} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{50} \end{aligned}$$

$$\text{Or } p(A \cap B) = \frac{1}{20}.$$

Donc la condition d'indépendance n'est **pas** vérifiée. Les événements A et B ne sont pas indépendants.

Exercice 3

Si, pour n naissances successives, on note A l'événement : « il naît au moins une fille », son événement contraire est $\bar{A}$: « il naît n garçons ». À chaque naissance, la probabilité qu'il

naisse un garçon est de $1 - 0,49 = 0,51$.

Les naissances successives étant indépendantes, on a donc :

$$\begin{aligned} p(\bar{A}) &= 0,51^n, \text{ soit} \\ p(A) &= 1 - p(\bar{A}) = 1 - 0,51^n. \end{aligned}$$

On cherche bien la plus petite valeur de l'entier $n > 0$ pour laquelle :

$$1 - 0,51^n > 0,95.$$

Variables aléatoires

Exercice 1

On récapitule les gains selon le numéro de la face :

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow X = 3 \\ 2 &\rightarrow X = -6 \\ 3 &\rightarrow X = 3 \\ 4 &\rightarrow X = -12 \\ 5 &\rightarrow X = 3 \\ 6 &\rightarrow X = -18 \end{aligned}$$

Chaque face a une probabilité $\frac{1}{6}$.
 $P(X = -12)$: réalisé uniquement par la face 4
 $\rightarrow P(X = -12) = \frac{1}{6}$.

$P(X = 3)$: réalisé par les faces 1, 3 et 5 $\rightarrow P(X = 3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

$P(X = -6)$: réalisé uniquement par la face 2 $\rightarrow P(X = -6) = \frac{1}{6}$.

$P(X \geq 3)$: la seule valeur ≥ 3 est 3 $\rightarrow P(X \geq 3) = P(X = 3) = \frac{1}{2}$.

Exercice 2

Étape 1. Les quatre valeurs possibles pour X sont $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$ et $x_4 = 10$.

Étape 2. Les 10 boules ont toutes la même probabilité de sortie. **Dans cette situation d'équiprobabilité, on utilise la formule :**

$$\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Une boule porte le numéro 10, donc $p(X = 10) = \frac{1}{10}$.
De même $p(X = 5) = \frac{2}{10}$ et $p(X = 2) = \frac{3}{10}$.
Il reste quatre boules portant le numéro 1, donc $p(X = 1) = \frac{4}{10}$.

Étape 3. On dresse le tableau résumant la loi de X :

x_i	1	2	5	10
$p(X = x_i)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

Vérification : on a bien

$$\frac{4}{10} + \frac{3}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{10}{10} = 1.$$

Espérance, variance, écart-type

Exercice 1

Loi de probabilité de X

On lance un dé :

Faces impaires : 1, 3, 5 $\rightarrow$

on **perd 4 €**, donc $X = -4$.

$$P(X = -4) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Faces paires :

$2 \rightarrow$ gain $3 \times 2 = 6 \rightarrow X = 6$,

probabilité $\frac{1}{6}$

$4 \rightarrow$ gain $3 \times 4 = 12 \rightarrow X = 12$,

probabilité $\frac{1}{6}$

$6 \rightarrow$ gain $3 \times 6 = 18 \rightarrow X = 18$,

probabilité $\frac{1}{6}$

Tableau :

x_i	-4	6	12	18
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Espérance $E(X)$

$$E(X) = \frac{1}{2} \times (-4) + \frac{1}{6} \times 6 + \frac{1}{6} \times 12 + \frac{1}{6} \times 18$$

$$E(X) = -2 + 1 + 2 + 3 = 4$$

$$\boxed{E(X) = 4}$$

Variance $V(X)$

On calcule d'abord $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \frac{1}{2} \times (-4)^2 + \frac{1}{6} \times 6^2 + \frac{1}{6} \times 12^2 + \frac{1}{6} \times 18^2$$

$$E(X^2) = \frac{1}{2} \times 16 + \frac{1}{6} \times 36 + \frac{1}{6} \times 144 + \frac{1}{6} \times 324$$

$$E(X^2) = 8 + 6 + 24 + 54 = 92$$

Donc :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= 92 - 4^2$$

$$= 92 - 16 = 76$$

$$\boxed{V(X) = 76}$$

Écart-type $\sigma(X)$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{76}$$

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{76} \approx 8,72}$$

Exercice 2

1. Loi de probabilité de X

Nombres de 1 à 20 : 20 billes $\rightarrow$ gain 4 €

$$P(X = 4) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

Nombres de 21 à 45 : 25 billes

$\rightarrow$ gain 2 €

$$P(X = 2) = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}$$

Nombres de 46 à 60 : 15 billes

$\rightarrow$ gain -1 €

$$P(X = -1) = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$$

Tableau de la loi de probabilité :

x_i	4	2	-1
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$

On vérifie :

$$\frac{1}{3} + \frac{5}{12} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{5}{12} + \frac{3}{12} = \frac{12}{12} = 1.$$

2. Espérance de X

$$E(X) = \frac{1}{3} \times 4 + \frac{5}{12} \times 2 + \frac{1}{4} \times (-1)$$

$$E(X) = \frac{4}{3} + \frac{10}{12} - \frac{1}{4} = \frac{4}{3} + \frac{5}{6} - \frac{1}{4}$$

$$E(X) = \frac{16}{12} + \frac{10}{12} - \frac{3}{12} = \frac{23}{12}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{23}{12} \approx 1,92}$$

3. Variance et écart-type de X

On calcule d'abord $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \frac{1}{3} \times 4^2 + \frac{5}{12} \times 2^2 + \frac{1}{4} \times (-1)^2$$

$$E(X^2) = \frac{1}{3} \times 16 + \frac{5}{12} \times 4 + \frac{1}{4} \times 1$$

$$= \frac{16}{3} + \frac{20}{12} + \frac{1}{4}$$

$$E(X^2) = \frac{16}{3} + \frac{5}{3} + \frac{1}{4} = \frac{21}{3} + \frac{1}{4}$$

$$= 7 + \frac{1}{4} = \frac{29}{4}$$

Variance :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{29}{4} - \left(\frac{23}{12}\right)^2 = \frac{29}{4} - \frac{529}{144}$$

$$= \frac{1044}{144} - \frac{529}{144} = \frac{515}{144}$$

$$\boxed{V(X) = \frac{515}{144} \approx 3,57}$$

Écart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{515}{144}}$$

$$= \frac{\sqrt{515}}{12}$$

$$\boxed{\sigma(X) = \frac{\sqrt{515}}{12} \approx 1,89}$$

LES FICHES MAGIQUES

La collection de référence pour te réconcilier avec les maths et tout comprendre !

Tu veux t'en sortir en maths sans te prendre la tête ?
Ce cahier est fait pour toi.

En 40 fiches simples et directes, tu retrouves tout ce qu'il faut savoir pour l'année, avec des rappels clairs et des exercices pour t'entraîner pas à pas. Idéal pour réviser à ton rythme, comprendre ce qui bloque, et garder confiance.

Que ce soit pour suivre en classe ou préparer les contrôles, ce cahier t'accompagne toute l'année.

- ✓ 40 fiches colorées et simples à comprendre
- ✓ des exercices corrigés pour t'entraîner
- ✓ les astuces et pièges à éviter