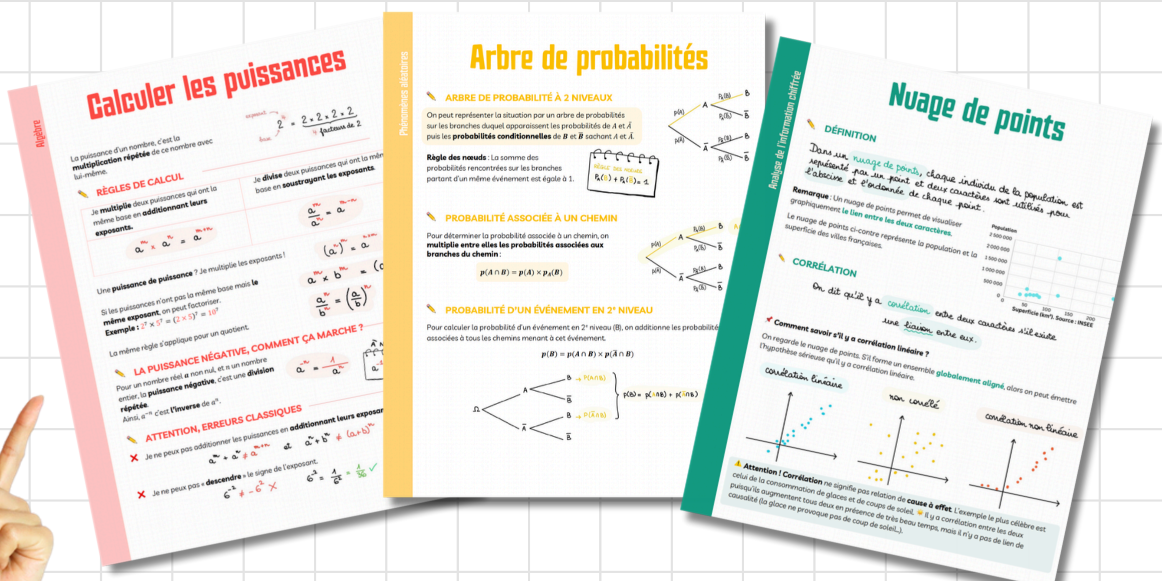
Hong My

LES FICHES MAGIQUES 1re

maths voie techno

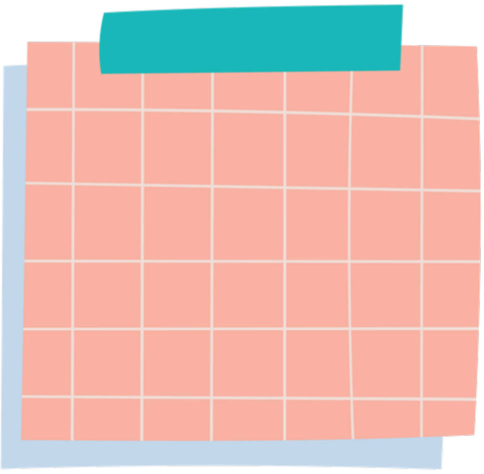
ENSEIGNEMENT COMMUN : STMG, STI2D, ST2S, STL, STD2A

40 fiches visuelles claires et illustrées
méthodes pas-à-pas
exercices d'application avec corrigés



CAMPUS XYZ

Ce cahier appartient à



37 avenue Foch, 75116 Paris
Dépôt légal : février 2026

Sommaire

Algèbre

Analyse

Probabilités et statistiques

Comment utiliser ?

Parcours Relax

Réviser régulièrement pendant l'année.
Objectif : **1 séance par semaine**.

Parcours Régulier

Pour se remettre dans le bain avant les contrôles.
Objectif : **1 séance avant chaque devoir surveillé.**

Parcours Intense

Tu as tout oublié ? Pas de panique, revois tout le programme en 2 semaines.
Objectif : **2 séances par jour pendant deux semaines**.

Algèbre

Algèbre

Calculer les puissances

La puissance d'un nombre, c'est la **multiplication répétée** de ce nombre avec lui-même.

$$\underset{\text{base}}{2}^{\overset{\text{exposant}}{4}} = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{4 \text{ facteurs de } 2}$$

RÈGLES DE CALCUL

Je **multiplie** deux puissances qui ont la même base en **additionnant leurs exposants.**	Je **divise** deux puissances qui ont la même base en **soustrayant les exposants**.
$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Une **puissance de puissance** ? Je multiplie les exposants !

$$(a^n)^m = a^{n \times m}$$

Si les puissances n'ont pas la même base mais **le même exposant**, on peut factoriser.
Exemple : $2^7 \times 5^7 = (2 \times 5)^7 = 10^7$

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

La même règle s'applique pour un quotient.

LA PUISSANCE NÉGATIVE, COMMENT ÇA MARCHE ?

Pour un nombre réel $\boldsymbol{a}$ non nul, et n un nombre entier, la **puissance négative**, c'est une **division répétée**.
Ainsi, a^{-n} c'est **l'inverse** de a^n.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

À NOTER

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

ATTENTION, ERREURS CLASSIQUES

❌ Je ne peux pas additionner les puissances en **additionnant leurs exposants**.

$$a^m + a^n \neq a^{m+n} \quad \text{et} \quad a^n + b^n \neq (a+b)^n$$

❌ Je ne peux pas « **descendre** » le signe de l'exposant.

$$6^{-2} \neq -6^2 \times \qquad 6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36} \checkmark$$

Exercices

1. Entourer l'intrus de chaque ensemble.

$3{,}5 \times 10^4$; $35\,000$; $\dfrac{35}{10^{-3}}$; $0{,}035 \times 10^{-2}$

$(-4)^3$; 4^3 ; $\dfrac{-4^5 \times 4^6}{(4^2)^4}$; $\dfrac{4^{-8}}{(-4)^{-11}}$

$(2 \times 3)^{-1}$; $\dfrac{6^{10}}{6^7 \times 6^4}$; 6 ; $6^5 \times \dfrac{6^{-4}}{6^2}$

2. Simplifier les écritures suivantes, si possible. x et y sont des réels non nuls.

a. $5x^2 + x^2 - (2x)^2 =$

b. $(5x)^2 - 5x + 5y =$

c. $(2xy)^2 - 5x + 5y =$

d. $x^4 + 3x^2 + \frac{x^2}{2} - 2x(3x^2 \times x) =$

e. $(x^3y)^2 - y^2(x^4) =$

3. Simplifier les écritures suivantes, si possible. a et b sont des réels non nuls.

a. $a^{-1} \times (ab)^2 =$

b. $(a^2 \times ab)^3 =$

c. $(a^{-3} \times ab)^3 =$

d. $\frac{a^3 \times b^{-2}}{(ab^2)^{-1}} \times (\frac{b^{-1}}{a})^2 =$

e. $\frac{a}{b^2} \times \frac{b^3}{a^{-1}} =$

Calculer les racines

La racine carrée de n, notée $\sqrt{n}$
est le nombre positif qui a pour carré n.

Exemple : $\sqrt{9}$ est le nombre positif qui a pour carré 9.
Donc $\sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 3 \times 3 = 9$

Si a est un nombre réel alors $\sqrt{a^2} = |a|$

Exemple : $\sqrt{(-8)^2} = |-8| = 8$ ✅

✏️ CALCULER LES RACINES CARRÉES

Soit a et b deux réels positifs. Je peux **multiplier** deux racines en mettant **sous le même signe.**

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Exemple : $\sqrt{50} \times \sqrt{3} = \sqrt{50 \times 3} = \sqrt{150}$ ✅

Je peux simplifier un **quotient**.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Exemple : $\sqrt{\frac{100}{4}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{4}} = \frac{10}{2} = 5$ ✅

Attention !

❌ **Impossible** de simplifier les additions de racines	✅ Je peux seulement effectuer l'addition **à l'intérieur du signe**
$\sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{2+3}$	$\sqrt{2+3} = \sqrt{5}$

✏️ METTRE SOUS FORME $a\sqrt{b}$

La forme préconisée pour les racines carrées est de type $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers, b étant le plus petit possible.

Exemple : $\sqrt{8} = \sqrt{2 \times 4} = \sqrt{2} \times \sqrt{4} = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$ ✅

Exercices

1. Relier les expressions égales.

$\sqrt{36}$	$5\sqrt{16}$	$\sqrt{50}$	$2\sqrt{18}$	9
$6\sqrt{2}$	6	20	$5\sqrt{2}$	$\sqrt{81}$

2. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

$$\frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{3a^2}} =$$

$$\sqrt{81a^2} \times \sqrt{a} =$$

$$\sqrt{\frac{25a}{a^3}} =$$

$$\frac{\sqrt{144a^2}}{6a} \times \sqrt{a^4} =$$

3. Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, où a est une fraction irréductible et b un entier naturel, sans calculatrice.

$$\frac{\sqrt{105} \times \sqrt{51}}{3\sqrt{34}} =$$

$$\frac{3\sqrt{297} \times 2\sqrt{616}}{\sqrt{44} \times \sqrt{396}} =$$

$$\sqrt{\frac{98}{27}} \times \frac{3\sqrt{72}}{\sqrt{28}} =$$

Calculer les fractions

CALCULER AVEC DES FRACTIONS

Pour **additionner** ou **soustraire**, il faut penser à trouver le **dénominateur commun**.

Si un dénominateur est un multiple de l'autre :	Sinon, j'utilise la méthode du "**papillon**"
$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2\times2}{3\times2} + \frac{1}{6}$ ② je multiplie par 2 pour obtenir 6 au dénominateur ① je remarque que 6 c'est 3x2 $= \frac{4}{6} + \frac{1}{6}$ ③ j'obtiens deux fractions de même dénominateur $= \frac{4+1}{6} = \frac{5}{6}$ ✓	1 2 $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2\times6 + 1\times3}{3\times6}$ $= \frac{12+3}{18} = \frac{15}{18}$ $= \frac{5\times\cancel{3}}{6\times\cancel{3}} = \frac{5}{6}$ ✓

Pour **multiplier** ou **diviser :**

Je multiplie les **numérateurs entre eux**, puis les **dénominateurs entre eux**.	Diviser par une fraction, c'est simplement **multiplier son inverse.**
$\frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$	$\frac{3}{4} \div \frac{2}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{2} = \frac{3\times7}{4\times2} = \frac{21}{8}$

DES FRACTIONS DE FRACTIONS, AU SECOURS

Pas de panique, il suffit de **transformer la grande barre de fraction en un signe de division**. Diviser par une fraction, c'est multiplier son inverse. Et voilà !

multiplier l'inverse

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \ ✓$$

BIEN PENSER AUX PRIORITÉS

Dans un calcul avec plusieurs opérations, **la multiplication et la division ont la priorité** sur l'addition et la soustraction.

$$\frac{5}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{5}{2} + \frac{2}{10} = \frac{25}{10} + \frac{2}{10} = \frac{27}{10} \ ✓$$

priorité

Exercices

1. Entourer les expressions égales à l'écriture de gauche.

$\dfrac{x^2+1}{x}$	$x+1$	$x+\dfrac{1}{x}$	$2x+1$
$\dfrac{3x}{x+6}$	$\dfrac{x}{x+2}$	$3+\dfrac{x}{2}$	$\dfrac{x}{\frac{x}{3}+2}$
$5-\dfrac{x+1}{3-x}$	$\dfrac{-6x+14}{3-x}$	$\dfrac{16-6x}{3-x}$	$\dfrac{4x-16}{3-x}$

2. Calculer les nombres suivants en fournissant le résultat sous la forme d'une fraction simplifiée.

$$A=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}=$$

$$B=\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\times\frac{5}{2}=$$

$$C=\frac{\frac{3}{4}-\frac{5}{3}}{\frac{3}{4}+\frac{5}{3}}=$$

$$D=\frac{\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}-\frac{5}{4}}=$$

3. Écrire les expressions suivantes sous forme d'un seul quotient.

$$A(x)=\frac{x+3}{x}-\frac{x+1}{x+2}=$$

$$B(x)=\frac{1}{x}-\frac{1+x}{x}+1=$$

$$C(x)=x-2-\frac{x-4}{x+2}=$$

Calcul littéral

DÉVELOPPER UNE EXPRESSION

Pour **développer une expression** dans un calcul littéral, on utilise la **distributivité** de la multiplication sur l'addition.

$$k(a+b) = ka + kb$$

On parle de double-distributivité dans le cas suivant :

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

FACTORISER UNE EXPRESSION

Pour **factoriser une expression** dans un calcul littéral :

$$3x + 12x^2 = \ ?$$

1. J'**identifie** le facteur commun.

$$3x \times 1 + 3x \times 4x$$

2. J'**isole** le facteur commun et fais apparaître les parenthèses.

$$3x(\quad + \quad)$$

3. Je **remplis la parenthèse** avec la somme de telle sorte à retrouver chaque terme initial.

$$3x(1 + 4x) \ ✓$$

IDENTITÉS REMARQUABLES

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Dans le sens $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, on dit qu'on développe.

Dans le sens $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ on dit qu'on factorise.

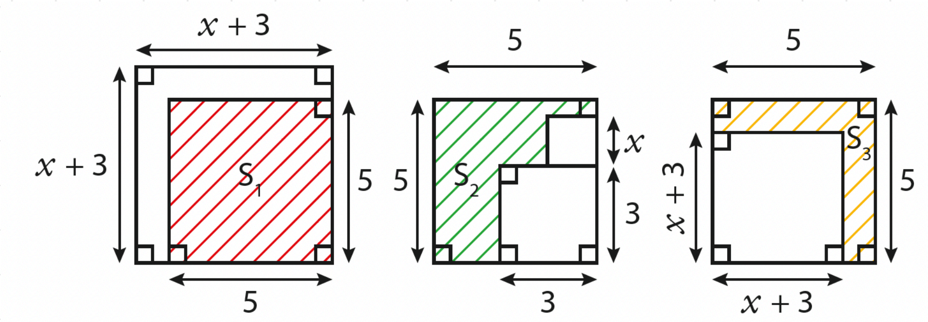
Exemple :

❌ $(a+3)^2 \neq a^2 + 9$

✅ $(a+3)^2 = a^2 + 6a + 9$

Exercices

1. Laquelle de ces surfaces hachurées a pour aire $25 - (x + 3)^2$?



2. Développer et simplifier les expressions suivantes.

$A = (x + 1)(x - 3) - 5(x - 2) =$

$B = (3x - 5)^2 =$

$C = (10x - 7)(10x + 7) =$

$D = (8x + 5)^2 =$

$E = (6x - 2)^2 - (2x + 5)^2 =$

3. Factoriser les expressions suivantes

$A = 14x - 35 =$

$B = 20a + 10 =$

$C = 12x^2 + 6x =$

$D = 2(x - 2) + x(x - 2) =$

$E = (2x - 1)(x + 3) - 2x + 1 =$

4. Relier chaque expression à sa forme factorisée.

$(-2x+1)(2x+1) + (-2x+1)(x+4)$ •	• $(-2x+1)^2$
$x^2 - 4x + 4$ •	• $(x-2)^2$
$36x^2 + 36x + 9$ •	• $(5x+8)(5x-8)$
$4x^2 - 4x + 1$ •	• $(6x+3)^2$
$25x^2 - 64$ •	• $(3x+5)(-2x+1)$

Équations et inéquations

RÉSOUDRE UNE ÉQUATION PRODUIT NUL

L'équation produit $A \times B = 0$ est équivalent à $A = 0$ ou $B = 0$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x(x-1) = 0$

$$2x(x-1) = 0 \iff 2x = 0 \; ou \; (x-1) = 0$$
$$\iff x = 0 \quad ou \; x = 1 \; ✅$$

On note l'ensemble des solutions $S = \{0; 1\}$.

RÉSOUDRE UNE ÉQUATION QUOTIENT

L'équation quotient $\frac{A}{B} = 0$ est équivalente à $A = 0$ et $B \neq 0$.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\frac{x-3}{2x+6} = 0$.

$x - 3 = 0 \; et \; 2x + 6 \neq 0$

$\iff x = 3 \; et \; x \neq -3$

$\iff x = 3$ ✅

On note l'ensemble des solutions $S = \{3\}$.

INÉQUATION PRODUIT

On étudie le signe de **chacun des facteurs** que l'on rassemble dans un tableau puis on applique la **règle des signes**.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(x+1)(2x-5) < 0$.

1. J'étudie le signe de $(x+1)$.

x		-1	
$x+1$	$-$	0	$+$

2. J'étudie le signe de $(2x-5)$.

x		$5/2$	
$2x-5$	$-$	0	$+$

3. Je rassemble dans un tableau et j'applique la règle des signes.

x		-1		$5/2$	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$2x-5$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+1)\times(2x-5)$	$+$	0	$-$	0	$+$

4. J'obtiens l'ensemble des solutions.

$S = \left]-1; \frac{5}{2}\right[$

Exercices

1. Entourer la (ou les) réponse(s) exacte(s).

- $2x(5-2x)=0$ a pour solution $\left\{2 ; \frac{5}{2}\right\}$ $\left\{0 ; \frac{5}{2}\right\}$ $\left\{0 ; \frac{2}{5}\right\}$
- $(3x-4)(x+5)=0$ a pour solution $\left\{\frac{4}{3} ; -5\right\}$ $\left\{-\frac{4}{3} ; -5\right\}$ $\left\{\frac{3}{4} ; -5\right\}$
- $\frac{3x+6}{x-7}=0$ existe si $x \neq 7$ / a pour solutions -2 et 7 / a pour solution -2
- $\frac{x-4}{x^2-1}=0$ existe si $x \neq -1$ et $x \neq 1$ / a pour solutions $4 ; -1$ et 1 / a pour solution 4

2. Résoudre les équations quotient suivantes.

$\frac{x-3}{x+4}=0 \Leftrightarrow$

$\frac{x-3}{2x+5}=1 \Leftrightarrow$

$\frac{1-3x}{x+2}=0 \Leftrightarrow$

$\frac{2}{3x+4}+\frac{1}{x-1}=0 \Leftrightarrow$

3. Compléter les tableaux de signes puis résoudre les inéquations.

$(2x+1)(x-3)<0$

$(x-5)(3x+1) \geq 0$

Étude du signe de $ax + b$

Avec $a \neq 0$

Étape 1.
Trouver la valeur où l'expression s'annule
On résout $ax + b = 0$:

$$ax + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{a}$$

$f(x) = 3x + 5$

$3x + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{5}{3}$

Étape 2.
Placer cette valeur sur une droite graduée
Elle sépare la droite réelle en deux intervalles.

x	$-\frac{5}{3}$

c'est un début de tableau de signes

Étape 3.
Étudier le signe selon le signe de a.

- si $a > 0$:
  - $ax + b < 0$ pour $x < -\frac{b}{a}$
  - $ax + b > 0$ pour $x > -\frac{b}{a}$
- si $a < 0$:
  - $ax + b > 0$ pour $x < -\frac{b}{a}$
  - $ax + b < 0$ pour $x > -\frac{b}{a}$

ici $a = 3 > 0$

- $3x + 5 < 0$ pour $x < -\frac{5}{3}$
- $3x + 5 > 0$ pour $x > -\frac{5}{3}$

Étape 4.
Compléter le tableau de signes

- négatif d'un côté,
- 0 au point $x = -\frac{b}{a}$,
- positif de l'autre côté (ou l'inverse si $a < 0$).

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x+5$		$-$	0	$+$	

👉 **Astuce** : le signe de $ax + b$ suit toujours celui de a quand x est grand.

Exercices

1. **On considère l'expression $-2x + 5$ dans $\mathbb{R}$, dresser son tableau de signe.**

x	
$-2x+5$	

2. **On considère l'expression $3x - 5$ dans $\mathbb{R}$, dresser son tableau de signe.**

x	
$3x-6$	

3. **Relier les expressions données avec l'un ou l'autre des deux tableaux de signes.**

$3x - 4$

$-2x - 1$

$-7x + 8$

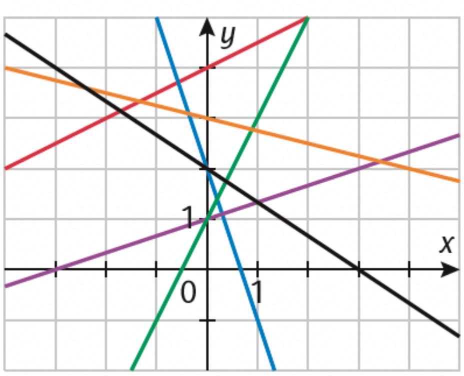
$2 - 3x$

$-1 + x$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		α		$+\infty$
		$+$	0	$-$	

4. **Quelles sont les courbes correspondant au tableau de signes ci-dessous ?**



x	$-\infty$		α		$+\infty$
		$+$	0	$-$	

Étude du signe de $a(x - x_1)(x - x_2)$

Avec $a \neq 0$ et $x_1 \neq x_2$.

Étape 1.
Trouver la valeur où l'expression s'annule
On repère les zéros de chaque facteur :

$$x - x_1 = 0 \Leftrightarrow x = x_1$$
$$x - x_2 = 0 \Leftrightarrow x = x_2$$

👉 Les racines sont donc x_1 et x_2.

$g(x) = -2(x-1)(x+3)$

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
$x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

Étape 2.
Les placer cette valeur sur une droite graduée
On suppose (quitte à les réordonner) : $x_1 < x_2$
La droite réelle est découpée en **trois intervalles**.

je réordonne

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$

Étape 3.
Étudier le signe selon le signe de chaque facteur.
$x - x_1$:
- négatif si $x < x_1$
- positif si $x > x_1$

$x - x_2$:
- négatif si $x < x_2$
- positif si $x > x_2$

a : garde **toujours le même signe**

- $-2 < 0$
- $x - 1 > 0$ si $x > 1$
- $x + 3 > 0$ si $x > -3$

Étape 4.
Compléter le tableau de signes
On multiplie les signes des trois facteurs.
L'expression est **nulle** pour : $x = x_1$ et $x = x_2$
- **Cas 1 :** $a > 0$
  - positif à l'extérieur des racines
  - négatif entre les deux racines
- **Cas 2 :** $a < 0$
  - négatif à l'extérieur des racines
  - positif entre les deux racines

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

📌**Astuces** :
Le signe **à droite** (quand x est très grand) est **toujours celui de** a.
Entre deux racines, le signe **change à chaque racine simple**.

Exercices

1. On considère l'expression $A(x) = 3(x+5)(x-4)$ dans $\mathbb{R}$, dresser son tableau de signes.

x	-5	4
3		
$x+5$		
$x-4$		
$A(x)$		

2. On considère l'expression $B(x) = -2(x+2)(x-1)$ dans $\mathbb{R}$, dresser son tableau de signes.

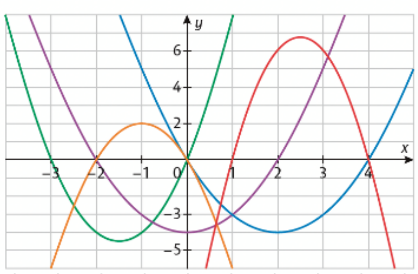
x	
-2	
$x+2$	
$x-1$	
$B(x)$	

3. Vrai / Faux. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2(x-2)(x+4)$

a. $g(x) < 0$ pour tout réel x. ☐ Vrai ☐ Faux
b. $g(x)$ est d'abord négative, puis positive. ☐ Vrai ☐ Faux
c. $g(x) \geq 0$ si $x \in [-4\,;2]$. ☐ Vrai ☐ Faux
d. $g(x)$ change deux fois de signe. ☐ Vrai ☐ Faux
e. $g(x) \geq 0$ si $x \in]-\infty\,;-4] \cup [2\,;+\infty[$. ☐ Vrai ☐ Faux

4. Quelles sont les courbes correspondant au tableau de signes ci-dessous ?

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	



C'est quoi, une suite ?

NOTION DE SUITE

Une **suite** est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ ou sur une partie de $\mathbb{N}$. L'image d'un entier n par la fonction u est notée u_n ou $u(n)$. On distingue les notations :

n est l'indice

u_n

le terme d'indice n

(u_n)

notation de la suite

ERREURS FRÉQUENTES

u_{n+1} : terme d'indice $n+1$

u_n+1 : terme d'indice n auquel on ajoute 1

Attention : le premier terme n'est pas forcément u_0 : il peut être u_1, u_3, etc ...

- Si le premier terme est $\boldsymbol{u_0}$ alors u_n est le **(n+1)ᵉ** terme de la suite.
- Si le premier terme est $\boldsymbol{u_1}$ alors u_n est le **nᵉ** terme de la suite.

COMMENT DÉFINIR UNE SUITE

Une suite peut être définie par :

- une formule **explicite** de type $u_n = f(n)$ une expression en n

  Pour calculer les premiers termes, il suffit de remplacer n par le rang.

  Exemple : Calculer u_3 de la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{1+n^2}$.

  $u_3 = \sqrt{1+3^2} = \sqrt{10}$ ✅

- un **premier terme connu** et une **relation de récurrence** de type $u_{n+1} = f(u_n)$

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$$

une expression avec u_n

Exemple : Calculer u_3 de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2 - u_n \end{cases}$

On part du premier terme donné, et on calcule de proche en proche les valeurs :

Pour $n = 0$: $u_1 = 2 - u_0 = 2 - 3 = \mathbf{-1}$

Pour $n = 1$: $u_2 = 2 - \boldsymbol{u_1} = 2 - (-1) = \mathbf{3}$ (on reprend la valeur $\boldsymbol{u_1}$ plus haut)

Pour $n = 2$: $\boldsymbol{u_3} = 2 - \boldsymbol{u_2} = 2 - \mathbf{3} = \mathbf{-1}$ ✅ (on reprend la valeur $\boldsymbol{u_2}$ plus haut)

Exercices

1. Relier chaque suite à la valeur de son deuxième terme.

$n \in \mathbb{N}$	$n \in \mathbb{N}$	$n \in \mathbb{N}^*$	$n \in \mathbb{N}$	$n \in \mathbb{N}$	$n \in \mathbb{N}^*$
$u_n = n+1$	$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$	$u_n = \dfrac{2n+4}{n}$	$u_n = n$	$u_{n+1} = (u_n)^2$	$u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

$u_1 = 1$	$u_1 = 2$	$u_2 = 2$	$u_1 = 3$	$u_1 = 4$	$u_2 = 4$

2. Suite définie par une formule explicite.

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^2 + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Donner la valeur des trois premiers termes de la suite (u_n).

b. Donner l'expression de u_{n+1} et $u_n + 1$ en fonction de n.

3. Suite définie par récurrence. Donner la valeur des trois premiers termes.

a. Soit (v_n) la suite définie par $\begin{cases} v_0 = 7 \\ v_{n+1} - v_n = 3 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

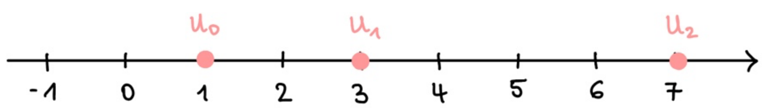
b. Soit (w_n) la suite définie par $\begin{cases} w_1 = -3 \\ \dfrac{w_{n+1}}{w_n} = -2 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Représentation graphique

Pour représenter une suite, on peut utiliser une **droite graduée** ou un **repère**.

✏️ SUR UNE DROITE GRADUÉE

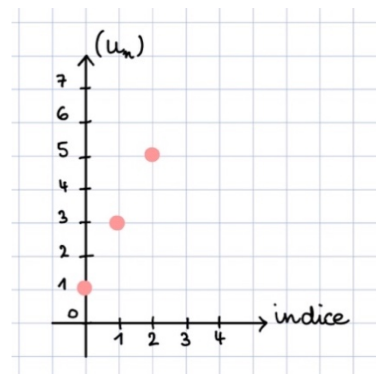
On place les abscisses $u_0; u_1; u_2;$ ….



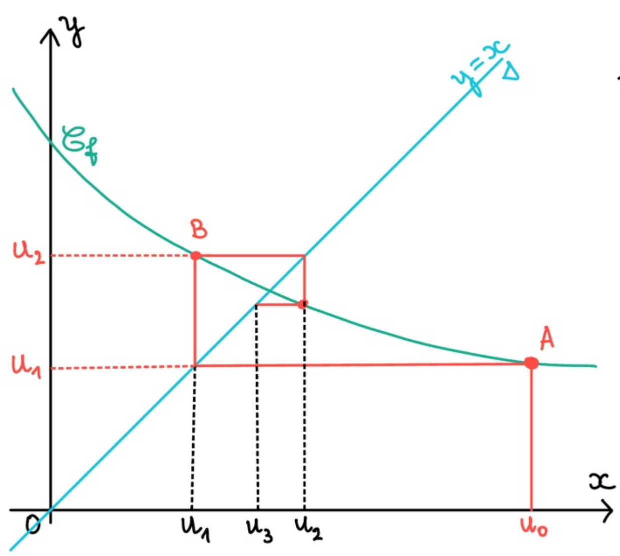
✏️ DANS UN REPÈRE

- Pour une formule **explicite** de type $u_n = f(n)$, on place les points de coordonnées $(n; u_n)$.

On représente ci-contre la suite (u_n) définie par $u_n = 2n + 1$.



- Pour une suite définie par un **premier terme connu** et une **relation de récurrence** de type $u_{n+1} = f(u_n)$, on place de proche en proche les valeurs. On représente la droite Δ d'équation $y = x$. Et la courbe C_f qui représente f.



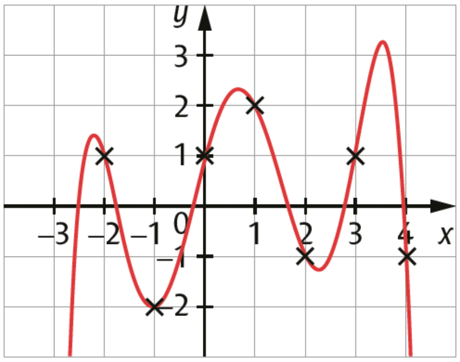
1. On commence avec $(u_0; 0)$

2. $u_1 = f(u_0)$: on reporte l'ordonnée du point A sur l'axe des abscisses : on retrouve $u_1 = f(0)$ sur l'axe horizontal.

3. L'ordonnée du point B est la valeur de u_2, que je trouve sur l'axe horizontal avec la symétrie par rapport à la droite Δ.

Exercices

1. On considère une fonction f représentée ci-contre.



a. Soit (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$.

Déterminer :

$u_0 =$ ______________ $u_1 =$ ______________

b. Soit (v) la suite définie par $v_0 = -2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$.

Déterminer :

$v_1 =$ ______________ $v_2 =$ ______________

2. Représenter graphiquement une suite.

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Représenter les 3 premiers termes de la suite:

a. Sur une droite graduée :

b. dans un repère :

3. Représenter graphiquement les 3 premiers termes de la suite.

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n + 1$.

Suites arithmétiques

✏️ DÉFINITION

Une **suite arithmétique** est une suite dont chaque terme s'obtient en **ajoutant** au terme précédent un même nombre réel, appelé la **raison**.

Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel $\boldsymbol{r}$ tel que tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + r$$

c'est une relation de récurrence

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, la formule **explicite** est donnée par :

Si le premier terme est u_0

$$u_n = u_0 + n \times r$$

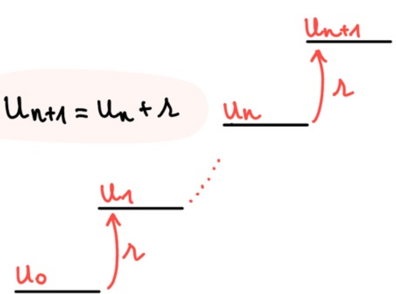
Si le premier terme est u_p

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

📌**Méthode** : Pour calculer le terme de rang $\boldsymbol{n}$, on remplace $\boldsymbol{n}$ par le nombre.
Soit la suite arithmétique définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 3$. Calculer u_5.
On lit par l'expression que $r = 3$ *et* $u_0 = 2$. On obtient :
$u_5 = u_0 + 5 \times r = 2 + 5 \times 3 = \mathbf{17}$ ✅

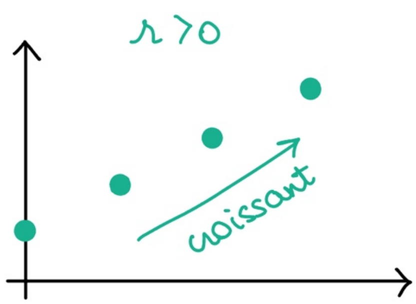
Une suite arithmétique *c'est comme un escalier.*

$$u_{n+1} = u_n + r$$

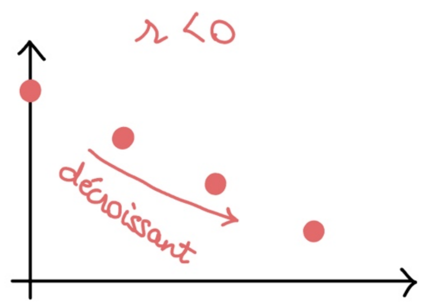


✏️ SENS DE VARIATION

La suite (u_n)est strictement **croissante** $\Leftrightarrow r > 0$



La suite (u_n)est strictement **décroissante** $\Leftrightarrow r < 0$



Exercices

1. Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ?

a. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n - u_{n+1} = \frac{2}{3}$ ☐ Oui ☐ Non
b. (u_n) telle que $u_3 < u_4$ et $u_5 < u_4$ ☐ Oui ☐ Non
c. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + 2n$ ☐ Oui ☐ Non
d. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = u_n - \sqrt{3}$ ☐ Oui ☐ Non
e. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (n+7)^2 - (n-3)^2$ ☐ Oui ☐ Non

2. Placer les suites suivantes selon leurs sens de variation.

$u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$	(u_n) de raison $2-\sqrt{2}$	$u_{n+1} - u_n = -3$	$u_n = u_{n+1} + 3$	(u_n) de raison 10^{-2}	$u_0 = -100$ et $r = 1$

DÉCROISSANT

CROISSANT

3. Déterminer le premier terme u_0 et la raison des suites suivantes.

Cas 1 : $u_4 = 12$ *et* $u_9 = -8$

Cas 2 : $u_{27} = 7$ *et* $u_{10} = \frac{15}{7}$

Suites géométriques

✏️ DÉFINITION

Une **suite géométrique** est une suite dont chaque terme s'obtient en **multipliant** au terme précédent un même nombre réel, appelé la **raison**.

Une suite (u_n) dont tous les termes sont non nuls est **géométrique** si et seulement s'il existe un réel **q** tel que tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, la formule **explicite** est donnée par :

Si le premier terme est u_0

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Si le premier terme est u_p

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

📌**Méthode** : Pour calculer le terme de rang $\boldsymbol{n}$, on remplace $\boldsymbol{n}$ par le nombre.

Soit la suite géométrique définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n$. Calculer u_5.
On lit par l'expression que $q = 2 \; et \; u_0 = 3$. On obtient :
$u_4 = u_0 \times q^4 = 3 \times 2^4 = \mathbf{48}$ ✅

✏️ SENS DE VARIATION

Le sens de variation dépend du signe et de la valeur de **q**. (u_n) est strictement :

$q > 1$		$0 < q < 1$	
$u_0 > 0$	$u_0 < 0$	$u_0 > 0$	$u_0 < 0$
croissante	décroissante	décroissante	croissante

Exercices

1. Les suites suivantes sont-elles géométriques ?

a. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n \times u_{n+1} = 5$ ☐ Oui ☐ Non
b. (u_n) telle que $u_1 < u_2$ et $u_4 < u_5$ ☐ Oui ☐ Non
c. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 2n^2 + 3$ ☐ Oui ☐ Non
d. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = \sqrt{3}u_n$ ☐ Oui ☐ Non
e. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 5 \times 3^n$ ☐ Oui ☐ Non

2. Associer chaque suite à sa raison géométrique.

15 25 1 $\frac{1}{6}$ $-\frac{1}{3}$ 3 2 $\frac{1}{5}$

	raison		raison
$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{6} \end{cases}$		$u_n = 5^{2n+1}$	
$u_n = 3^{n-1}$		$u_n = \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}$	
$u_n = 3^n \times 5^n$		$u_n = 3$	
$u_n = -3 \times 5^{-n}$		$u_n = 3 \times 2^n + 2^{n+1}$	

3. Les suites (u_n) suivantes sont géométriques de raison q.

a. On donne $u_1 = 5$ *et* $q = -3$. Calculer u_2 et u_{15}.

b. Calculer la raison de la suite telle que $u_5 = -20$ et $u_9 = -80$. Il peut y avoir plusieurs réponses possibles.

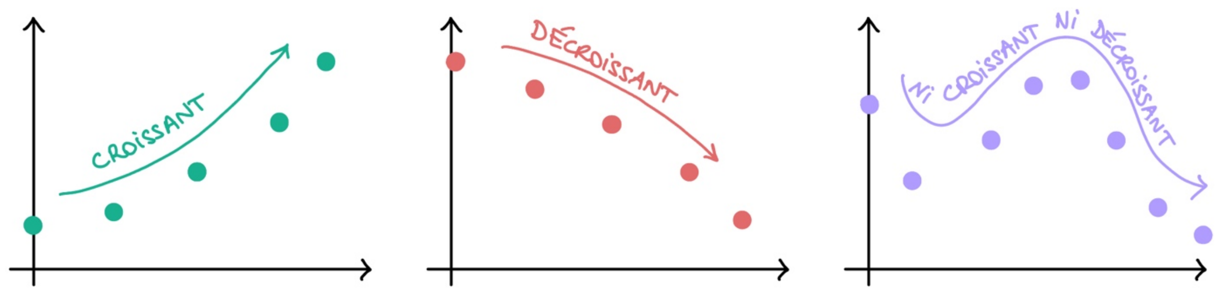
Variations d'une suite

Soit (u_n) une suite. Pour tout n :

- si $u_{n+1} - u_n > 0$, alors (u_n) est strictement **croissante**.
- si $u_{n+1} - u_n < 0$, alors (u_n) est strictement **décroissante**.

Remarque : une suite peut être croissante ou décroissante **à partir d'un certain rang**, et pas forcément sur l'ensemble de définition.

Vocabulaire : Une suite est **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante.
Attention ! Une suite peut être **ni croissante, ni décroissante** .



CAS SPÉCIAL

Soit (u_n) une suite dont tous les termes sont **strictement positifs**. Pour tout n, si

- **si** $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ **alors** (u_n) est strictement **croissante**.
- **si** $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ **alors** (u_n) est strictement **décroissante**.

Cette propriété est pratique pour étudier les **suites géométriques.**

MÉTHODE

Pour déterminer le sens de variation d'une suite :

1. On détermine si la suite est **arithmétique**, **géométrique**, ou ni **l'une ni l'autre**.
2. Si la suite est arithmétique on conclut selon le **signe de la raison**.
3. Si la suite est géométrique, on conclut à l'aide du **tableau** de la fiche précédente.
4. Sinon, on calcule $u_{n+1} - u_n$ et on conclut selon le signe.

Exercices

1. Vrai ou faux ?

a. Si pour tout n, $u_{n+1} \geq u_n$, alors la suite (u_n) est croissante. ☐ Vrai ☐ Faux

b. Une suite décroissante peut parfois augmenter pour certaines valeurs de n.
☐ Vrai ☐ Faux

c. Pour prouver qu'une suite définie explicitement est croissante, on peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$. ☐ Vrai ☐ Faux

d. Pour une suite géométrique (u_n) de raison $q > 1$, la suite est décroissante.
☐ Vrai ☐ Faux

e. Si $u_{n+1} = u_n$ pour tout n, la suite est constante et donc monotone.
☐ Vrai ☐ Faux

2. Déterminer le sens de variation des suites suivantes, définies pour $n \in \mathbb{N}$.

a. $u_n = (n-1)^2 - n^2$

b. $u_n = -5 \times (-2)^n$

c. $u_n = \frac{5}{3^n}$

d. $u_0 = -\frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{7}{2}$

Somme d'une suite

✏️ SUITE ARITHMÉTIQUE

Soit n un entier naturel non nul, alors :

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exemple : $1 + 2 + 3 + \cdots + 20 = \frac{20\times 21}{2} = 210$ ✅

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison **r**. Notons S_n la somme de tous les termes d'indice inférieur ou égal à n.

- si le premier terme est u_0 alors $\boldsymbol{S_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}}$
- si le premier terme est u_1 alors $\boldsymbol{S_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2}}$

De manière générale, la somme est donnée par la formule :

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

✏️ SUITE GÉOMÉTRIQUE

Soit n un entier naturel non nul. Si $q \neq 1$, alors :

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Exemple : $1 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^5 = \frac{1-2^6}{1-2} = 63$ ✅

Propriété

Soit (v_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Notons S_n la somme de tous les termes d'indice inférieur ou égal à n.

- si le premier terme est v_0 alors $\boldsymbol{S_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$
- si le premier terme est u_1 alors $\boldsymbol{S_n = v_1 \times \frac{1-q^{n}}{1-q}}$

De manière générale, la somme est donnée par la formule :

$$S = (\text{premier terme}) \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

Exercices

1. Calculer les sommes suivantes sans calculatrice.

$A = 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 =$

$B = 1 + 2 + 3 + \cdots + 50 =$

$C = 1 + 2 + 3 + \cdots + 100 =$

$D = 2 + 4 + 6 + \cdots + 100 =$

$E = 11 + 12 + \cdots + 20 =$

2. Relier chaque somme à sa valeur.

$1 + 2 + 3 + \ldots + 30$ •	• 465
$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{10}$ •	• 3280
$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2048$ •	• 4095
$60 + 61 + 62 + \ldots + 99 + 100$ •	• 88 573

3. Calculer les sommes suivantes.

a. Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = -2$.
Calculer la somme des 50 premiers termes.

b. Soit (v_n) la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = 3$.
Calculer la somme $S = v_4 + v_5 + v_6 + \cdots + v_{12}$.

Notes personnelles

mes réussites

points à travailler

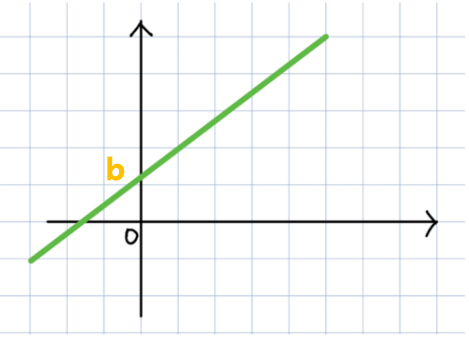
Analyse

Fonction affine

DÉFINITION

Soit a et b deux nombres donnés. La fonction f est affine si son expression est définie par

$$f(x) = ax + b$$



a est le **coefficient directeur** de la fonction affine et b est **l'ordonnée à l'origine**.

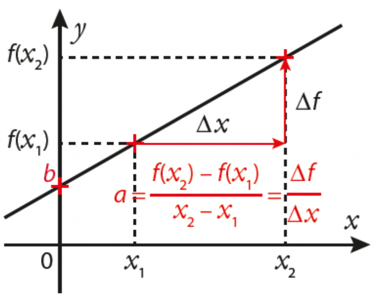
Exemples : $f(x) = 3x - 5$; $g(x) = -2x + 3$; $h(x) = 4x$
La courbe représentative d'une fonction affine est une **droite**.

👉 **Quelle différence avec une fonction linéaire ?** La **fonction linéaire est un cas particulier de la fonction affine**. Dans le cas linéaire, $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$, et l'expression $f(x) = ax + b$ devient alors $f(x) = ax$. On retrouve l'expression de la fonction linéaire !

ACCROISSEMENT D'UNE FONCTION AFFINE

Le taux d'accroissement de la fonction f entre les abscisses x_1 et x_2 est égal à $\boldsymbol{a}$:

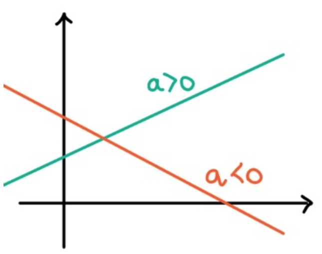
$$\boldsymbol{a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \ (avec\ x_1 \neq x_2)}$$



SENS DE VARIATION

Le **signe du coefficient** a donne le sens de variation de la fonction :

- si $\boldsymbol{a > 0}$, la fonction est **croissante** sur $\mathbb{R}$.
- si $\boldsymbol{a < 0}$, la fonction est **décroissante** sur $\mathbb{R}$.



DÉTERMINER UNE FONCTION AFFINE

Soit la fonction affine f telle que $f(2) = 5$ et $f(8) = 17$.

Déterminer l'expression de f.

1. On détermine a avec le taux d'accroissement

2. Pour déterminer b, on utilise une image.

$a = \frac{f(8) - f(2)}{8 - 2} = \frac{17 - 5}{8 - 2}$

$a = \frac{12}{6} = 2$

$f(2) = 2 \times a + b = 2 \times 2 + b = 5$
$\Leftrightarrow 4 + b = 5$
$\Leftrightarrow b = 1$

Exercices

1. Indiquer si les fonctions définies suivantes sont affines ou non.

a. $f(x) = -2x + 3$ ☐ affine ☐ non affine

b. $g(x) = x^2 + x + 3$ ☐ affine ☐ non affine

c. $h(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ ☐ affine ☐ non affine

d. $k(x) = -3x + \frac{1}{5}$ ☐ affine ☐ non affine

e. $m(x) = x^2 + 8x - x^2$ ☐ affine ☐ non affine

f. $n(x) = -\pi x + \sqrt{5}$ ☐ affine ☐ non affine

2. Déterminer l'expression algébrique des fonctions affines suivantes.

a. $f(-2) = -6$ et $f(4) = 3$. $f(x) =$

b. $g(2) = 12$ et $g(6) = 2$. $g(x) =$

c. $h(-1) = 5$ et $f(2) = 8$. $h(x) =$

d. k est une fonction affine dont la représentation graphique passe par les points $A(0; 4)$ et $B(2; 0)$.

$k(x) =$

3. Indiquer si les fonctions suivantes sont affines. Justifier.

a. $f(x) = (x + 4)^2 - x^2$

b. $g(x) = (x - 1)^2 - 6x^2$

4. Exercice 🌶️

Dans un repère, on considère les points $A(-1; -2)$, $B(2; 3)$, et $C(5; 8)$. Ces trois points $A, B\ et\ C$ appartiennent-ils à la représentation d'une fonction affine ?

Analyse

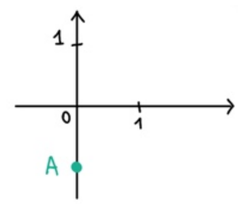
Représentation graphique d'une fonction affine

✏️ TRACER LA DROITE REPRÉSENTATIVE D'UNE FONCTION AFFINE

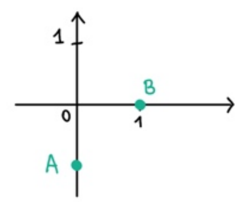
Traçons la droite représentative de la fonction $\boldsymbol{f(x) = x - 1}$.

1. On **choisit un premier point** en sélectionnant une valeur quelconque de x. Prenons 0 par simplicité. On calcule l'image de 0 par f.

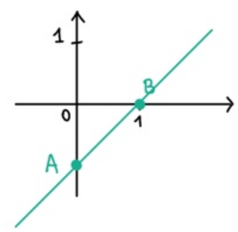
   $f(0) = -1$, **le point $A(0; -1)$ appartient à la droite**.



2. On **choisit un second point**. Par simplicité, on prend 1. $f(1) =$, **le point $B(1; 0)$ appartient à la droite**.



3. On **relie les points A et B** pour obtenir la droite.

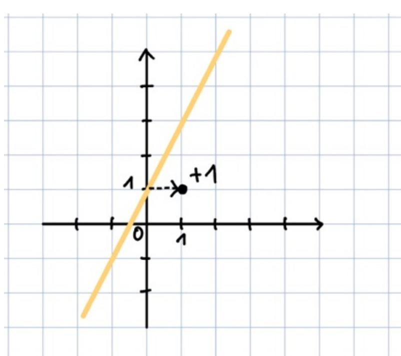


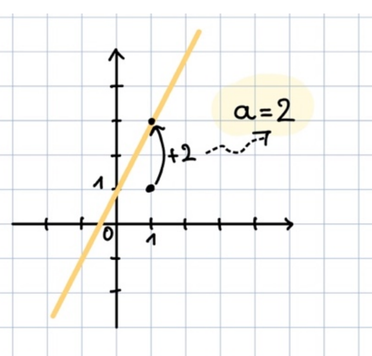
✏️ RECONNAÎTRE L'EXPRESSION À PARTIR DE LA COURBE

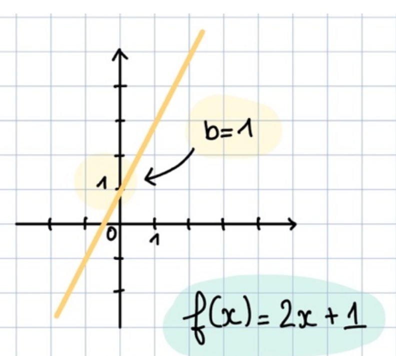
1. En partant d'un point quelconque de la droite, je décale vers la droite de 1.

2. Je compte le nombre de cases que je dois « monter » ou « descendre » pour rejoindre la courbe : j'obtiens **a**.

3. Je trouve **b** en lisant la valeur d'intersection entre l'axe des ordonnées et la courbe. J'obtiens l'expression !

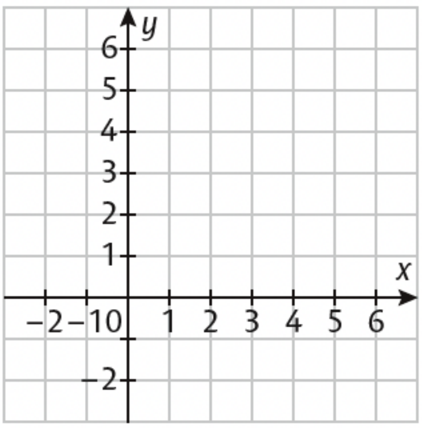




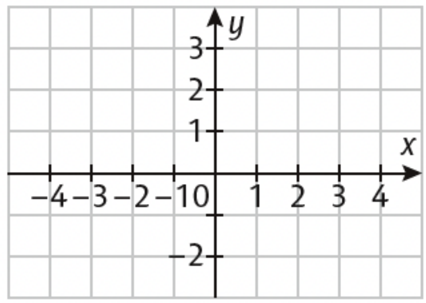


Exercices

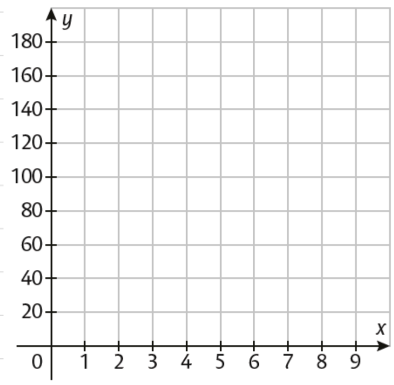
1. Représenter les fonctions affines ci-dessous.



$f(x) = -x + 5$



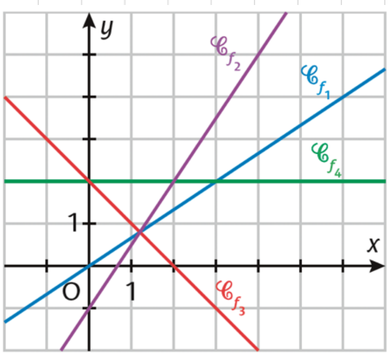
$g(x) = \dfrac{2}{3}x + 1$



$h(x) = 160 - 20x$

$m(x) = 20x + 40$

2. Donner les expressions des fonctions représentées dans le graphique.



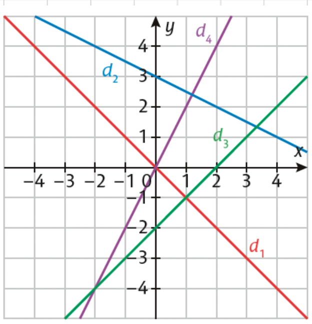
$f_1(x) =$

$f_2(x) =$

$f_3(x) =$

$f_4(x) =$

3. Relier chaque fonction à la droite qui la représente.



$f(x) = 3 - 0{,}5x$ | $g(x) = 2x$ | $h(x) = -x$ | $k(x) = x - 2$

d_1 | d_2 | d_3 | d_4

Polynôme de second degré

✏️ DÉFINITION

On appelle **fonction polynôme** du second degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

coefficient du terme du plus haut degré

coefficient constant

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

coefficient du terme de degré 1

Polynôme de second degré ou non ?

$f(x) = 2x^2 + 3\sqrt{x} + 2$	$f(x) = \sqrt{2}x^2 + 3x + 2$	$f(x) = x^3 + 3x^2 + x$	$f(x) = 5x^2 - 1$
❌ **Non** car il y a un terme en $\sqrt{x}$	✅ **Oui** car tous les coefficients sont réels. Ici $a = \sqrt{2}$.	❌ **Non** car il y a un terme en x^3	✅ **Oui** car tous les coefficients sont réels. Ici $b = 0$.

✏️ FORME CANONIQUE

Toute fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, peut s'écrire sous forme canonique :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \quad \text{où} \quad \alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha)$$

📌 Méthode : Comment mettre sous forme canonique $x^2 + 10x + 7$

1. On reconnaît dans $x^2 + 10x$ **le début d'une identité remarquable**.
2. Pour faire apparaître l'expression complète, on **introduit le terme** $+\mathbf{5^2 - 5^2}$ (on peut car il vaut 0)
3. Dans la dernière étape, on a regroupé les trois premiers termes dont la somme s'écrit sous **forme factorisée** $(x + 5)^2$
4. On ajoute les deux derniers termes entre eux.

$$x^2 + 10x = x^2 + 2 \times \underset{a}{x} \times \underset{b}{5}$$

$$x^2 + 10x + 7 = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 - 5^2 + 7$$

on fait apparaître b^2

$$= \underbrace{(x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2)}_{\text{identité remarquable}} - 25 + 7$$

je regroupe les 2 derniers termes

$$x^2 + 10x + 7 = (x + 5)^2 - 18$$

Exercices

1. Indiquer si les fonctions sont des polynômes de degré 2 ou non. Si oui, donner les valeurs de a, b et c.

	Oui/non	Coefficients a	b	c
a. $f(x) = 3x^2 + x - 1$				
b. $f(x) = x^3 - x^2 + 3$				
c. $f(x) = \pi x^2 - (1+\pi)x + \pi$				
d. $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$				
e. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x} - 3$				

2. Déterminer la forme canonique des fonctions suivantes.

a. $f(x) = x^2 + 4x + 9$

b. $f(x) = x^2 - 6x$

c. $f(x) = x^2 + 3x + 1$

d. $f(x) = x^2 - 6x - 16$

Équation du second degré

DISCRIMINANT

On appelle **discriminant** de la fonction $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ le réel

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

La forme canonique de f s'écrit alors :
$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\Delta}{4a}$$

À quoi sert le discriminant ?
À connaître le nombre de solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Graphiquement, résoudre $ax^2 + bx + c = 0$, c'est chercher les intersections de la courbe qui représente f et l'axe horizontal.

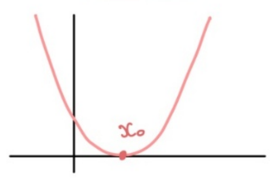
Si $\Delta < 0$

L'équation n'a pas de solution réelle.

Si $\Delta = 0$

L'équation a une seule solution

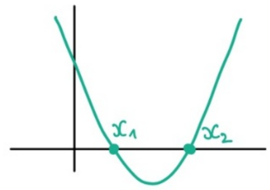
$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$



Si $\Delta > 0$

L'équation a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$



RACINES ET FACTORISATION

x_1 et x_2 sont appelées les racines de $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$. La fonction peut alors se factoriser selon la valeur de Δ.

- Si $\Delta < 0$, $f(x)$ ne s'écrit pas comme un produit de polynômes de degré 1.
- Si $\Delta = 0$, alors $\boldsymbol{f(x) = a(x - x_0)^2}$**.**
- Si $\Delta > 0$, alors $\boldsymbol{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$**.**

Somme et produit des racines

$$\text{Somme} = -\frac{b}{a} \qquad \text{Produit} = \frac{c}{a}$$

Exercices

1. Relier chaque fonction au produit et à la somme de ses racines.

SOMME		PRODUIT
$\frac{1}{6}$	$f(x) = 3x^2 - 6x + 1$	6
6	$g(x) = 6x^2 - 1 + 3$	3
2	$h(x) = x^2 - 6x + 3$	$\frac{1}{3}$
3	$k(x) = -x^2 + 3x - 6$	$\frac{1}{2}$

2. Résoudre les équations suivantes.

$2x^2 - 2x - 3 = 0$

$3x + 3x^2 = -1$

$8x^2 - 4x + 2 = \frac{3}{2}$

$-2(x-1)^2 - 3 = 0$

$(x+2)(3-2x) = 0$

Variations d'un trinôme

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b *et* c des réels et $a \neq 0$.

Les **variations** du trinôme dépendent du **signe de a.**

Si $a > 0$

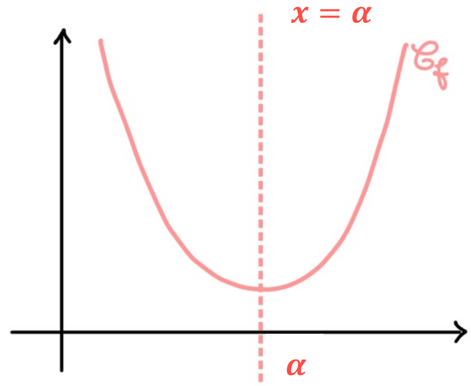
x	$-\infty$	$\alpha = -\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f	↘	$\beta = f(\alpha)$	↗

Si $a < 0$

x	$-\infty$	$\alpha = -\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f	↗	$\beta = f(\alpha)$	↘

Axe de symétrie

Dans un repère orthonormé, $\mathcal{C}_f$ a pour axe de symétrie la **droite d'équation** $\boldsymbol{x = \alpha}$.



Exemple

Dresser le tableau de variations de f définie par $f(x) = \mathbf{3}x^2 - 2x - 1$.

$a = 3 > 0$

$\alpha = -\frac{(-2)}{2 \times 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$f(\alpha) = f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$

x	$-\infty$	$\alpha = \frac{1}{3}$	$+\infty$
f	↘	$-\frac{2}{3}$	↗

Exercices

1. Cocher la bonne réponse.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 7$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a. $\mathcal{C}_f$ a pour axe de symétrie ☐ $x = 3$ ☐ $x = -3$ ☐ $y = 3$ ☐ $x = 7$

b. Sur l'intervalle $]-\infty; 3]$, f est ☐ croissante ☐ décroissante

c. Le minimum de f est ☐ 6 ☐ -2 ☐ 2 ☐ 3

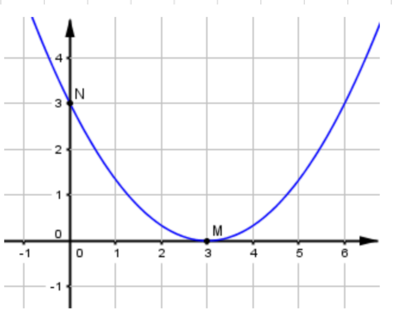
2. Déterminer les tableaux de variations des fonctions suivantes.

a. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x + 3$

b. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 1$

c. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 - x)(1 + x)$

3. Donner la forme factorisée du polynôme de degré 2 ci-dessous.



Signes d'un trinôme

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c des réels et $a \neq 0$.

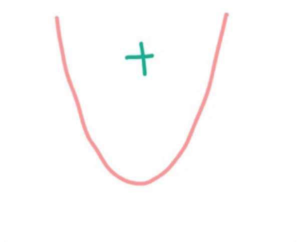
Les **variations du trinôme** dépendent du **signe de a**.

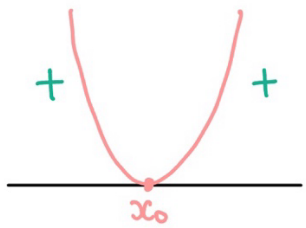
Si $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$

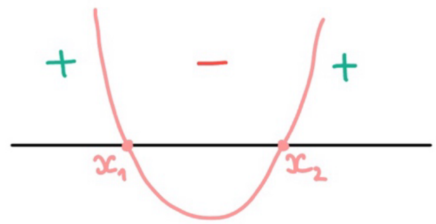
x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	





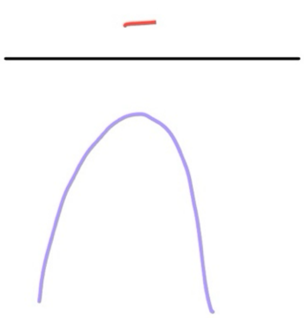


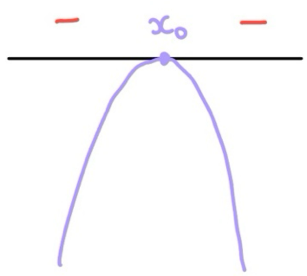
Si $\boldsymbol{a} < \mathbf{0}$

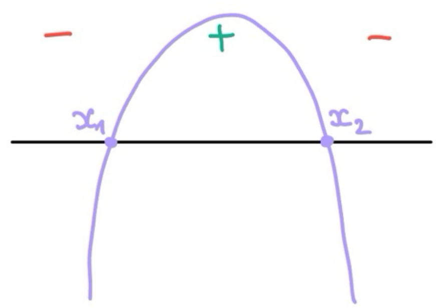
x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	







Exercices

1. Dresser le tableau de signes des polynômes, connaissant leurs racines.

$A(x) = 2x^2 - 8x + 6$ Racines : 1 et 3

x	
$A(x)$	

$B(x) = -3x^2 - 11x + 4$ Racines : $\frac{1}{3}$ et -4

x	
$B(x)$	

$R(x) = x^2 - 10x + 38$ Pas de racine

x	
$C(x)$	

2. Dresser le tableau de signes des polynômes suivants.

$A(x) = x^2 - 9$

x	
$A(x)$	

$B(x) = -2x^2 - 8x$

x	
$B(x)$	

$F(x) = 3x - 2x^2 - 1$

x	
$F(x)$	

Inéquations de second degré

Méthode pour résoudre dans ℝ l'inéquation :

$$2x^2 - 5x + 17 \geqslant x^2 + 6x - 13$$

Étape 1. Se ramener à un second membre nul.

$$2x^2 - 5x + 17 \geqslant x^2 + 6x - 13 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 11x + 30 \geqslant 0$$

Étape 2. Déterminer les racines de la fonction polynôme ainsi obtenue.

$$\Delta = 11^2 - 4 \times 1 \times 30 = 1 > 0$$

La fonction polynôme admet deux racines : $x_1 = \dfrac{11-1}{2} = 5$ et $x_2 = \dfrac{11+1}{2} = 6$

Étape 3. Dresser le tableau de signes de cette fonction.

Comme $a = 1 > 0$, $x^2 - 11x + 30$ est positif à l'extérieur des racines :

x	$-\infty$		5		6		$+\infty$
$x^2 - 11x + 30$		+	0	−	0	+	

Étape 4. Conclure en revenant à l'inéquation de l'énoncé.

$$2x^2 - 5x + 17 \geqslant x^2 + 6x - 13 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 11x + 30 \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \left]-\infty ; 5\right] \cup \left[6 ; +\infty\right[$$

Attention, il faut bien penser à

1. placer les racines dans **l'ordre croissant** dans le tableau et
2. bien vérifier si les crochets de l'ensemble des solutions sont **ouverts ou fermés**, selon que l'inégalité demandée est stricte ou non.

Exercices

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a. $3x^2 > 2x + 1$

b. $x^2 \leq 6x - 1$

c. $\frac{2x^2-12x+19}{x-2} \leq 0$

d. $\frac{1}{x} > \frac{x}{x+2}$

Polynôme de degré 3

DÉFINITION

On appelle **fonction polynôme de degré 3** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

Coefficient du terme du plus haut degré

Coefficient constant

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

coefficient du terme de degré 1

Où a, b, c et d sont des réels avec $a \neq 0$.

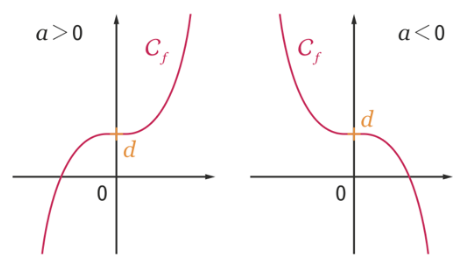
Polynôme de degré 3 ou non ?

$f(x) = 2x^3 + 3\sqrt{x} - 5$	$f(x) = \sqrt{2}x^3 + 3x^2 + 2$	$f(x) = 3x^2 + x$	$f(x) = 5x^3 - 1$
❌ **Non** car il y a un terme en $\sqrt{x}$.	✅ **Oui** car tous les coefficients sont réels. Ici $a = \sqrt{2}$.	❌ **Non** car il n'y a pas de terme en x^3. Il s'agit d'une fonction de degré 2.	✅ **Oui** car tous les coefficients sont réels. Ici $b = c = 0$.

FONCTIONS DU TYPE $f(x) = ax^3 + d$

Dans ce cas spécifique, b et c sont nuls. $a \neq 0$ et d est un réel.

- Si $a > 0$, la fonction f est strictement **croissante** sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$, la fonction f est strictement **décroissante** sur $\mathbb{R}$.



FONCTIONS DU TYPE $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

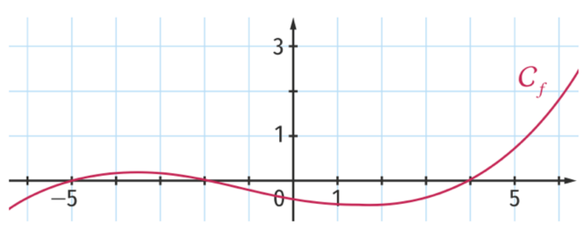
Il s'agit de la **forme factorisée** d'une fonction de degré 3.

Cette fonction s'annule uniquement en $x = x_1$, $x = x_2$, et $x = x_3$. Ces réels sont appelés **racines** du polynôme $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

📌 **Exemple**

On considère la fonction f définie par:
$f(x) = \frac{1}{100}(x + 5)(x + 2)(x - 4)$.

La fonction f s'annule en -5, en -2 et en 4.



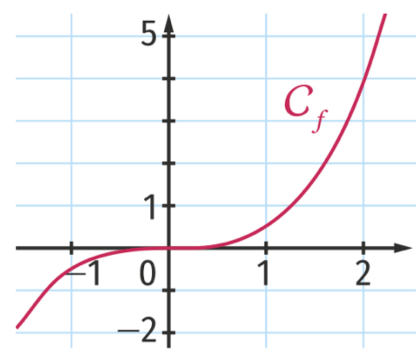
Exercices

1. Décrire le sens de variations des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$.

- $f(x) = -2x^3$ ☐ croissante ☐ décroissante
- $g(x) = x^3 + 5$ ☐ croissante ☐ décroissante
- $h(x) = 3 - 4x^3$ ☐ croissante ☐ décroissante
- $p(x) = 0{,}5x^3 - 1$ ☐ croissante ☐ décroissante
- $q(x) = (\pi - 4)x^3 + 2$ ☐ croissante ☐ décroissante

2. Lecture graphique.

Pour un certain réel a, on donne la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto ax^3$ ci-dessous.



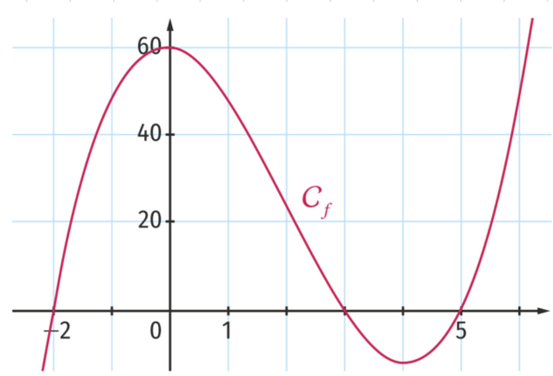
a. Sans calcul, déterminer le signe de a.

b. Par lecture graphique, que vaut $f(2)$?

c. En déduire la valeur du réel a.

3. Exercice.

Soit quatre réels a, x_1, x_2 et x_3. La courbe ci-contre est la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, définie sur $\mathbb{R}$.



a. Déterminer graphiquement les valeurs de x_1, x_2 et x_3.

b. Déterminer graphiquement $f(0)$ et en déduire la valeur de a.

c. Construire le tableau de signe de la fonction f.

Équation du 3e degré

L'équation $x^3 = c$, avec c positif, possède une unique solution $\sqrt[3]{c}$.
Cette solution peut également se noter $c^{\frac{1}{3}}$.

Tableau des cubes usuels :

x	**-5**	**-4**	**-3**	**-2**	**-1**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
x^3	-125	-64	-27	-8	-1	1	8	27	64	125

📌 FONCTIONS

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :
a. $x^3 = 27$, **b.** $2x^3 - 6 = 16$ **c.** $3x^3 - 9 = 15$

Correction

a. On cherche le nombre qui, élevé au cube, donne 27.
Ce nombre est égal à la racine cubique de 27, soit : $x = \sqrt[3]{27} = 3$. ✅

b. On résout l'équation :

$$2x^3 - 6 = 16$$
$$2x^3 = 16 + 6$$
$$2x^3 = 22$$
$$x^3 = 11$$

✅ **L'équation admet donc une unique solution :** $\boldsymbol{x = \sqrt[3]{11}}$**.**

c. On résout l'équation :

$$3x^3 - 9 = 15$$
$$3x^3 = 15 + 9$$
$$3x^3 = 24$$
$$x^3 = 8$$

On cherche le nombre qui, élevé au cube, donne 8.
Ce nombre est égal à la racine cubique de 8, soit : $x = \sqrt[3]{8} = 2$.

✅ **L'équation admet donc une unique solution :** $x = 2$**.**

Exercices

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $x^3 = 27$

2. $x^3 = -64$

3. $5x^3 = 40$

4. $2x^3 - 7 = 9$

5. $(x+2)^3 = 125$

6. $(2x-1)^3 = 216$

Dérivée en un point

✏️ DÉFINITIONS

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a un réel tel que $a \in I$ et h un réel non nul tel que $a + h \in I$. On appelle **taux de variation** de f en a le quotient :

taux de variation $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Dérivabilité

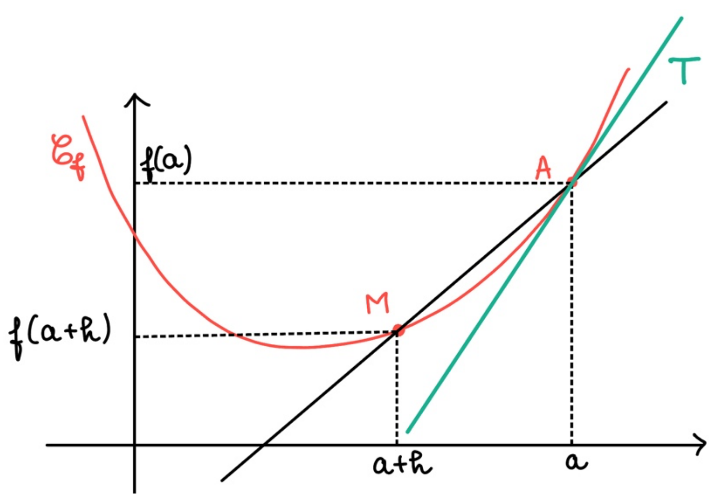
On dit que f **est dérivable en a** si la limite $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0 existe et est finie. Dans ce cas, on note $f'(a)$ cette limite et on l'appelle **nombre dérivé de f en a.**

✏️ INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

On considère un plan muni d'un repère $(0; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f. Soit **A**$(a; f(a))$ un point $\mathcal{C}_f$ et un point **M** autre que **A**.
Alors **M** a pour coordonnées $(a + h; f(a + h))$ avec $h \neq 0$.
Le **taux de variation** $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ représente le **coefficient directeur** de la droite (AM).

Dire que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $f'(a)$ quand h tend vers 0 signifie que le **coefficient directeur de la sécante** (AM) tend vers $f'(a)$.

Autrement dit, quand **M** tend vers **A** sur $\mathcal{C}_f$, la droite (AM) tend vers une position limite : celle de la droite **T** passant par **A** et de coefficient directeur $f'(a)$.



Exercices

1. Cocher la bonne case.

1. f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = 3+h$

- On peut dire que f est dérivable en 3 ☐ Vrai ☐ Faux
- $f'(-2) = 3$ ☐ Vrai ☐ Faux

2. h est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\frac{h(3+h)-h(3)}{h} = 2(h+1)^2 - 2h + 5$

- h est dérivable en 3 ☐ Vrai ☐ Faux
- $h'(3) = 5$ ☐ Vrai ☐ Faux

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)^2$.

a. Déterminer $A = \frac{f(1+h)-f(-1)}{h}$ en fonction de h et simplifier son expression.

b. La fonction f est-elle dérivable en 1 ? Si oui, que vaut $f'(1)$?

3. Soit g la fonction définie sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$ par $g(x) = \frac{1}{2x+1}$. Soit h un réel non nul, proche de 0.

a. Montrer que $\frac{g(h)-g(0)}{h} = -\frac{2}{2h+1}$.

b. La fonction g est-elle dérivable en 0 ? Si oui, que vaut $g'(0)$?

Fonctions dérivées

✏️ DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f **est dérivable sur I** si f est **dérivable** en tout x de I. On appelle alors **fonction dérivée** de f la fonction qui à tout nombre de $x \in I$ associe le nombre $\boldsymbol{f'(x)}$**,** et on la note $\boldsymbol{f'}$**.**

Remarque : f' est donc la fonction qui donne, pour chaque réel x de I, le **coefficient directeur** $f'(x)$ de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x.

✏️ DÉRIVÉES USUELLES ET OPÉRATIONS

dérivées de fonctions usuelles

constante	$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
identité	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
carré	$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
cube	$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

opérations sur les dérivées

$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
$f(x) = k\,u(x)$	$f'(x) = k\,u'(x)$

✏️ EXEMPLES

- $f(x) = 2x$

On utilise la règle : $(ax)' = a$. Donc $\boldsymbol{f'(x) = (2x)' = 2}$ ✅

- $g(x) = x^2 - 3$

On dérive terme à terme. $(x^2)' = 2x$ et $(-3)' = 0$. Donc : $\boldsymbol{g'(x) = 2x}$ ✅

- $h(x) = 3x^3 - 2x$

On dérive chaque terme. $(3x^3)' = 3 \times 3x^2 = 9x^2$ et $(-2x)' = -2$. Donc : $\boldsymbol{h'(x) = 9x^2 - 2}$ ✅

- $m(x) = -\frac{5}{2}x^5 + 4x^3 - x^2 + 7$

On dérive terme par terme.

$\left(-\frac{5}{2}x^5\right)' = -\frac{5}{2} \times 5x^4 = -\frac{25}{2}x^4$; $(4x^3)' = 4 \times 3x^2 = 12x^2$; $(-x^2)' = -2x$; $(7)' = 0$

Donc : $\boldsymbol{m'(x) = -\frac{25}{2}x^4 + 12x^2 - 2x}$ ✅

Exercices

1. Relier chacune de ces fonctions à la fonction dérivée correspondante.

x^2	x^{-5}	$-5x+3$	-6	$\sqrt{-2x+7}$	$3x^5$	$\frac{1}{x^4}$
0	$-4x^{-5}$	$\frac{-1}{\sqrt{-2x+7}}$	$15x^4$	$\frac{-5}{x^6}$	-5	$2x$

2. Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes.

$f_1(x) = \frac{5}{2}x^2 - 3x$ $\quad f_1{}'(x) =$

$f_2(x) = -4x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1$ $\quad f_2{}'(x) =$

$f_3(x) = 7x^4 - 5x^2 + x$ $\quad f_3{}'(x) =$

$f_4(x) = -\frac{3}{2}x^5 + 4x^3 - 2x$ $\quad f_4{}'(x) =$

$f_5(x) = 6x^6 - 5x^4 + 3x^2 - 7$ $\quad f_5{}'(x) =$

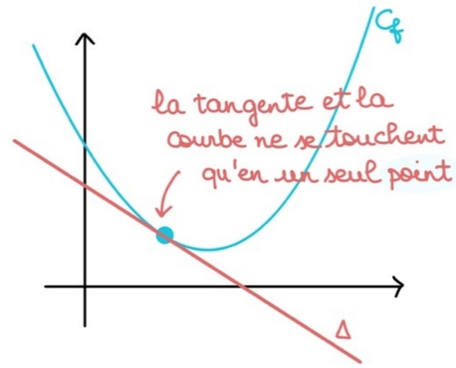
$f_6(x) = -2x^7 + \frac{5}{3}x^4 - x^2 + 8$ $\quad f_6{}'(x) =$

$f_7(x) = \frac{1}{2}x^8 - 3x^5 + 2x^3 - x$ $\quad f_7{}'(x) =$

$f_8(x) = -4x^9 + 3x^6 - \frac{5}{2}x^3 + 7x - 10$ $\quad f_8{}'(x) =$

Tangente en un point

✏️ DÉFINITION DE LA TANGENTE



Si f est dérivable en a, la droite passant par $A(a; f(a))$ et de coefficient directeur $\boldsymbol{f'(a)}$ est appelée **tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A.**

✏️ ÉQUATION RÉDUITE DE LA TANGENTE

Soit f une fonction dérivable en a, alors l'équation réduite de la tangente au point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a est :

dérivée de f en a

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

📌 **Méthode : déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a**

1. On place le point A d'abscisse a sur la courbe de f.
2. On détermine $f'(a)$
3. À partir du point A, on trace le vecteur de coordonnées $(1; f'(a))$: c'est un **vecteur directeur** de la tangente cherchée.
4. On utilise la formule : $y = f(a) + f'(a)(x-a)$

On donne la courbe $\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$ ci-dessous. On sait que f est dérivable en -2 et que $f'(-2) = \frac{5}{3}$. On cherche à tracer la tangente à $\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$ au point d'abscisse -2.

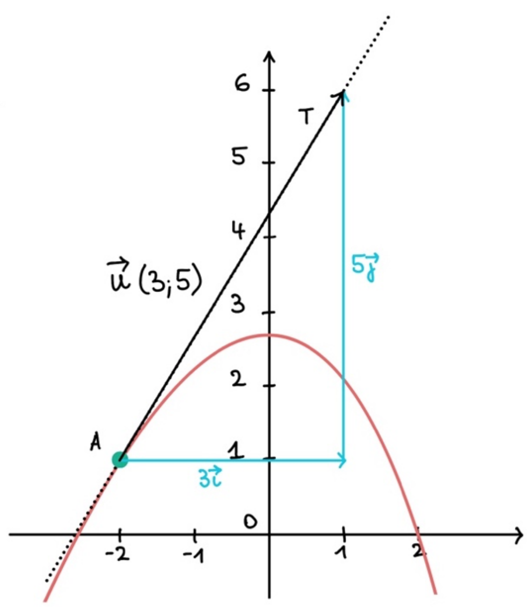
- Un vecteur $\vec{u}\,(3;5)$ est un vecteur directeur de la tangente.
- On applique la formule $a = -2$:

$$y = f(-2) + f'(-2)(x-(-2))$$
$$= f(-2) + f'(-2)(x+2)$$

- Ici on lit $f(-2)$: c'est l'ordonnée de A et donc $f(-2) = 1$

On en déduit :

$$y = 1 + \frac{5}{3}(x+2) = \frac{5}{3}x + \frac{13}{3}$$

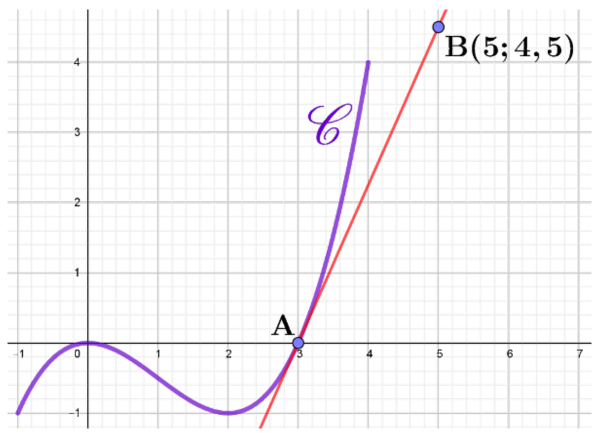


Exercices

1. **Relier chaque définition de tangente à son équation réduite.**

$f(1)=5$ et $f'(-1)=0$ •	• $y=5$
$g'(2)=-1$ et $g(2)=3$ •	• $y=2x-6$
$h'(-5)=0{,}5$ et $h(-5)=-1{,}5$ •	• $y=-x+5$
$k(3)=0$ et $k'(3)=2$ •	• $y=0{,}5x+1$

2. **On a tracé la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $[-1;4]$. La droite (AB) est tangente à $\mathcal{C}_f$ en A.**



À l'aide du graphique, déterminer :

$f(0) =$

$f'(0) =$

$f(3) =$

$f'(3) =$

3. **Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer une équation de la tangente à la courbe représentant la fonction au point d'abscisse a.**

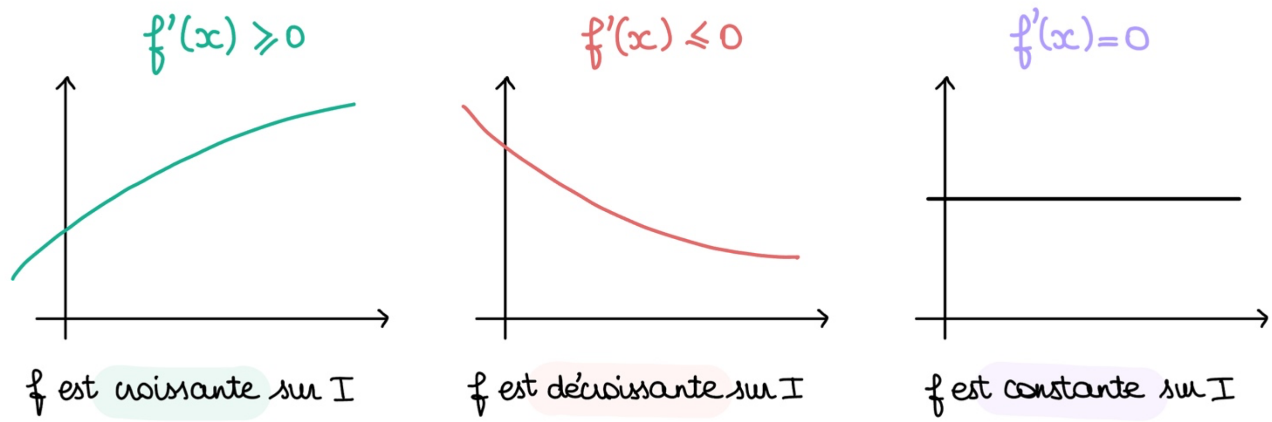
a. $f(x) = x^3 - 3x + 1 \qquad a = 0$

b. $f(x) = \frac{x^2}{3x-9} \qquad a = 1$

c. $f(x) = \frac{x+1}{x-1} \qquad a = 2$

Dérivées et variations

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.



✏️ MÉTHODE : Étudier les variations d'une fonction

Exemple : étudier les variations de f définie par $f(x) = x^3 - 3x$

1. **Calculer $f'(x)$.**

$f'(x) = 3x^2 - 3$

2. Si son signe n'est pas évident, mettre $f'(x)$ sous forme de produit ou de quotient pour construire un **tableau de signes**.

   Si $f'(x)$ ne peut être mis sous forme d'un produit ou d'un quotient, **résoudre l'équation $f'(x) = 0$ et l'inéquation $f'(x) > 0$**.

$$f'(x) = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$$

$3 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $(x-1)(x+1)$.

3. À partir du **signe de $f'(x)$**, donner les variations de f dans un tableau de variations.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	

Exercices

1. **Compléter les tableaux de variations suivants.**

x	$-\infty$		5		$+\infty$
f'			0	$+$	
f		$\searrow$			

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	$\|$		
g						$\nearrow$	

2. **Étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$.**

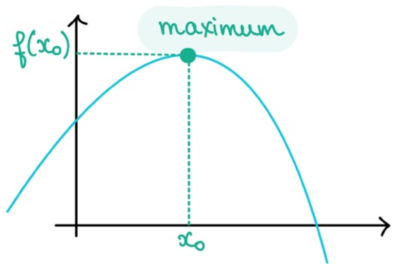
Extremum

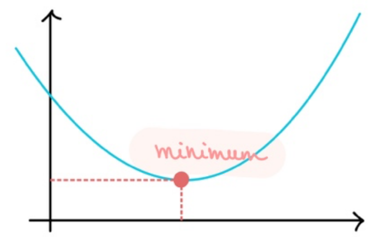
✏️ DÉFINITIONS

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un élément de I.

$f(x_0)$ est le maximum de f sur I $\Leftrightarrow$ pour tout x de I
$f(x) \leq f(x_0)$

$f(x_0)$ est le minimum de f sur I $\Leftrightarrow$ pour tout x de I
$f(x) \geq f(x_0)$





Vocabulaire

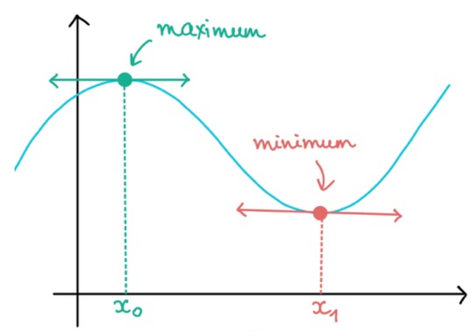
• Lorsque x_0 n'est pas une borne de I, on dit que f admet un **maximum local** en x_0 s'il existe un intervalle ouvert **J** inclus dans I et contenant x_0 pour lequel $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout x de **J**.

• Lorsque x_0 n'est pas une borne de I, on dit que f admet un **minimum local** en x_0 s'il existe un intervalle ouvert **J** inclus dans I et contenant x_0 pour lequel $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout x de **J**.

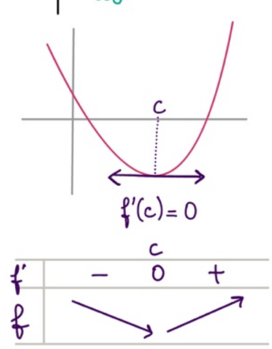
• $f(x_0)$ est un **extremum** de f si $f(x_0)$ est un **maximum** ou un **minimum** local.

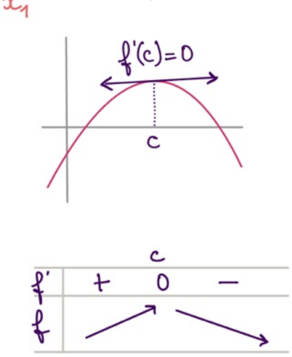
✏️ EXTREMUM ET DÉRIVÉE

Si f présente un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$. En **extremum local**, la tangente à la courbe est **horizontale**.



Si f' **s'annule en x_0 et change de signe en x_0** alors, f admet un extremum local en x_0.





Exercices

1. **Indiquer pour les fonctions de référence suivantes si elles admettent un minimum ou maximal local. Donner les coordonnées de l'extremum local.**

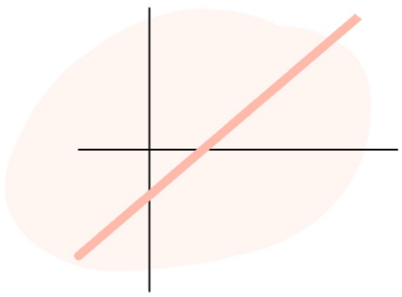
Affine	Carré	Cube	Racine carrée

2. **On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x+\frac{1}{x}$.**

Démontrer que cette fonction admet un minimum qu'on précisera.

Fonctions de référence

affine



$f(x) = ax + b$ définie sur $\mathbb{R}$

Si $a > 0$ alors la fonction est croissante.
Si $a < 0$ alors la fonction est décroissante.

$a > 0$

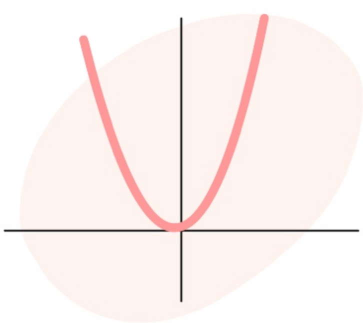
x		$-\frac{b}{a}$	
$f(x)$	$-$	0	$+$

$a < 0$

x		$-\frac{b}{a}$	
$f(x)$	$+$	0	$-$

$f'(x) = a$

carré



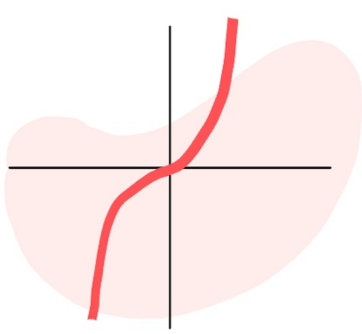
$f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$

- la fonction est paire
- elle a un minimum en 0

x		0	
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$f'(x) = 2x$

cube



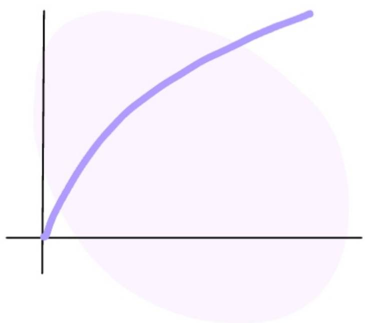
$f(x) = x^3$ définie sur $\mathbb{R}$

- la fonction est impaire
- elle est croissante sur $\mathbb{R}$

x	0
$f(x)$	$\nearrow$

$f'(x) = 3x^2$

racine carrée



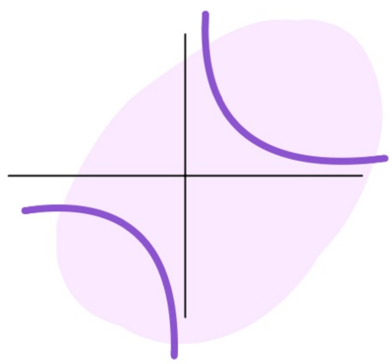
$f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $[0;+\infty[$

- la fonction est croissante sur $[0;+\infty[$
- elle est positive sur $[0;+\infty[$

x	0
$f(x)$	↗

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

inverse



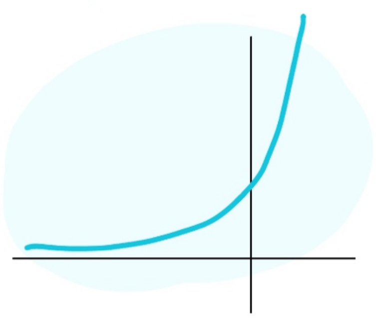
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

- la fonction est impaire
- elle est décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$

x		0	
$f(x)$	↘	‖	↘

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

exponentielle



$f(x) = e^x$ définie sur $\mathbb{R}$

- la fonction est croissante sur $\mathbb{R}$
- elle est strictement positive

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↗	1	↗	

$f'(x) = e^x$

Notes personnelles

mes réussites

points à travailler

Probabilités et statistiques

Proportion et pourcentages

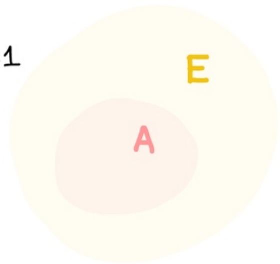
✏️ PROPORTION

La **proportion (ou fréquence)** d'une sous population S dans une population E est le quotient des effectifs.

$$\text{PROPORTION} = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de E}}$$

toujours entre 0 et 1

= FRÉQUENCE



Pourcentage

Lorsqu'on connaît une proportion, l'exprimer **sur 100** est souvent plus pratique, notamment pour la comparer à une autre proportion. Le pourcentage est donné par :

$$\text{POURCENTAGE} = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de E}} \times 100$$

on note %

📌 **Exemple**

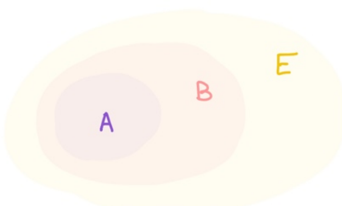
Dans une classe de seconde de 36 élèves, il y a 20 filles et 16 garçons.

La proportion des garçons est de $\frac{16}{36} = \frac{4}{9} \approx \mathbf{0,44}$ ✅. Le pourcentage est de **44%.** ✅

✏️ PROPORTION DE PROPORTION

Soit un ensemble E contenant deux sous-ensembles A et B tels que A ⊂ B. La proportion de A dans E est égale au produit de la proportion de A dans B par la proportion de B dans E.

Si A représente $t_1\%$ de B et B représente $t_2\%$ de E alors A représente $t_1\% \times t_2\%$ de E



📌 **Exemple**

Dans un club de football, il y a 350 adhérents. Parmi ces adhérents, 20 % sont des benjamins et 40 % des benjamins sont des filles. Combien y a-t-il de benjamines dans ce club ?

La proportion de benjamines dans le club vaut $\frac{20}{100} \times \frac{40}{100} = \frac{800}{10000} = 8\%$

Dans le club de football, il y a donc $350 \times 8\% =$ **28 benjamines** ✅

Exercices

1. Relier chaque pourcentage à sa valeur.

10% de 250	17% de 38	32% de 70	20% de 46	25% de 54
13,5	9,2	25	22,4	6,46

2. Calcul d'effectifs.

Dans une entreprise on sait que 30% des salariés partent en vacances en juillet, les autres partant au mois d'août. Ce qui représente un nombre de 150 employés qui sont partis en juillet. Quel est le nombre de salariés dans cette entreprise ?

3. Proportion de proportion

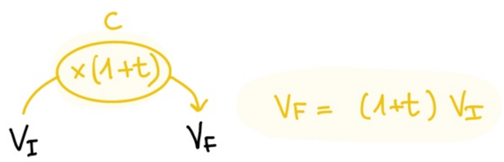
42% de la population française possède le groupe sanguin O, parmi ces personnes, 14% sont de Rhésus -. Quel pourcentage de la population française est du groupe sanguin O- ?

Variation et évolution

VARIATION

On considère une quantité positive qui évolue d'une valeur initiale V_I à une valeur finale V_F.

- La **variation absolue** de cette quantité est le nombre $\boldsymbol{V_F - V_I}$.
- La **variation relative (ou taux d'évolution)** est le nombre $t = \frac{\boldsymbol{V_F - V_I}}{\boldsymbol{V_I}}$



$C = 1+t$ est le coefficient multiplicateur de V_I à V_F

$t \geqslant 0$ pour une augmentation
$t \leqslant 0$ pour une diminution

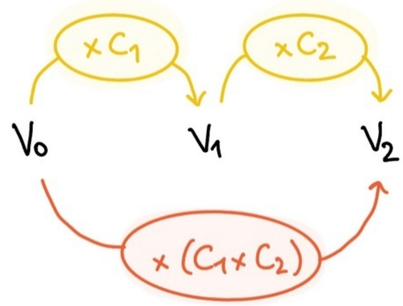
📌 **Exemple**

Une évolution fait passer d'une quantité initiale 9 à une quantité finale 12,6.
Quel est le taux d'évolution correspondant ? $V_I = 9$ et $V_F = 12{,}6$.
Taux d'évolution : $t = \frac{12{,}6-9}{9} = \frac{3{,}6}{9} = 0{,}4$. Le taux est de **0,4** ou **40%**. ✅

ÉVOLUTIONS SUCCESSIVES

Pour deux **évolutions successives** de coefficients multiplicateurs respectifs C_1 et C_2 l'évolution globale a pour **coefficient multiplicateur global** :

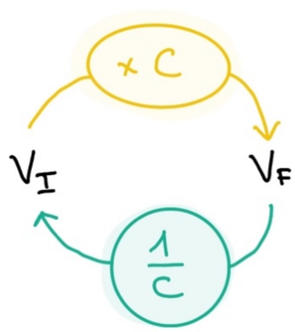
$$\boldsymbol{C = C_1 \times C_2}$$



ÉVOLUTION RÉCIPROQUE

Pour une évolution de V_I à V_F de coefficient multiplicateur C, l'**évolution réciproque** de V_F à V_I a pour coefficient multiplicateur :

$$\boldsymbol{C' = \frac{1}{C}}$$



Exercices

1. Vrai ou faux ?

a. Augmenter de 36 % revient à multiplier par 1,36. ☐ Vrai ☐ Faux

b. Diminuer de 25 % revient à multiplier par 0,25. ☐ Vrai ☐ Faux

c. Augmenter de 4 % revient à multiplier par 1,4. ☐ Vrai ☐ Faux

d. L'évolution réciproque d'une hausse de 25% est une baisse de 25%.
☐ Vrai ☐ Faux

e. L'évolution réciproque d'une baisse de 10% est une hausse de 11%.
☐ Vrai ☐ Faux

2. Entourer la bonne réponse.

1. Les prix ont augmenté de 20% puis de 30%. La hausse globale est	50%	54%	56%
2. Deux baisses successives de 10% correspondent à une baisse globale de	81%	19%	20%
3. Une baisse de 10% suivie par une hausse de 30% correspond à	+4%	-4%	+10%
4. Une hausse de 30% suivie par une baisse de 30% correspond à	une stagnation	-9%	+8%

3. Compléter le tableau.

Évolution 1		Évolution 2		Évolution globale	
t_1	c_1	t_2	c_2	C	T
-5%		+30%			
-12%		-12%			
+4,5%		+3,5%			

Calculer une probabilité

La probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1 et qui exprime la chance qu'a un événement de se produire.

Vocabulaire

- Un événement dont la probabilité est **0** est un événement **impossible**.
- Un événement dont la probabilité est égale à **1** est un événement **certain**.
- Lorsque chaque issue a autant de chance de se produire, on dit qu'il y a **équiprobabilité**.

Équiprobabilité	Somme
$P(A) = \dfrac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre d'issues total}}$	La somme des probabilités de toutes les issues est égale à 1.

ÉVÉNEMENT CONTRAIRE

La probabilité d'un événement contraire $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

INTERSECTION

Calculer la probabilité d'une intersection

On lance un dé à six faces et on considère les événements suivants :
A : « Obtenir un multiple de 2 » et **B** : « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 4 ».
A ∩ B : « Obtenir un multiple de 2 inférieur ou égal à 4. » donc $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \{\mathbf{2}\,;\mathbf{4}\}$.
$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ **donc** $\boldsymbol{P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}}$

RÉUNION

Théorème : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

En reprenant l'exemple précédent, on obtient : A ∪ B : « Obtenir un multiple de 2 ou inférieur ou égal à 4. ».
$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$ ✅

Exercices

1. Cocher la bonne réponse.

Soit la loi de probabilité ci-contre. Soit les événements **A** : « On obtient une voyelle » et **B** : « On obtient a, b ou c ».

Issue	a	b	c	d	e
Probabilité	0,1	0,2	0,25	0,3	0,15

a. $p(A)$ est égale à ☐ 0,1 ☐ 0,05 ☐ 1 ☐ 0,25

b. $p(B \cap A)$ est égale à ☐ 0,45 ☐ 0,55 ☐ 0,1 ☐ 0,7

c. $p(\bar{A})$ est égale à ☐ 0,9 ☐ 0,95 ☐ 0,75 ☐ 0,85

2. Compléter les égalités.

a. Si $p(A) = 0{,}8$, $p(B) = 0{,}5$ et $p(A \cap B) = 0{,}3$ alors $p(A \cup B) =$

b. Si $p(A) = 0{,}8$, $p(B) = 0{,}3$ et $p(A \cap B) = 0{,}5$ alors $p(A \cup B) =$

c. Si $p(A) = 0{,}8$, $p(B) = 0{,}4$ et $p(A \cap B) = 0{,}7$ alors $p(A \cup B) =$

3. Calculer les probabilités suivantes.

Soit E un exemple d'issues possibles à l'occasion d'une expérience aléatoire : $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Les sept événements élémentaires sont équiprobables. On considère les événements $A = \{2; 3; 4\}$; $B = \{3; 4; 5; 7\}$ et $C = \{1; 5\}$.

$p(A) =$ $p(B) =$

$p(C) =$ $p(A \cap B) =$

$p(A \cup C) =$ $p(\bar{A}) =$

$p(\bar{B}) =$ $p(A \cup B) =$

Fréquences conditionnelles et marginales

Dans une population **E**, on s'intéresse à deux caractères $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ simultanément.

	A	$\bar{A}$	Total
B	10	10	20
$\bar{B}$	5	35	40
Total	15	45	60

DÉFINITION DE LA FRÉQUENCE

La fréquence d'un caractère dans une population est l'effectif de la sous-population vérifiant ce caractère divisé par l'effectif total de la population.

$$\text{fréquence} = \frac{\text{effectif}}{\text{effectif total}}$$

La fréquence peut s'exprimer en fraction, en pourcentage, ou sous forme décimale.
$\frac{3}{10}$ ✓ 30% ✓ 0,3 ✓

La fréquence est comprise entre 0 et 1 (ou 0% et 100%)
$0 < \text{fréquence} < 1$ $0\% < \text{fréquence} < 100\%$

FRÉQUENCE MARGINALE

Une **fréquence marginale** est une fréquence dans la **population totale.**

Exemple :

- la **fréquence marginale de A** dans la population **totale** est $\frac{15}{60}$.
- la **fréquence des individus vérifiant à la fois les caractères A et B ($A \cap B$)** est $\frac{10}{60}$.

effectif de A∩B

	A	$\bar{A}$	Total
B	10	10	20
$\bar{B}$	5	35	40
Total	15	45	60

effectif de A

FRÉQUENCE CONDITIONNELLE

Une **fréquence conditionnelle** est une fréquence dans une **sous-population**. La fréquence conditionnelle de **A dans B** correspond à la fréquence du caractère A dans la sous-population vérifiant le caractère B.

Exemple :
La fréquence conditionnelle de A dans la **sous-population** vérifiant le caractère **B** est $\frac{10}{20}$ car, parmi les **20** individus vérifiant B, **10** vérifie également **A**.

effectif de A∩B

	A	$\bar{A}$	Total
B	10	10	20
$\bar{B}$	5	35	40
Total	15	45	60

Exercices

1. Choisir la bonne réponse.

a. Une fréquence **marginale** est toujours calculée par rapport à **l'effectif total** de la population.
☐ Vrai ☐ Faux

b. Pour calculer une fréquence **conditionnelle** de A sachant B, on divise l'effectif de $A \cap B$ par l'effectif total de la population. ☐ Vrai ☐ Faux

c. Si on calcule une fréquence « parmi les individus vérifiant B », alors on calcule forcément une **fréquence marginale**. ☐ Vrai ☐ Faux

d. Une fréquence conditionnelle peut être **plus grande** qu'une fréquence marginale.
☐ Vrai ☐ Faux

2. Calculer les fréquences suivantes.

Voici la répartition des 180 t-shirts d'un magasin selon la taille et la couleur.

	S	M	L	XL	Total
Rouge	18	27	35	10	90
Bleu	22	31	29	8	90
Total	40	58	64	18	180

a. Donner la fréquence de t-shirts rouges dans le magasin.

b. Parmi les t-shirts de taille L, quelle est la fréquence de t-shirts bleus ?

c. Parmi les t-shirts bleus, quelle est la fréquence de ceux de taille M ?

3. Calculer les fréquences suivantes.

Voici la répartition des clubs sportifs d'une ville selon le sport pratiqué et le lieu d'entraînement. On donnera les résultats sous forme décimale arrondie au centième.

	Gymnase	Stade	Piscine	Total
Football	120	280	0	400
Basket	210	40	0	250
Natation	0	0	150	150
Total	330	320	150	800

a. Calculer la **fréquence des clubs de basket** parmi l'ensemble des clubs.

b. Calculer la **fréquence des clubs de football qui s'entraînent au stade**.

c. Quelle est la **fréquence du basket parmi les clubs qui s'entraînent en gymnase** ?

d. À quoi correspond le calcul $\frac{150}{800} \approx 0{,}19$ par rapport aux données du tableau ?

Tableau d'effectifs

Lors d'une enquête, **200 élèves** sont interrogés sur leur **moyen de transport** pour venir au lycée.
- 40 % viennent en **bus**, les autres à **vélo**.
- Parmi les élèves venant en bus, **25 %** habitent à moins de 3 km.
- Parmi ceux venant à vélo, **70 %** habitent à moins de 3 km.

Compléter le tableau d'effectifs.

MÉTHODE

Étape 1 – Partir de l'effectif total
On commence par compléter l'effectif total d'élèves : 200.

	<3km	$\geqslant 3$km	TOTAL
BUS			
VÉLO			
TOTAL			200

Étape 2 – Calculer les effectifs par catégorie principale
On calcule les sous-totaux Bus et Vélo.
- 40 % viennent en bus : $0{,}40 \times 200 = \mathbf{80}$ **élèves**
- Les autres viennent à vélo : $200 - 80 = \mathbf{120}$ **élèves**

	<3km	$\geqslant 3$km	TOTAL
BUS			80
VÉLO			120
TOTAL			200

Étape 3 – Travailler "à l'intérieur" de chaque catégorie
Les pourcentages donnés ensuite s'appliquent uniquement au groupe concerné.
- Parmi les élèves venant en bus, 25 % habitent à moins de 3 km :

$$0{,}25 \times 80 = \mathbf{20}$$

- Parmi les élèves venant à vélo, 70 % habitent à moins de 3 km :

$$0{,}70 \times 120 = \mathbf{84}$$

	<3km	$\geqslant 3$km	TOTAL
BUS	20		80
VÉLO		84	120
TOTAL			200

Étape 4 – Compléter par soustraction
Quand une case est trouvée, on complète l'autre ligne par différence.
- Bus et 3 km ou plus : $80 - 20 = 60$
- Vélo et 3 km ou plus : $120 - 84 = 36$

	<3km	$\geqslant 3$km	TOTAL
BUS	20	60	80
VÉLO	36	84	120
TOTAL			200

Étape 5 – Vérifier les totaux
On vérifie que :
- chaque colonne est correcte,
- chaque ligne est correcte,
- le total final est bien 200.

	<3km	$\geqslant 3$km	TOTAL
BUS	20	60	80
VÉLO	36	84	120
TOTAL	56	144	200

👉 Si tout colle, le tableau est juste. ✅

Exercices

1. Compléter le tableau croisé d'effectifs.

On interroge **360 spectateurs** sur leur préférence de film et leur horaire de séance.

- **40 %** des spectateurs préfèrent les séances du soir.
- Parmi eux, **un quart** préfèrent les **films d'action**.
- **Un tiers** des spectateurs préfèrent les **films d'action**, les autres préfèrent les **films de comédie**.

On souhaite regrouper ces informations dans le tableau suivant.

	Action	Comédie	Total
Séance du soir	....	....	....
Séance de l'après-midi	....	....	....
Total	....	....	360

2. Compléter le tableau croisé d'effectifs.

Une boîte contient **72 cartes** numérotées de **1 à 72**.

- **Un tiers** des cartes multiples de 3 sont **rouges**.
- **Les trois quarts** des cartes **non multiples de 3** sont **vertes**.

	Multiple de 3	Non multiple de 3	Total
Rouge	....	....	....
Verte	....	....	....
Total	24	48	72

3. Compléter le tableau d'effectifs.

On interroge **150 voyageurs** sur leur **boisson préférée** et le **moment de consommation**.

- $\frac{2}{5}$ des voyageurs préfèrent le **café**.
- $\frac{1}{3}$ des voyageurs consomment leur boisson **le matin**, les autres **l'après-midi**.
- Parmi les voyageurs qui boivent **le matin**, **20** préfèrent le **thé**.

	Café	Thé	Total
Matin	...	...	...
Après-midi	...	...	...
Total	...	...	150

Probabilités conditionnelles

✏️ DÉFINITION

On appelle **probabilité conditionnelle de B sachant A**, la probabilité que l'événement B se réalise *sachant que* l'événement A est réalisé. On la note : $P_A(B)$.

Comme pour les probabilités simples, on a :

$0 \leq P_A(B) \leq 1$

Propriété

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{ou encore} \quad P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

Lire dans un tableau

Dans une situation **d'équiprobabilité**, on a plus simplement :

$$P_B(A) = \frac{\textit{nombre d'issues dans } \boldsymbol{A \cap B}}{\textit{nombre d'issues dans } \boldsymbol{B}}$$

$p(A \cap B)$ se lit :
« Probabilité de A inter B »

Nombre d'issues dans	A	$\bar{A}$	Total
B	$A \cap B$	$\bar{A} \cap B$	B
$\bar{B}$	$A \cap \bar{B}$	$\bar{A} \cap \bar{B}$	$\bar{B}$
Total	A	$\bar{A}$	

✏️ CALCULER UNE PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit A l'événement : « Le résultat est un pique » et B l'événement : « Le résultat est un roi ».
Calculer $P_A(B)$, la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique.

Réponse :

$P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$ (tirer un roi de pique).

Donc la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique est :

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{32} : \frac{1}{4} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ ✅

Exercices

1. Calculer les probabilités.

Lors d'un festival de musique, on a recensé les spectateurs selon leur **genre musical préféré** et leur **type de billet**. On interroge un spectateur au hasard.

	Rock	Pop	Electro	Total
Pass journée	48	36	66	150
Pass week-end	72	54	18	144
Total	120	90	84	294

a. Quelle est la **probabilité** que le spectateur préfère le **rock** ?

b. Quelle est la **probabilité** que le spectateur ait un **pass week-end** et préfère la **pop** ?

c. Sachant que le spectateur a un **pass journée**, quelle est la **probabilité** qu'il préfère l'**electro** ?

2. Calculer les probabilités.

a. On considère deux événements A et B tels que $p(A) = 0{,}60$ et $p(A \cap B) = 0{,}18$.
Calculer $p_A(B)$.

b. On considère deux événements E et F tels que $p(F) = 0{,}30$ et $p_F(E) = 0{,}50$.
Calculer $p(F \cap E)$.

3. Relier chaque notation à sa valeur.

Des essais ont été faits pour tester l'efficacité d'un médicament comparativement à un placebo.
On trouve la répartition des patients ayant participé à cet essai ci-contre.

On choisit un de ces patients au hasard et on considère les événements :

- M : « Le patient a reçu le médicament. »
- G : « Le patient est guéri. »

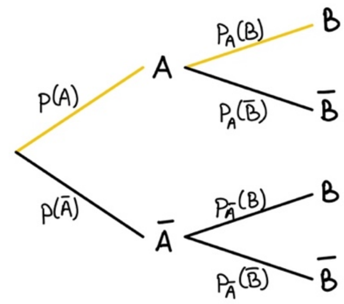
	Placebo	Médicament
Guéri	18	4
Non guéri	42	16

$p(M)$ • $p(G \cap \bar{M})$ • $p_G(M)$ • $p_{\bar{M}}(G)$

• $0{,}25$ • $0{,}3$ • $0{,}225$ • $\simeq 0{,}18$

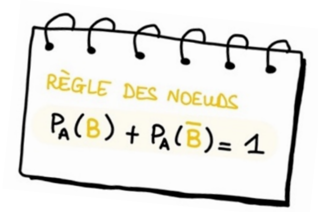
Arbre de probabilités

ARBRE DE PROBABILITÉ À 2 NIVEAUX



On peut représenter la situation par un arbre de probabilités sur les branches duquel apparaissent les probabilités de A et $\bar{A}$ puis les **probabilités conditionnelles** de $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{\bar{B}}$ sachant A et $\bar{A}$.

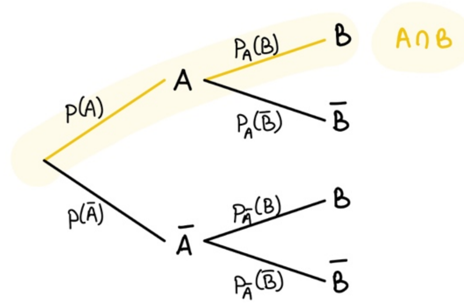
Règle des nœuds : La somme des probabilités rencontrées sur les branches partant d'un même événement est égale à 1.



PROBABILITÉ ASSOCIÉE À UN CHEMIN

Pour déterminer la probabilité associée à un chemin, on **multiplie entre elles les probabilités associées aux branches du chemin** :

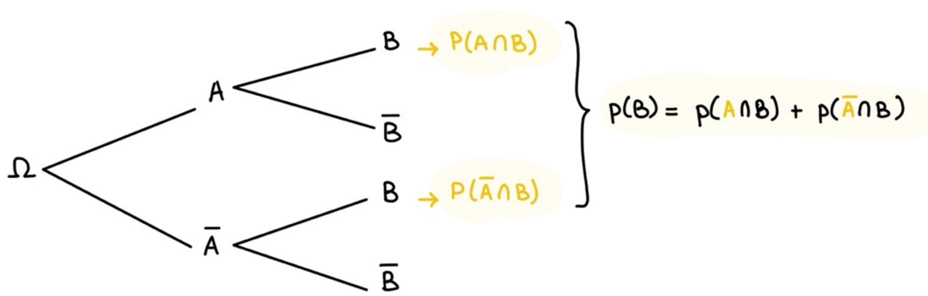
$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$$



PROBABILITÉ D'UN ÉVÉNEMENT EN 2^e NIVEAU

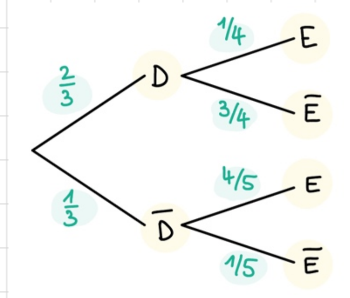
Pour calculer la probabilité d'un événement en 2^e niveau (B), on additionne les probabilités associées à tous les chemins menant à cet événement.

$$p(B) = p(A \cap B) \times p(\bar{A} \cap B)$$



Exercices

1. Vrai ou faux ?



a. $p(D) + p(\bar{D})=1$ ☐ Vrai ☐ Faux

b. $p(D \cap E) + p(\bar{D} \cap E) = 1$ ☐ Vrai ☐ Faux

c. $p(D \cap E) = \frac{1}{6}$ ☐ Vrai ☐ Faux

d. $p(\bar{D} \cap E) = \frac{1}{2}$ ☐ Vrai ☐ Faux

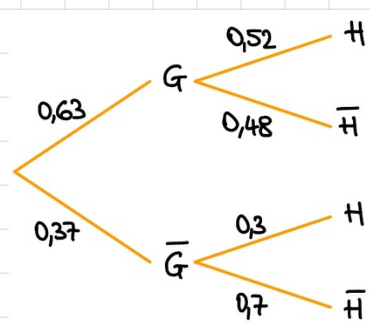
Calculer les probabilités suivantes.

e. Donner $p(D)$, $p_D(E)$.

f. Calculer $p(D \cap \bar{E})$ et $p(\bar{D} \cap \bar{E})$.

g. En déduire $p(\bar{E})$.

2. Calculer les probabilités.



a. Donner $p(G)$, $p_G(H)$ et $p_G(\bar{H})$.

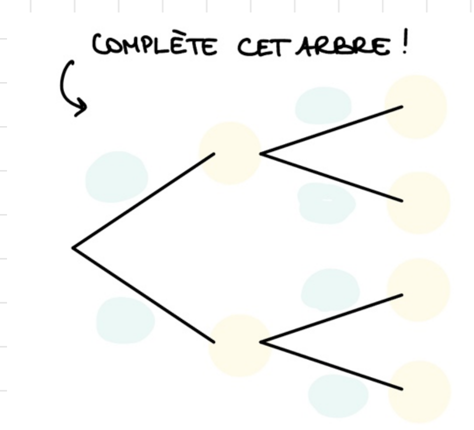
b. Calculer $p(G \cap H)$ et $p(\bar{G} \cap H)$.

c. En déduire $p(H)$.

3. Compléter l'arbre de probabilités

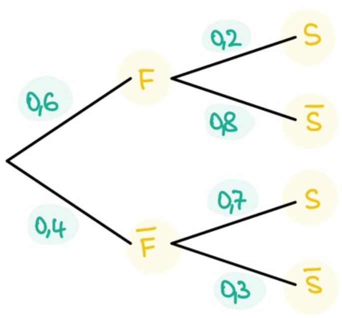
Emmy tire successivement et **sans remise** deux boules dans une urne contenant **25 boules** indiscernables au toucher, **5 de couleur verte** et le **reste de couleur orange**.
On note les événements :

- V_1 : « La première boule tirée est verte. »
- O_1 : « La première boule tirée est orange. »
- V_2 : « La deuxième boule tirée est verte. »
- O_2 : « La deuxième boule tirée est orange. »



Inverser le conditionnement

Dans cet arbre à 2 niveaux, on a les probabilités conditionnelles $\boldsymbol{p_F(S)}$ **et** $\boldsymbol{p_F(\bar{S})}$**.**



Comment « inverser le conditionnement », autrement dit obtenir $\boldsymbol{p_S(F)}$?

MÉTHODE

Étape 1

On calcule une intersection en multipliant le long d'un chemin de l'arbre.
Ici :

$$p(F \cap S) = p(F) \times p_F(S) = 0{,}6 \times 0{,}2 = \mathbf{0,12}$$
$$p(F \cap \bar{S}) = p(F) \times p_F(\bar{S}) = 0{,}6 \times 0{,}8 = \mathbf{0,48}$$
$$p(\bar{F} \cap S) = p(\bar{F}) \times p_F(S) = 0{,}4 \times 0{,}7 = \mathbf{0,28}$$
$$p(\bar{F} \cap \bar{S}) = p(\bar{F}) \times p_F(\bar{S}) = 0{,}4 \times 0{,}3 = \mathbf{0,12}$$

Étape 2

On calcule la probabilité de l'événement sur lequel on veut conditionner.
Pour S, on additionne toutes les probabilités des chemins qui arrivent en S :

$$p(S) = p(F) \times p_F(S) + p(\bar{F}) \times p_{\bar{F}}(S)$$

$$p(S) = 0{,}6 \times 0{,}2 + 0{,}4 \times 0{,}7 = 0{,}12 + 0{,}28 = 0{,}40$$

De même :

$$p(\bar{S}) = p(F \cap \bar{S}) + p(\bar{F} \cap \bar{S}) = 0{,}48 + 0{,}12 = 0{,}60$$

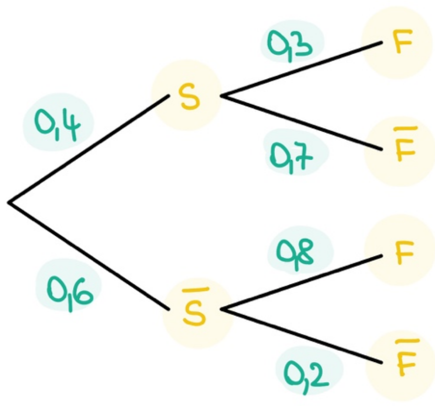
Étape 3

On applique la définition de la probabilité conditionnelle “à l'envers” :

$$p_S(F) = \frac{p(F \cap S)}{p(S)} = \frac{0{,}12}{0{,}40} = 0{,}30$$

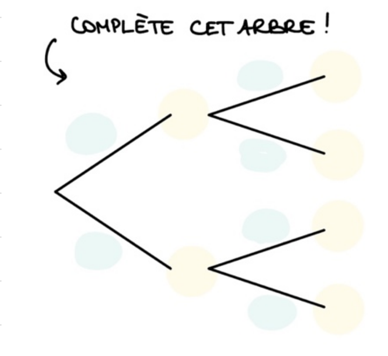
De même : $p_{\bar{S}}(F) = \frac{p(F\cap\bar{S})}{p(\bar{S})} = \frac{0{,}48}{0{,}60} = 0{,}80.$

On peut ainsi reconstruire l'arbre de probabilité en inversant les niveaux de S et F. ✅



Exercices

1. Cocher la bonne réponse.



Un hôtel propose une formation sécurité à son personnel. **90 %** des employés ont suivi la formation. On observe que **3 %** des employés formés commettent une erreur lors d'un contrôle, contre **25 %** chez les employés non formés. On choisit un employé au hasard.
On note les événements :
- F : « l'employé est formé »
- E : « l'employé commet une erreur »

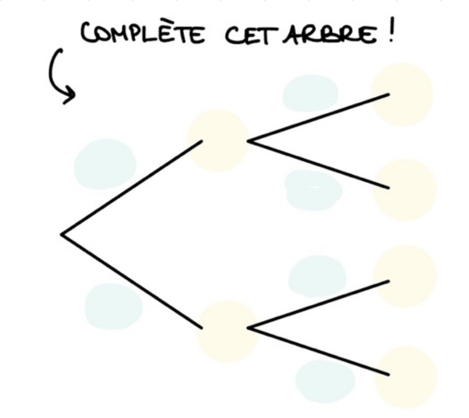
a. $p(F \cap E)$ est égale à : ☐ 0,03 ☐ 0,027 ☐ 0,93

b. $p(E)$ est égale à : ☐ 0,052 ☐ 0,028 ☐ 0,25

c. La probabilité que l'employé **soit formé** sachant qu'il a **commis une erreur** est environ égale à : ☐ 0,52 ☐ 0,47 ☐ 0,90

d. La probabilité qu'un employé **ne commette pas d'erreur** est égale à :
☐ 0,948 ☐ 0,973 ☐ 0,750

2. Exercice.



Dans une entreprise, **65 %** des employés travaillent en **open space**, les autres travaillent en **bureau individuel**. Parmi les employés en open space, **30 %** se disent **satisfaits** de leurs conditions de travail, tandis que **80 %** des employés en bureau individuel le sont. On choisit un employé au hasard.
On note les événements :
- O : « L'employé travaille en open space. »
- S : « L'employé est satisfait. »

a. Calculer $p(O \cap S)$.

b. Calculer $p(S)$.

c. Quelle est la probabilité que l'employé travaille en **bureau individuel** sachant qu'il est **satisfait** ?

Indépendance de deux événements

DÉFINITION

Deux événements A et B sont dits **indépendants** si la probabilité conditionnelle de A sachant B est égale à la probabilité de A, c'est-à-dire : $\boldsymbol{P_A(B) = P(B)}$.

Propriété

Deux événements A et B sont **indépendants** lorsque :

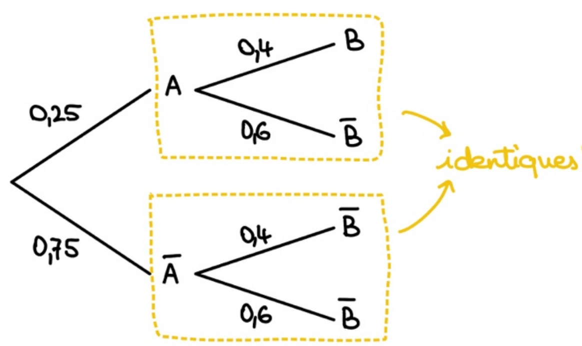
$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Si $p(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si, et seulement si,

$$P_A(B) = p(B)$$

SUCCESSION D'ÉPREUVES

Deux tirages (ou épreuves) sont indépendants quand le résultat de l'un **n'a pas d'influence sur le résultat de l'autre**. On peut alors modéliser cette succession par un arbre dont les sous-arbres associés à la deuxième épreuve sont **identiques**.



Dans le cas d'une succession d'épreuves indépendantes, l'arbre pondéré est pondéré par des probabilités **non conditionnelles**.

MÉTHODE : DÉTERMINER SI DEUX ÉVÉNEMENTS SONT INDÉPENDANTS

On choisit une personne au hasard. On considère les événements :
• D : « La personne choisie est allée chez le dentiste. »
• E : « La personne choisie est un enfant. »
Les événements D et E sont-ils indépendants ?

	Dentiste	Pas dentiste	TOTAL
Enfant	110	90	200
Adulte	290	10	300
TOTAL	400	100	500

1. On détermine $P(D)$ d'une part.

$$P(D) = \frac{400}{500} = 0{,}8$$

2. On détermine $P_E(D)$ d'autre part.

$$P_E(D) = \frac{110}{200} = 0{,}55$$

3. On **compare** $P(D)$ et $P_E(D)$ et on conclut.

$P(D) \neq P_E(D)$ donc les événements P et D ne sont pas indépendants.

Exercices

1. Dans chacun des cas suivants, les épreuves sont-elles indépendantes ?

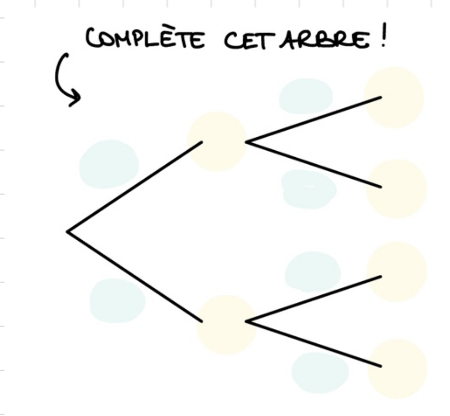
a. On lance un dé deux fois de suite et on observe si le nombre est supérieur ou égal à 5 à chaque lancer. ☐ Oui ☐ Non

b. On tire au hasard deux boules successivement et avec remise dans une urne et on observe la couleur de la boule à chaque tirage. ☐ Oui ☐ Non

c. On tire au hasard deux boules successivement et sans remise dans une urne et on observe la couleur de la boule à chaque tirage ☐ Oui ☐ Non

d. On choisit un élève au hasard à l'école et on s'intéresse à sa classe puis à son âge. ☐ Oui ☐ Non

2. Succession d'événements indépendants.



Pour aller à un concert, Inès et Karim doivent prendre le **métro** puis un **bus**. Des retards **indépendants** l'un de l'autre peuvent arriver sur le réseau métro et sur la ligne de bus.

On estime à **40 %** la probabilité qu'il y ait du retard sur le métro et à **30 %** la probabilité qu'il y ait du retard sur le bus. On considère les événements :
- M : « Le métro a du retard. »
- B : « Le bus a du retard. »

a. Compléter l'arbre de probabilités représentant la situation.
b. Déterminer la probabilité qu'Inès et Karim arrivent **sans aucun retard**.

c. Déterminer la probabilité qu'ils soient retardés **au moins une fois**.

Loi de Bernoulli

ÉPREUVE DE BERNOULLI

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues que l'on peut nommer « succès » ou « échec ».

Au succès, on peut associer le nombre 1 et à l'échec, on peut associer le nombre 0.

Exemple
On lance un dé et on considère par exemple comme succès "obtenir un 1" et comme échec "ne pas obtenir un 1". La loi de Bernoulli associée à cette expérience est :

x_i	1	0
$P(X = x_i)$	1/6	5/6

LOI DE BERNOULLI

Une loi de Bernoulli est la loi de probabilités d'une épreuve de Bernoulli qui suit le schéma suivant :
- la probabilité d'obtenir 1 est égale à p
- la probabilité d'obtenir 0 est égale à 1-p

p est appelé le paramètre de la loi de Bernoulli.

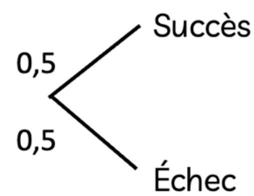
ESPÉRANCE

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre *p*.
Alors : $E(X) = p$

RÉPÉTITIONS D'ÉPREUVES DE BERNOULLI

Plusieurs expériences sont **identiques et indépendantes** si :
- elles ont les mêmes issues,
- chaque issue possède la même probabilité.

Exemple
On lance 20 fois de suite une pièce de monnaie. On considère comme succès "*obtenir Pile*" et comme échec "*obtenir Face*".
Ces expériences de Bernoulli sont identiques et indépendantes.



On dit ici que $p = 0{,}5$ est le paramètre de l'épreuve de Bernoulli répétée 20 fois.

Exercices

1. On tire une carte dans un jeu de 52 cartes. Pour chacune des épreuves suivantes, indiquer s'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli et préciser le succès et sa probabilité le cas échéant.

- On regarde la couleur de la carte (pique, coeur, carreau ou trèfle).
- On vérifie que la carte est un pique.
- On regarde si la carte n'est pas un pique.
- On vérifie que la carte est un as.
- On regarde la valeur de la carte (as, 2, 3, etc.).
- On vérifie que la carte est une figure (roi, dame ou valet).

2. Exercice 2

Pour chaque expérience aléatoire dites si elle constitue un schéma de Bernoulli. Proposez dans ce cas les valeurs des paramètres n et p.

a. Dans un stock de 20 vis, dont 3 sont trop longues, on prélève successivement 15 vis, au hasard et sans remise. pour chacune on regarde si elle est trop longue ou non.

b. On considère une suite de 50 lettres choisies de façon aléatoire. Pour chacune d'entre-elles, on regarde si elle est une voyelle ou non.

3. Exercice 3

Un appareil comporte deux composantes électroniques qui fonctionnent de façon indépendante. On suppose que, pour chacun d'eux, la probabilité de l'événement P « le composant tombe en panne » est égale à 0,01. Démontrer que cette situation est un schéma de Bernoulli dont vous préciserez les paramètres.

4. Exercice 4

Un restaurateur constate qu'au déjeuner, 9 clients sur 10 prennent un café. Quatre clients se présentent pour déjeuner et commandent de façon indépendante. Pour chacun, on note C l'événement « le client prend un café ».
Démontrer que cette situation est un schéma de Bernoulli dont vous préciserez les paramètres.

Variables aléatoires

VARIABLE ALÉATOIRE

Une variable aléatoire réelle X est une fonction qui à chaque issue E_i de l'univers Ω associe un réel x_i.

LOI DE PROBABILITÉ

Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La loi de probabilité de X est donnée par toutes les probabilités $P(X = x_i)$.

les « x_i » sont toutes les valeurs prises par X

MÉTHODE : DÉTERMINER LA LOI DE PROBABILITÉ

Exemple

Soit l'expérience aléatoire : « On lance un dé à six faces et on regarde le résultat. »
L'ensemble de toutes les issues E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} s'appelle **l'univers des possibles**.

On considère le jeu suivant :

- Si le résultat est 5 ou 6, on gagne 2 €.
- Sinon, on perd 1 €.

1. On peut définir ainsi une **variable aléatoire X** sur E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} qui donne le gain et qui peut prendre les valeurs 2 ou –1.
Pour les issues 5 et 6, on a : X = 2 ✅
Pour les issues 1, 2, 3 et 4, on a : X = –1. ✅

2. **Loi de probabilité**

- Il y a **2 issues favorables** pour $X = 2$: $\{5, 6\}$. $P(X = 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- Il y a **4 issues favorables** pour $X = -1$: $\{1, 2, 3, 4\}$. $P(X = -1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Loi de probabilité de X

X	-1	2
$P(X=x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Exercices

1. Cocher la (ou les) réponse(s) exacte(s).

On lance un dé cubique équilibré. Si la face est **impaire**, on gagne **3 euros**, et sinon (face paire) on **perd le triple de la valeur de la face**. On note **X** la variable aléatoire donnant le gain algébrique à ce jeu.

a. $p(X = -12)$ est égale à : ☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{1}{6}$

b. $p(X = 3)$ est égale à : ☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{1}{6}$

c. $p(X = -6)$ est égale à : ☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{1}{6}$

d. $p(X \geq 3)$ est égale à : ☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{1}{6}$

2. Déterminer la loi de probabilité.

Une urne contient dix boules indiscernables au toucher, l'une d'entre elles porte le numéro 10, deux portent le numéro 5, trois portent le numéro 2 et les autres portent le numéro 1. L'expérience consiste à extraire au hasard une boule de l'urne et à noter son numéro X.
Déterminer la loi de probabilité de X.

Espérance, variance, écart-type

Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.
La loi de probabilité de X associe à toute valeur x_i la probabilité $p_i = P(X = x_i)$.

ESPÉRANCE

C'est la **moyenne théorique** des valeurs que peut prendre la variable aléatoire.

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p(X = x_i)$$

VARIANCE

C'est une mesure qui indique à quel point les valeurs de la variable **s'écartent en moyenne de l'espérance**.

$$V(X) = p_1 (x_1 - E(X))^2 + p_2 (x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n (x_n - E(X))^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X = x_i))^2 \, p(X = x_i)$$

ÉCART-TYPE

C'est la racine carrée de la variance, donc une **mesure de la dispersion** exprimée dans la même unité que la variable.

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exercices

1. Cocher la réponse exacte.

On lance un dé cubique équilibré. Si la face est impaire, on perd 4 euros. Si la face est paire, on gagne le triple de la valeur indiquée par la face. On note **X** la variable aléatoire correspondant au **gain algébrique de ce jeu**. On peut utiliser la formule $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

a. $E(X)$ est égale à :	☐ 0	☐ 4	☐ $\frac{7}{2}$	☐ 10
b. $V(X)$ est égale à :	☐ 76	☐ 12	☐ 0	☐ $\frac{195}{2}$
c. $\sigma(X)$ est égale à :	☐ 0	☐ $\sqrt{76}$	☐ $\frac{\sqrt{195}}{2}$	☐ 10

2. Répondre aux questions.

Une urne contient 60 billes numérotées de 1 à 60.
Si le numéro est compris entre 1 et 20, on gagne **4 euros**.
Si le numéro est compris entre 21 et 45, on gagne **2 euros**.
Si le numéro est supérieur ou égal à 46, on **perd 1 euro**.
On note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique à chaque tirage de bille.

1. Donner la loi de probabilité de X (compléter le tableau).

x_i	4	2	-1
$P(X = x_i)$			

2. Calculer l'espérance de X.

3. Calculer la variance et l'écart-type de X.
On peut utiliser la formule $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

Notes personnelles

mes réussites

points à travailler

SOLUTIONS

Calculer les puissances

Exercice 1

Les intrus sont :

- $0{,}035 \times 10^{-2}$
- 4^3
- 6

Exercice 2

a) $5x^2 + x^2 - (2x)^2$
$= 6x^2 - 4x^2 = \boxed{2x^2}$

b) $(5x)^2 - 5x + 5y =$
$\boxed{25x^2 - 5x + 5y}$

c) $(2xy)^2 - 5x + 5y =$
$\boxed{4x^2y^2 - 5x + 5y}$

d) $x^4 + 3x^2 + \frac{x^2}{2} - 2x(3x^2 \cdot x) =$
$x^4 + 3x^2 + \frac{x^2}{2} - 6x^4 =$
$\boxed{-5x^4 + \frac{7}{2}x^2}$

e) $(x^3y)^2 - y^2(x^4) = x^6y^2 -$
$x^4y^2 = \boxed{x^4y^2(x^2-1)}$

Exercice 3

a) $a^{-1}(ab)^2 = a^{-1} \cdot a^2b^2 = \boxed{ab^2}$

b) $(a^2 \cdot ab)^3 = (a^3b)^3 = \boxed{a^9b^3}$

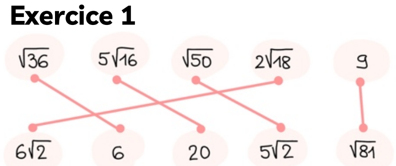
c) $(a^{-3} \cdot ab)^3 = (a^{-2}b)^3 = \boxed{\frac{b^3}{a^6}}$

d) $\frac{a^3b^{-2}}{(ab^2)^{-1}} \times \left(\frac{b^{-1}}{a}\right)^2$
$= a^4 \times a^{-2}b^{-2} = \boxed{\frac{a^2}{b^2}}$

e) $\frac{a}{b^2} \times \frac{b^3}{a^{-1}}$
$=ab^{-2} \cdot b^3 \cdot a = \boxed{a^2b}$

Calculer les racines

Exercice 1



Exercice 2

$\frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{3a^2}} = \frac{2}{\sqrt{3a}}$

$\sqrt{81a^2} \times \sqrt{a} = 9a\sqrt{a}$

$\sqrt{\frac{25a}{a^3}} = \frac{5}{a}$

$\frac{\sqrt{144a^2}}{6a} \times \sqrt{a^4} = 2a^2$

Exercice 3

$\frac{\sqrt{105} \times \sqrt{51}}{3\sqrt{34}} = \frac{\sqrt{105 \times 51}}{3\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{595}}{3\sqrt{34}} =$
$\sqrt{\frac{595}{34}} = \sqrt{\frac{35}{2}} = \frac{\sqrt{70}}{2} = \mathbf{\frac{1}{2}\sqrt{70}}.$

$\frac{3\sqrt{297} \times 2\sqrt{616}}{\sqrt{44}\,\sqrt{396}} = \frac{6\sqrt{27 \times 11 \times 8 \times 7 \times 11}}{\sqrt{4 \times 11 \times 36 \times 11}}$
$= 6\sqrt{\frac{3^3 \times 2^3 \times 7 \times 11^2}{2^2 \times 2^2 \times 3^2 \times 11^2}}$
$= 6\sqrt{\frac{3 \times 7}{2}} = 6\sqrt{\frac{21 \times 2}{2 \times 2}}$

On rend rationnel en multipliant et en divisant par $\sqrt{2}$.

On obtient $6 \times \frac{\sqrt{42}}{2} = \mathbf{3\sqrt{42}}$

$\sqrt{\frac{98}{27}} \times \frac{3\sqrt{72}}{\sqrt{28}} = \frac{7\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \times \frac{18\sqrt{2}}{2\sqrt{7}} =$
$\frac{63 \times 2}{3\sqrt{21}} = \frac{42}{\sqrt{21}} = \frac{42\sqrt{21}}{21} = \mathbf{2\sqrt{21}}$

Calculer les fractions

Exercice 1

$\frac{x^2+1}{x}$	$x+1$	$x+\frac{1}{x}$	$2x+1$
$\frac{3x}{x+6}$	$\frac{x}{x+2}$	$3+\frac{x}{2}$	$\frac{x}{\frac{x}{3}+2}$
$5-\frac{x+1}{3-x}$	$\frac{-6x+14}{3-x}$	$\frac{16-6x}{3-x}$	$\frac{4x-16}{3-x}$

Exercice 2

$A = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{3}{10}$
$= \frac{10}{30} + \frac{9}{30} = \mathbf{\frac{19}{30}}$

$B = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{4} - \frac{5}{8}$
$= \frac{10}{8} - \frac{5}{8} = \mathbf{\frac{5}{8}}$

$C = \frac{\frac{3}{4} - \frac{5}{3}}{\frac{3}{4} + \frac{5}{3}} = \frac{\frac{9}{12} - \frac{20}{12}}{\frac{9}{12} + \frac{20}{12}}$
$= \frac{-\frac{11}{12}}{\frac{29}{12}} = -\frac{11}{12} \times \frac{12}{29} = -\mathbf{\frac{11}{29}}$

$D = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}}{\frac{2}{5} - \frac{5}{4}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{8}{20} - \frac{25}{20}}$
$= \frac{\frac{3}{10}}{-\frac{17}{20}} = -\frac{3}{10} \times \frac{20}{17} = -\mathbf{\frac{6}{17}}$

Exercice 3

$A(x) = \frac{x+3}{x} - \frac{x+1}{x+2}$
$= \frac{(x+3)(x+2) - x(x+1)}{x(x+2)}$
$= \frac{4x+6}{x(x+2)} = \frac{2(2x+3)}{x(x+2)}$

Valeurs interdites :
$x \neq 0, -2$.

$B(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + \frac{x}{x} + 1 = 2$
Valeur interdite : $x \neq 0$.

$C(x) = x - 2 - \frac{x-4}{x+2} =$
$\frac{(x-2)(x+2)-(x-4)}{x+2} = \frac{x^2-x}{x+2} = \frac{x(x-1)}{x+2}$
Valeur interdite : $x \neq -2$.

Calcul littéral

Exercice 1

La bonne réponse est la figure de droite S3.
Le grand carré a une aire de 25 u.a. Le petit carré a une aire de $(x+3)^3$.
L'aire hachurée est la différence donc $25 - (x+3)^3$.

Exercice 2

$\boldsymbol{A} = (x+1)(x-3) - 5(x-2)$
$= x^2 - 3x + x - 3 - 5x + 10$
$= \boldsymbol{x^2 - 7x + 7}$

$\boldsymbol{B} = (3x-5)^2$
$= (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 5 + 5^2$
$= 9x^2 - 30x + 25$
$= \boldsymbol{9x^2 - 30x + 25}$

$\boldsymbol{C} = (10x-7)(10x+7)$
$= (10x)^2 - 7^2$
$= \boldsymbol{100x^2 - 49}$

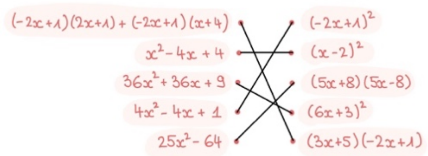
$\boldsymbol{D} = (8x+5)^2$
$= (8x)^2 + 2 \cdot 8x \cdot 5 + 5^2$
$= 64x^2 + 80x + 25$
$= \boldsymbol{64x^2 + 80x + 25}$

$\boldsymbol{E} = (6x-2)^2 - (2x+5)^2$
$= (36x^2 - 24x + 4) - (4x^2 + 20x + 25)$
$= 36x^2 - 24x + 4 - 4x^2 - 20x - 25$
$= \boldsymbol{32x^2 - 44x - 21}$

Exercice 3

$A = 7(2x - 5)$
$B = 10(2a + 1)$
$C = 6x(2x + 1)$
$D = (x + 2)(x - 2)$
$E = (2x - 1)(x + 2)$

Exercice 4



Équations et inéquations

Exercice 1

- $2x(5-2x)=0$ a pour solution $\{0;\frac{5}{2}\}$
- $(3x-4)(x+5)=0$ a pour solution $\{\frac{4}{3};-5\}$
- $\frac{3x+6}{x-7}=0$ existe si $x\neq7$ a pour solution -2
- $\frac{x-4}{x^2-1}=0$ existe si $x\neq-1$ et $x\neq1$ a pour solution 4

Exercice 2

$x = 3$ *et* $x \neq -4$	$x = -8$ *et* $x \neq -\frac{5}{2}$
$x = \frac{1}{3}$ *et* $x \neq -2$	$x = -\frac{2}{5}$ *et* $x \neq 1$ *et* $x \neq -\frac{4}{3}$

Exercice 3

$S =]-\frac{1}{2};3[$

x		$-\frac{1}{2}$		3	
$2x+1$	$-$	0	$+$	|	$+$
$x-3$	$-$	|	$-$	0	$+$
$(2x+1)\times(x-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$S =]-\infty;-\frac{1}{3}] \cup [5;+\infty[$

x		$-\frac{1}{3}$		5	
$3x+1$	$-$	0	$+$	|	$+$
$x-5$	$-$	|	$-$	0	$+$
$(x-5)\times(3x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Étude du signe de $ax + b$

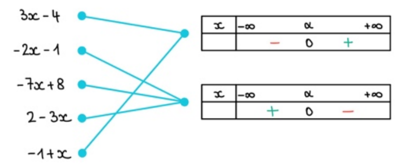
Exercice 1

x		$\frac{5}{2}$	
$-2x+5$	+	0	-

Exercice 2

x		2	
$3x-6$	-	0	+

Exercice 3



Exercice 4

Les courbes en bleu, noir, et orange.

Étude du signe de $a(x - x_1)(x - x_2)$

Exercice 1

x		-5		4	
3	$+$	|	$+$	|	$+$
$x+5$	$-$	0	$+$	|	$+$
$x-4$	$-$	|	$-$	0	$+$
$A(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Exercice 2

x		-2		1	
-2	$-$	|	$-$	|	$-$
$x+2$	$-$	0	$+$	|	$+$
$x-1$	$-$	|	$-$	0	$+$
$B(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Exercice 3

a. $g(x) < 0$ pour tout réel x.
→ **Faux** (il est positif hors $[-4{,}2]$)

b. $g(x)$ est d'abord négative, puis positive. → **Faux** (il est **positif**, puis **négatif**, puis **positif**)

c. $g(x) \geq 0$ si $x \in [-4; 2]$.
→ **Faux** (entre -4 et 2, $g(x) < 0$, sauf aux bornes où $g = 0$)

d. $g(x)$ change deux fois de signe.
→ **Vrai** (changement à -4 puis à 2)

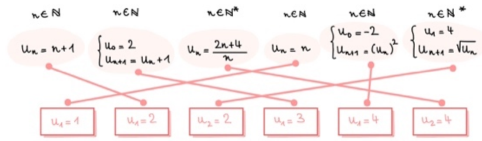
e. $g(x) \geq 0$ si $x \in]-\infty; -4] \cup [2; +\infty[$.
→ **Vrai**

Exercice 4

Les courbes en vert, violet et bleu.

C'est quoi, une suite ?

Exercice 1



Exercice 2

a. $u_0 = 2; u_1 = 3; u_2 = 6$

b. $u_{n+1} = (n+1)^2 + 2 = n^2 + 2n + 3$
$u_n + 1 = n^2 + 3$

Exercice 3

a. Calcul des premiers termes :

- $v_0 = 7$
- $v_1 = v_0 + 3 = 7 + 3 = 10$
- $v_2 = v_1 + 3 = 10 + 3 = 13$

b. Calcul des premiers termes

- $w_1 = -3$
- $w_2 = w_1 \times (-2) = -3 \times (-2) = 6$
- $w_3 = w_2 \times (-2) = 6 \times (-2) = -12$

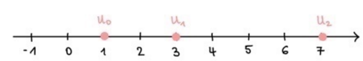
Représentation graphique

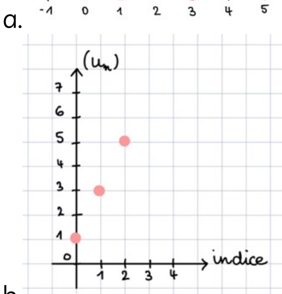
Exercice 1

$u_0 = 1; u_1 = 2$
$v_0 = -2; v_1 = 1; v_2 = 2$

Exercice 2

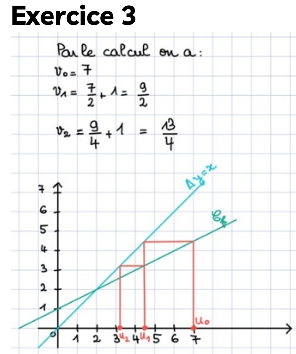
a.





b.

Exercice 3

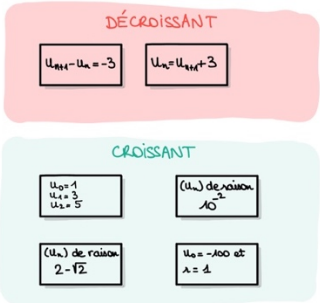


Suites arithmétiques

Exercice 1

a. Oui
b. Non car une suite arithmétique doit être monotone
c. Non
d. Oui
e. Oui

Exercice 2



Exercice 3

Cas 1

$$\begin{cases} u_4 = 12 = u_0 + 4r \\ u_9 = -8 = u_0 + 9r \end{cases}$$

Par soustraction membre à membre :

$-8 - 12 = 9r - 4r$

$\Leftrightarrow -20 = 5r$

$r = -4$

D'où $u_4 = 12 = u_0 + 4 \times (-4)$

$= u_0 - 16$

$u_0 = 28$

Le premier terme est donc $u_0 = 28$ et la raison est $r = -4$.

Cas 2

$$\begin{cases} u_{27} = 7 = u_0 + 27r \\ u_{10} = \dfrac{15}{7} = u_0 + 10r \end{cases}$$

Par soustraction membre à membre :

$7 - \dfrac{15}{7} = 27r - 10r = 17r$

$\Leftrightarrow \dfrac{34}{7} \times \dfrac{1}{17} = r$

$r = \dfrac{2}{7}$

D'où

$u_{10} = \frac{15}{7} = u_0 + 10 \times \frac{2}{7} = u_0 + \frac{20}{7}$

$u_0 = -\frac{5}{7}$

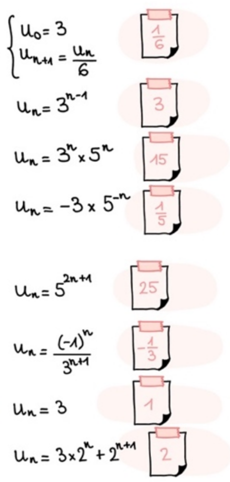
Le premier terme est donc $u_0 = -\frac{5}{7}$ et la raison est $r = \frac{2}{7}$.

Suites géométriques

Exercice 1

a. Non
b. Non
c. Non
d. Oui
e. Oui

Exercice 2



Exercice 3

a. $u_2 = u_1 \times q = 5 \times (-3)$
$= -15$

Pour $n \geq 1 : u_n = u_1 \times q^{n-1}$

Donc :

$u_{15} = 5 \times (-3)^{15-1} = 5 \times (-3)^{14}$
$= 23\,914\,845$

b. $u_n = u_0 \times q^n$

donc $u_5 = -20 = u_0 \times q^5$ et

$u_9 = -80 = u_0 \times q^9 = u_0 \times q^5 \times q^4$
$= -20q^4$

$-80 = -20q^4 \Leftrightarrow q^4 = \dfrac{-80}{-20} = 4$

$\Leftrightarrow q^2 = \sqrt{4} = 2$

$\Leftrightarrow q = \sqrt{2}\ ou\ q = -\sqrt{2}$

Variations d'une suite

Exercice 1

a. Vrai
b. Faux
c. Vrai
d. Faux, cela dépend du signe du premier terme
e. Vrai

Exercice 2

a. $u_n = (n-1)^2 - n^2 = 1 - 2n$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = (-2) < 0.$

La suite est **strictement décroissante**.

b. $u_n = -5(-2)^n = -5(-1)^n 2^n$.

Le rapport $u_{n+1}/u_n = -2 <$ 0 (changement de signe, valeurs en module croissantes).

La suite n'est **ni croissante ni décroissante** (elle alterne et diverge).

c. $u_n = \frac{5}{3^n} = 5(\frac{1}{3})^n$.

Suite géométrique de raison $r = \frac{1}{3}$. Le premier terme est positif, donc la suite est **strictement décroissante**.

d. $u_0 = -\frac{1}{2}$ et $u_{n+1} - u_n = \frac{7}{2} > 0.$

Différence constante positive ⇒ suite arithmétique de raison $\frac{7}{2}$.

La suite est donc **strictement croissante**.

Somme d'une suite

Exercice 1

On utilise les formules de somme :

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

De manière générale, la somme est donnée par la formule :

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

$A = 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55$

$B = 1 + 2 + 3 + \cdots + 50 = \frac{50 \times 51}{2} = 1275$

$C = 1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = \frac{100 \times 101}{2} =$ 5050

$D = 2 + 4 + 6 + \cdots + 100$

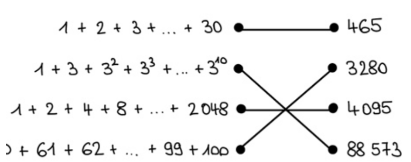
$= 2(1 + 2 + \cdots + 50) = 2 \times 1275$

$= 2550$

$E = 11 + 12 + \cdots + 20$

$= 10 \times \frac{11+20}{2} = 155$

Exercice 2



Exercice 3

a. Suite arithmétique :

- raison : $r = 3$
- premier terme : $u_0 = -2$
- nombre de termes : 50 → ce sont $u_0, u_1, \ldots, u_{49}$

Calcul du terme u_{49}
$u_n = u_0 + nr$
$u_{49} = -2 + 49 \times 3$
$-2 + 147 = 145$

Somme des 50 termes
$$S_{50} = \frac{(u_0 + u_{49}) \times 50}{2}$$
$$S_{50} = \frac{(-2 + 145) \times 50}{2}$$
$$S_{50} = \frac{143 \times 50}{2} = 143 \times 25 = \boxed{3575}$$

b. Somme $S = v_4 + v_5 + \cdots + v_{12}$
Suite géométrique :

- raison : $q = 2$
- premier terme : $v_0 = 3$

Expression d'un terme
$$v_n = v_0\, q^n = 3 \cdot 2^n$$

Somme des termes du rang 4 à 12.
C'est une somme partielle d'une suite géométrique :
$$S = v_4 + v_5 + \cdots + v_{12}$$

Nombre de termes :
$$12 - 4 + 1 = 9$$

Formule de somme géométrique :
$$v_4 + v_5 + \cdots + v_{12} = v_4 \cdot \frac{1 - q^9}{1 - q}$$

Comme $q = 2$, on obtient :
$$v_4 = 3 \cdot 2^4 = 48$$
$$S = 48 \cdot \frac{1 - 2^9}{1 - 2} = 48 \cdot (2^9 - 1)$$
$$2^9 = 512 \Rightarrow 512 - 1 = 511$$
$$S = 48 \times 511 = \boxed{24528}$$

Fonction affine

Exercice 1

a. Affine
b. Non affine
c. Non affine
d. Affine
e. Affine (les x^2 s'annulent !)
f. Affine

Exercice 2

a. $f(-2) = -6$ et $f(4) = 3$
On calcule le coefficient directeur
$$a = \frac{3 - (-6)}{4 - (-2)} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$
On détermine b à l'aide de $f(4) = 3$
$$3 = \frac{3}{2} \times 4 + b$$
$$3 = 6 + b$$
$$b = -3$$
Donc $\boxed{f(x) = \frac{3}{2}x - 3}$

b. $g(2) = 12$ et $g(6) = 2$
Coefficient directeur
$$a = \frac{2 - 12}{6 - 2} = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2}$$
On détermine b avec $g(2) = 12$
$$12 = -\frac{5}{2} \times 2 + b$$
$$12 = -5 + b$$
$$b = 17$$
Donc $\boxed{g(x) = -\frac{5}{2}x + 17}$

c. $h(-1) = 5$ et $h(2) = 8$
Coefficient directeur
$$a = \frac{8 - 5}{2 - (-1)} = \frac{3}{3} = 1$$
On détermine b avec $h(2) = 8$
$$8 = 1 \times 2 + b$$
$$b = 6$$
Donc $\boxed{h(x) = x + 6}$

d. La fonction k passe par $A(0; 4)$ et $B(2; 0)$.
Coefficient directeur
$$a = \frac{0 - 4}{2 - 0} = -2$$
Comme $A(0; 4)$ appartient à la droite, on lit directement l'ordonnée à l'origine $b = 4$
Donc $\boxed{k(x) = -2x + 4}$

Exercice 3

a. $f(x) = (x + 4)^2 - x^2$
On développe
$$(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$$

Donc
$$f(x) = x^2 + 8x + 16 - x^2$$
$$f(x) = 8x + 16$$

La fonction est de la forme $ax + b$.
✅ **La fonction est affine**

b. $g(x) = (x - 1)^2 - 6x^2$
On développe
$$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$$
Donc
$$g(x) = x^2 - 2x + 1 - 6x^2$$
$$g(x) = -5x^2 - 2x + 1$$
Cette expression contient un terme en x^2.
❌ **La fonction n'est pas affine**

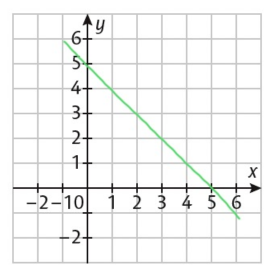
Exercice 4

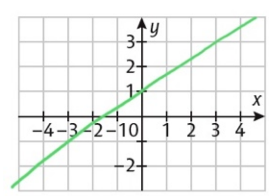
On cherche à savoir si les points $A(-1; -2)$, $B(2; 3)$ et $C(5; 8)$ appartiennent à la représentation graphique d'une **fonction affine**.
Une fonction affine a une représentation graphique qui est une **droite**. Les trois points doivent donc être **alignés**.

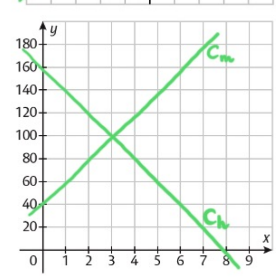
On calcule le coefficient directeur de la droite passant par A et B
$$m_{AB} = \frac{3 - (-2)}{2 - (-1)} = \frac{5}{3}$$
On calcule le coefficient directeur de la droite passant par B et C
$$m_{BC} = \frac{8 - 3}{5 - 2} = \frac{5}{3}$$
Les coefficients directeurs sont égaux, donc les points sont alignés.
Les points A, B et C appartiennent à la représentation graphique d'une fonction affine.
On peut même déterminer cette fonction
$$f(x) = \frac{5}{3}x - \frac{1}{3}$$

Représentation graphique d'une fonction affine

Exercice 1







Exercice 2

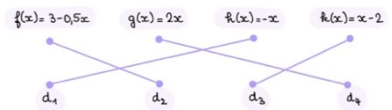
$f_1(x) = \frac{2}{3}x$

$f_2(x) = \frac{3}{2}x - 1$

$f_3(x) = -x + 2$

$f_4(x) = 2$

Exercice 3



Polynôme de second degré

Exercice 1

a. Oui. $a = 3$; $b = 1$ *et* $c = -1$

b. Non. Il y a un terme en x^3

c. Oui.

$$a = \pi \,;\ b = -(1+\pi)\ et\ c = \pi$$

d. Oui. $a = \frac{3}{2}$ et $b = 0$ *et* $c = -\frac{1}{2}$

e. Non. Il y a un terme en $\frac{1}{x}$

Exercice 2

a. $f(x) = (x+2)^2 + 5$

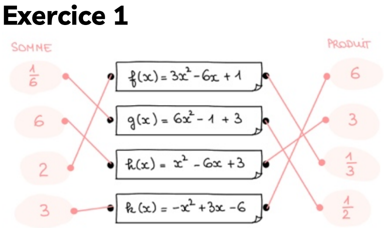
b. $f(x) = (x-3)^2 - 9$

c. $f(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$

d. $f(x) = (x-3)^2 - 25$

Équation du second degré

Exercice 1



Exercice 2

- $2x^2 - 2x - 3 = 0$

Solutions : $x = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$ ou $x = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$

- $3x + 3x^2 = -1$

$\Delta < 0$ donc pas de solution réelle.

- $8x^2 - 4x + 2 = \frac{3}{2}$

On multiplie par 2 pour simplifier :

$16x^2 - 8x + 1 = 0$

$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 1 = 64 - 64 = 0$

Donc une seule solution :

$$x = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

Solution : $x = \frac{1}{4}$

- $-2(x-1)^2 - 3 = 0$

$-2(x-1)^2 = 3$

$(x-1)^2 = -\frac{3}{2}$

Un carré ne peut pas être négatif. Aucune solution réelle.

- $(x+2)(3-2x) = 0$

Produit nul ⇒ un des deux facteurs vaut 0.

Cas 1 : $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

Cas 2 :

$$3 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Solutions $\boldsymbol{x = -2}$ **ou** $\boldsymbol{x = \frac{3}{2}}$

Variation d'un trinôme

Exercice 1

a. $x = 3$

b. décroissante

c. -2

Exercice 2

a. $f(x) = x^2 + 3x + 3$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

b. $f(x) = -2x^2 + 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

c. $f(x) = (1-x)(1+x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Exercice 3

Le sommet de la parabole est $M(3;0)$.

Ainsi $f(x) = a(x-3)^2$.

On sait que le point $N(0;3)$ appartient à la parabole. Donc $f(0) = a(-3)^3 = 3 \iff 9a = 3 \iff a = \frac{1}{3}$

La forme factorisée est $f(x) = \frac{1}{3}(x-3)^2$

Signes d'un trinôme

Exercice 1

$A(x) = 2x^2 - 8x + 6$

Le coefficient principal est $a > 0$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$B(x) = -3x^2 - 11x + 4$

Le coefficient principal est $a < 0$.

x	$-\infty$		-4		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$Q(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$R(x) = x^2 - 10x + 38$

Pas de racine. Le coefficient principal est $a = 1 > 0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$R(x)$		$+$	

Exercice 2

$A(x) = x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$

Le polynôme possède deux racines -3 et 3. Le coefficient principal est $a = 1 > 0$.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$B(x) = -2x^2 - 8x = -2x(x+4)$

Le polynôme possède deux racines 0 et -4. Le coefficient principal est $a = -2 < 0$.

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$F(x) = 3x - 2x^2 - 1$

On calcule le discriminant

$$\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$$

Il y a donc deux racines réelles:

$x_1 = \frac{-3-1}{-4} = 1$ et $x_2 = \frac{-3+1}{-4} = \frac{1}{2}$

Le coefficient principal est $a = -2 < 0$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$F(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Inéquations de second degré

a. $3x^2 > 2x + 1$

On met tous les termes du même côté : $3x^2 - 2x - 1 > 0$

Calcul du discriminant :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 4 + 12 = 16$$

Racines :

$$x_1 = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}, x_2 = \frac{2+4}{6} = 1$$

Le trinôme est **positif** à l'extérieur des racines (car $a > 0$) :

$$\boxed{x < -\frac{1}{3} \text{ ou } x > 1}$$

b. $x^2 \leq 6x - 1$
On met tous les termes du même côté : $x^2 - 6x + 1 \leq 0$
Discriminant :
$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \cdot 1 = 36 - 4 = 32$

Racines :

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{32}}{2} = 3 - 2\sqrt{2}$$
$$x_2 = \frac{6 + \sqrt{32}}{2} = 3 + 2\sqrt{2}$$

Le trinôme est **négatif ou nul** entre les racines (car $1 > 0$) :

$$\boxed{3 - 2\sqrt{2} \leq x \leq 3 + 2\sqrt{2}}$$

c. $\frac{2x^2-12x+19}{x-2} \leq 0$

Domaine : $x \neq 2$.

Étude du numérateur
$2x^2 - 12x + 19$

Discriminant :
$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 2 \times 19$
$= 144 - 152 = -8 < 0$
⇒ pas de racine réelle, et $2 > 0$, donc $2x^2 - 12x + 19 > 0$
pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Le signe de la fraction est donc le **même que celui de** $x - 2$:

- si $x - 2 < 0$ (i.e. $x < 2$), la fraction est **négative** ;
- si $x - 2 > 0$ (i.e. $x > 2$), la fraction est **positive**.

Comme le numérateur n'est jamais nul, la fraction n'est **jamais égale à 0**.

Donc

$$\frac{2x^2 - 12x + 19}{x - 2} \leq 0 \Leftrightarrow x < 2.$$
$$\boxed{S_c = \ ]-\infty, 2[}$$

d. $\frac{1}{x} > \frac{x}{x+2}$
$\Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{x}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+2-x^2}{x(x+2)} > 0$

On calcule le discriminant de $x + 2 - x^2$ avec $a = -1$, $b = 1$ et $c = 2$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 8 = 9 > 0$$

Il y a donc deux racines réelles :
$x_1 = \frac{-1-\sqrt{9}}{-2} = 2$ et
$x_2 = \frac{-1+\sqrt{9}}{-2} = -1.$

$x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -2$ et $x(x+2) > 0$
$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[.$

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		0		2	
$x+2-x^2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
x		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$\frac{x+2-x^2}{x(x+2)}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$

L'ensemble des solutions est donc

$$\boxed{S_d = \ ]-2, -1[\ \cup \ ]0,2[}$$

Polynôme de degré 3

Exercice 1

- $f(x) = -2x^3$

Le coefficient devant x^3 est $a = -2 < 0$.
Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

- $g(x) = x^3 + 5$

Le coefficient devant x^3 est $a = 1 > 0$.
Donc g est croissante sur $\mathbb{R}$.

- $h(x) = 3 - 4x^3$

On réécrit $h(x) = -4x^3 + 3$.
Le coefficient devant x^3 est $a = -4 < 0$. Donc h est décroissante sur $\mathbb{R}$.

- $p(x) = 0{,}5x^3 - 1$

Le coefficient devant x^3 est $a = 0{,}5 > 0$. Donc p est croissante sur $\mathbb{R}$.

- $q(x) = (\pi - 4)x^3 + 2$

Le coefficient devant x^3 est $a = \pi - 4 < 0$. Donc q est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

a. Signe de a
La courbe a la forme de x^3 **montante** : quand x augmente, $f(x)$ augmente.
Donc $a > 0$.

b. Lecture graphique de $f(2)$
À l'abscisse $x = 2$, on lit environ :

$$f(2) = 4.$$

c. Valeur de a
On sait que $f(x) = ax^3$, donc :

$$f(2) = a \cdot 2^3 = 8a.$$

Or $f(2) = 4$, donc :

$$8a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Conclusion : $a = \frac{1}{2}$.

Exercice 3

a. Valeurs de x_1, x_2, x_3
Ce sont les **abscisses des points d'intersection** avec l'axe des abscisses. D'après le graphique :

$$x_1 = -2, x_2 = 3, x_3 = 5.$$

b. Valeur de $f(0)$ puis de a
Lecture graphique :

$$f(0) = 60.$$

Or

$$f(0) = a(0 - x_1)(0 - x_2)(0 - x_3)$$
$$= a(0 + 2)(0 - 3)(0 - 5)$$
$$= a \cdot 2 \cdot (-3) \cdot (-5) = 30a.$$

Donc $30a = 60 \Rightarrow a = 2$.

c. Tableau de signes

x	$-\infty$		-2		3		5		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Équation du 3e degré

1. $x^3 = 27$
On cherche le nombre dont le cube vaut 27. Or $3^3 = 27$.
Donc la solution est : $x = 3$.

2. $x^3 = -64$
On cherche le nombre dont le cube vaut -64.
Or $(-4)^3 = -64$.
Donc : $x = -4$.

3. $5x^3 = 40$
On isole x^3 :

$$5x^3 = 40 \Rightarrow x^3 = \frac{40}{5} = 8.$$

Or $2^3 = 8$.
Donc : $x = 2$.

4. $2x^3 - 7 = 9$
On isole le terme en x^3 :

$$2x^3 - 7 = 9 \Rightarrow 2x^3 = 16 \Rightarrow x^3 = 8.$$

Or $2^3 = 8$.
Donc : $x = 2$.

5. $(x+2)^3 = 125$
On utilise que $125 = 5^3$.
Donc :

$$(x+2)^3 = 5^3 \Rightarrow x+2 = 5.$$

Alors : $x = 5 - 2 = 3$.

6. $(2x-1)^3 = 216$
On reconnaît $216 = 6^3$.
Donc :

$$(2x-1)^3 = 6^3 \Rightarrow 2x - 1 = 6.$$

Alors :

$$2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2} = 3{,}5.$$

Dérivée en un point

Exercice 1

1.
- Faux : f est dérivable en -2
- Vrai

2.
- Vrai
- Vrai

Exercice 2

a. $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{h^2-0}{h} = h$

b. $\lim\limits_{h\to 0} h = 0$ donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$

Exercice 3

Soit h un réel non nul, proche de 0:

a. $\frac{g(h)-g(0)}{h} = \frac{\frac{1}{2h+1}-1}{h} = \frac{\frac{1-2h-1}{2h+1}}{h}$
$= \frac{-2h}{h\times(2h+1)} = \frac{-2}{2h+1}$

b. $\lim\limits_{h\to 0} 2h + 1 = 1$
d'où $\lim\limits_{h\to 0} \frac{-2}{2h+1} = -2$ donc g est dérivable en 0 et $\boldsymbol{g'(0) = -2}$.

Fonctions dérivées

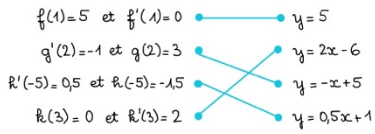
Exercice 1

Exercice 2

$f_1'(x) = 5x - 3$
$f_2'(x) = -12x^2 + 3x$
$f_3'(x) = 28x^3 - 10x + 1$
$f_4'(x) = -\frac{15}{2}x^4 + 12x^2 - 2$
$f_5'(x) = 36x^5 - 20x^3 + 6x$
$f_6'(x) = -14x^6 + \frac{20}{3}x^3 - 2x$
$f_7'(x) = 4x^7 - 15x^4 + 6x^2 - 1$
$f_8'(x) = -36x^8 + 18x^5 - \frac{15}{2}x^2 + 7$

Tangente en un point

Exercice 1



Exercice 2

$f(0) = 0$
$f'(0) = 0$
$f(3) = 0$
$f'(3) = \frac{9}{4}$

Exercice 3

a.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $a = 0$ est
$y = f'(0)\,(x-0) + f(0)$.
$f'(x) = 3x^2 - 3$
Donc $f'(0) = -3$
De plus $f(0) = 1$.
Une équation de la tangente est par conséquent

$$y = -3x + 1.$$

b.
La fonction f est dérivable sur $]-\infty\,;\,3[\cup]3\,;\,+\infty[$.
Une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $a = 1$ est
$y = f'(1)\,(x-1) + f(1)$.

Pour déterminer l'expression de f' on applique la formule
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = 3x - 9$.

Donc $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 3$.
Ainsi :
$f'(x) = \frac{2x(3x-9) - 3(x^2)}{(3x-9)^2}$
$= \frac{6x^2 - 18x - 3x^2}{(3x-9)^2}$
$= \frac{3x^2 - 18x}{(3x-9)^2}$.

Ainsi $f'(1) = -\frac{5}{12}$. De plus $f(1) = -\frac{1}{6}$.
Une équation de la tangente est par conséquent
$y = -\frac{5}{12}(x-1) - \frac{1}{6}$ soit $y = -\frac{5}{12}x + \frac{1}{4}$.

c. La fonction f est dérivable sur $]-\infty\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$.
Une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $a = 2$ est
$y = f'(2)\,(x-2) + f(2)$.

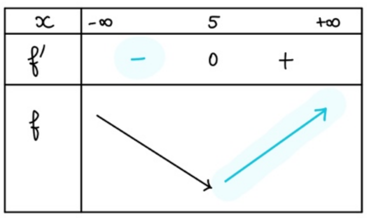
Pour déterminer l'expression de f' on applique la formule
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = x + 1$ et $v(x) = x - 1$.

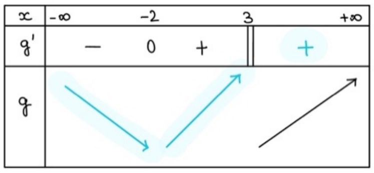
Donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1$.
$f'(x) = \frac{x - 1 - (x+1)}{(x-1)^2}$
$= \frac{-2}{(x-1)^2}$.

Donc $f'(2) = -2$.
De plus $f(2) = 3$.
Une équation de la tangente est par conséquent
$y = -2(x-2) + 3$ soit
$y = -2x + 7$.

Dérivées et variations

Exercice 1





Exercice 2

La fonction f est définie pour tout réel x vérifiant $x + 2 \neq 0$ soit $x \neq -2$.
Ainsi l'ensemble de définition de f est $\mathcal{D}_f =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$.
La fonction f est également dérivable sur $\mathcal{D}_f$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathcal{D}_f$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathcal{D}_f$.
f est de la forme $\frac{u}{v}$. On utilise donc la formule

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

avec

$u(x) = x^2 - 1$ et $v(x) = x + 2$.

On a donc

$u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 1$.

$$f'(x) = \frac{2x(x+2) - (x^2-1)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 4x - x^2 + 1}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x+2)^2}$$

Le signe de $f'(x)$ ne dépend que de celui de $x^2 + 4x + 1$.

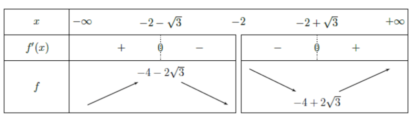
$$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 1 = 12 > 0$$

Il y a donc deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{12}}{2} = -2 - \sqrt{3} \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-4 + \sqrt{12}}{2} = -2 + \sqrt{3}$$

Puisque $a = 1 > 0$ on obtient le tableau de variation suivant :



La fonction f est donc **croissante** sur $]-\infty; -2-\sqrt{3}]$ et $[-2+\sqrt{3}; +\infty[$ et **décroissante** sur $[-2-\sqrt{3}; -2[$ et $]-2; -2+\sqrt{3}]$.

Extremum

Exercice 1

Affine : Pas d'extremum sur $\mathbb{R}$

Carré : Minimum en O(0;0)

Cube : Pas d'extremum sur $\mathbb{R}$

Racine carrée : Minimum en O(0;0)

Exercice 2

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

$$= \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$$

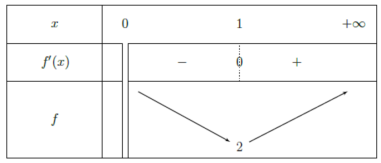
Sur $]0; +\infty[$, on sait que x^2 et $x + 1$ sont positifs.

Le signe de $f'(x)$ ne dépend donc que de celui de $x - 1$.

$$x - 1 = 0 \iff x = 1$$

$$x - 1 > 0 \iff x > 1$$

On obtient par conséquent le tableau de variation suivant :



Proportion et pourcentage

Exercice 1

$\mathbf{10\% \times 250 = 25}$

$\mathbf{17\% \times 38 = 6,46}$

$\mathbf{32\% \times 70 = 22,4}$

$\mathbf{20\% \times 46 = 9,2}$

$\mathbf{25\% \times 54 = 13,5}$

Exercice 2

La proportion de salariés qui part en vacances en juillet est de $\frac{30}{100}$.

Le nombre de personnes parties en vacances en juillet est de 150 donc $n_A = 150$, on cherche la valeur de n_E.

$$P = \frac{150}{n_E} = \frac{30}{100}$$

on en déduit que n_E

$$= \frac{150 \times 100}{30} = 500$$

Le nombre de salariés de cette entreprise est de 500.

Exercice 3

E est la population Française.

A est la population de groupe sanguin O (A est une sous population de E).

B est la population de groupe sanguin O et Rhésus – (E est une sous population de A).

Le pourcentage de personnes de groupe O– est :

$$P = \frac{42}{100} \times \frac{14}{100} = \frac{588}{10\,000} = \frac{5{,}88}{100}$$

$= 0{,}0588$

Variation et évolution

Exercice 1

Vrai, Faux, Faux, Faux, Vrai

Exercice 2

56%

Baisse de 19%

+4%

-9%

Exercice 3

Évolution 1		Évolution 2		Évolution globale	
t_1	c_1	t_2	c_2	C	T
-5%	0,95	+30%	1,30	1,235	+23,5%
-12%	0,88	-12%	0,88	0,774	-22,56%
+4,5 %	1,045	+3,5 %	1,035	1,082	+8,16%

Calculer une probabilité

Exercice 1

a. 0,25 ; b. 0,1 ; c. 0,75

Exercice 2

a. 1 ; b. 0,6 ; c. 0,5

Exercice 3

$p(A) = \frac{3}{7}$; $p(B) = \frac{4}{7}$; $p(C) = \frac{2}{7}$

$A \cap B = \{3; 4\}$ donc $p(A \cap B) = \frac{2}{7}$

$A \cup C = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

donc $p(A \cup C) = \frac{5}{7}$

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A) = \frac{4}{7}$$

$$p(\bar{B}) = 1 - p(B) = \frac{3}{7}$$

$p(A \cup B)$

$= p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$$= \frac{3}{7} + \frac{4}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

Fréquences conditionnelles et marginales

Exercice 1

a. Vrai

b. Faux

c. Faux

d. Vrai

Exercice 2

a.La fréquence de t-shirts rouges est

$$\frac{90}{180} = 0{,}50 = 50\,\%$$

b.Dans le stock des t-shirts de taille L, la fréquence de t-shirts bleus est

$$\frac{29}{64} \approx 0{,}45 = 45\,\%$$

c. Parmi les t-shirts bleus, la fréquence de ceux de taille M est

$$\frac{31}{90} \approx 0{,}34 = 34\,\%$$

Exercice 3

a. Il y a **250 clubs de basket** sur **800 clubs** au total.

$$\frac{250}{800} = 0{,}3125 \approx 0{,}31$$

b. Il y a **280 clubs de football au stade** sur **800** au total.

$$\frac{280}{800} = 0{,}35$$

c. Parmi les **330 clubs qui s'entraînent en gymnase**, **210 sont des clubs de basket**.

$$\frac{210}{330} \approx 0{,}636 \approx 0{,}64$$

d. Le nombre **150** correspond aux **clubs de natation**.
Le nombre **800** correspond au **nombre total de clubs**.
👉 Le calcul $\frac{150}{800} \approx 0{,}19$ représente donc **la fréquence des clubs de natation parmi l'ensemble des clubs**.

Tableau d'effectifs

Exercice 1

	Action	Comédie
Séance du soir	36	108
Séance de l'après-midi	84	132
Total	120	240

Exercice 2

Multiples de 3 entre 1 et 72 : $72 \div 3 = 24$
Non multiples de 3 : $72 - 24 = 48$

Rouges parmi les multiples de 3 : $\frac{1}{3} \times 24 = 8$
Vertes parmi les multiples de 3 : $24 - 8 = 16$

Vertes parmi les non multiples de 3 : $\frac{3}{4} \times 48 = 36$
Rouges parmi les non multiples de 3 : $48 - 36 = 12$

Totaux rouges : $8 + 12 = 20$
Totaux vertes : $16 + 36 = 52$
Vérif : $20 + 52 = 72$

	Multiple de 3	Non multiple de 3	Total
Rouge	8	12	20
Verte	16	36	52
Total	24	48	72

Exercice 3

	Café	Thé	Total
Matin	30	20	50
Après-midi	30	70	100
Total	60	90	150

Probabilités conditionnelles

Exercice 1

Effectif total : **294**

a. Il y a 120 spectateurs qui préfèrent le rock. $P(\text{Rock}) = \frac{120}{294} = \frac{40}{98} \approx 0{,}41$

b. Il y a 54 spectateurs avec un pass week-end qui préfèrent la pop.
$P(\text{Week-end} \cap \text{Pop}) = \frac{54}{294} = \frac{18}{98} \approx 0{,}18$

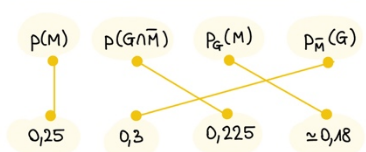
c. Parmi les 150 spectateurs avec un pass journée, 66 préfèrent l'electro.
$P_{\text{Pass journée}}(\text{Electro}) = \frac{66}{150} = \frac{22}{50} = 0{,}44$

Exercice 2

1. $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$
$p_A(B) = \frac{0{,}18}{0{,}60} = 0{,}30$
2. $p_F(E) = \frac{p(F \cap E)}{p(F)}$
$p(F \cap E) = p_F(E) \times p(F)$
$= 0{,}50 \times 0{,}30 = 0{,}15$

Exercice 3

	Placebo	Médicament	TOTAL
Guéri	18	4	22
Non guéri	42	16	58
TOTAL	60	20	80



Arbre de probabilités

Exercice 1

a. Vrai
b. Faux
c. $p(D \cap E) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$. Vrai
d. $p(\bar{D} \cap E) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$. Faux
e. $p(D) = \frac{2}{3}$; $p_D(E) = \frac{1}{4}$
f. $p(D \cap \bar{E}) = p(D) \times p_D(\bar{E})$
$= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$
$p(\bar{D} \cap \bar{E}) = p(\bar{D}) \times p_{\bar{D}}(\bar{E})$
$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$
g. $p(\bar{E}) = p(D \cap \bar{E}) + p(\bar{D} \cap \bar{E})$
$p(\bar{E}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{15} = \frac{17}{30}$

Exercice 2

a. $\mathrm{p(G)} = 0{,}63$; $\mathrm{p_G(H)} = 0{,}52$; $\mathrm{p_G(\bar{H})} = 0{,}48$

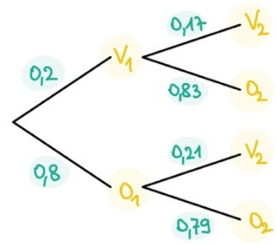
b. $\mathrm{p(G \cap H) = p(G) \times p_G(H)}$
$= 0{,}63 \times 0{,}52 = 0{,}3276$

$\mathrm{p(\bar{G} \cap H) = p(\bar{G}) \times p_{\bar{G}}(H)}$
$= 0{,}37 \times 0{,}30 = 0{,}111$

c. $\mathrm{p(H) = p(G \cap H) + p(\bar{G} \cap H)}$
$\mathrm{p(H)} = 0{,}3276 + 0{,}111 = 0{,}4386$

Exercice 3

Attention : au 2e niveau, il ne reste que 24 boules !



Inverser le conditionnement

Exercice 1

a. $p(F \cap E) = p(F) \times p_F(E)$
$= 0{,}90 \times 0{,}03 = 0{,}027$
Bonne réponse : 0,027

b.
$p(E) = p(F)p_F(E) + p(\bar{F})p_{\bar{F}}(E)$
$= 0{,}90 \times 0{,}03 + 0{,}10 \times 0{,}25$
$= 0{,}027 + 0{,}025 = 0{,}052$
Bonne réponse : 0,052

c. $p_E(F) = \frac{p(F \cap E)}{p(E)} = \frac{0{,}027}{0{,}052} \approx 0{,}519 \approx 0{,}52$
Bonne réponse : 0,52

d. $p(\bar{E}) = 1 - p(E) = 1 - 0{,}052 = 0{,}948$
Bonne réponse : 0,948

Exercice 2

Données :
$\mathrm{p(O)} = 0{,}65$ donc $\mathrm{p(\bar{O})} = 0{,}35$
$\mathrm{p_O(S)} = 0{,}30$
$\mathrm{p_{\bar{O}}(S)} = 0{,}80$

a. $p(O \cap S) = p(O) \times p_O(S)$
$= 0{,}65 \times 0{,}30 = 0{,}195$
b. $p(S) = p(O \cap S) + p(\bar{O} \cap S)$
$p(\bar{O} \cap S) = 0{,}35 \times 0{,}80 = 0{,}28$
Donc
$p(S) = 0{,}195 + 0{,}28 = 0{,}475$

c. On cherche $p_S(\bar{O})$.
Par définition :
$$p_S(\bar{O}) = \frac{p(\bar{O} \cap S)}{p(S)} = \frac{0{,}28}{0{,}475} \approx 0{,}59$$

Sachant que l'employé est satisfait, la probabilité qu'il travaille en bureau individuel est d'environ 0,59 (59 %).

Indépendance de deux événements

Exercice 1

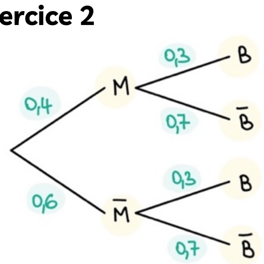
a. **Oui.** Les deux lancers de dé sont indépendants : le résultat du premier lancer n'influence pas le second.

b. **Oui.** Le tirage se fait **avec remise**, donc la composition de l'urne ne change pas entre les tirages. Les épreuves sont indépendantes.

c. **Non.** Le tirage se fait **sans remise** : le résultat du premier tirage modifie le contenu de l'urne, donc le second tirage dépend du premier.

d. **Non.** La classe et l'âge d'un élève ne sont pas indépendants : connaître la classe donne une information sur l'âge.

Exercice 2



a.

b. Sans aucun retard, c'est $\bar{M} \cap \bar{B}$
$p(\bar{M} \cap \bar{B}) = p(\bar{M}) \times p(\bar{B})$
$= 0{,}60 \times 0{,}70 = 0{,}42$

c. Retardés au moins une fois, c'est l'événement contraire de "aucun retard" :
p(au moins un retard)
$= 1 - 0{,}42 = 0{,}58$

Loi de Bernoulli

Exercice 1

- Quatre issues sont possibles. Ce n'est pas une épreuve de Bernoulli.
- Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli de succès « La carte est un pique. » dont la probabilité est $p = \frac{13}{52} = 0{,}25$.
- Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli de succès « La carte n'est pas un pique. » dont la probabilité est $p = \frac{39}{52} = 0{,}75$.
- Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli de succès « La carte est un as. » dont la probabilité est $p = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.
- Treize issues sont possibles. Ce n'est pas une épreuve de Bernoulli.
- Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli de succès « La carte est une figure. » dont la probabilité est $p = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$.

Exercice 2

1) Vis (20 vis dont 3 trop longues, on en prélève 15 sans remise)

Ce n'est pas un schéma de Bernoulli :

- les tirages ne sont pas indépendants (sans remise),
- la probabilité "vis trop longue" change à chaque tirage.

Conclusion : pas un schéma de Bernoulli.

2) 50 lettres au hasard, on regarde "voyelle / pas voyelle"

On a bien deux issues (voyelle / non voyelle).
On modélise par un schéma de Bernoulli si on considère que chaque lettre est tirée de manière identique et indépendante (modèle usuel).

- $n = 50$
- $p = \mathbb{P}(\text{voyelle})$

Si on prend l'alphabet classique avec 6 voyelles $\{a, e, i, o, u, y\}$:$p = \frac{6}{26} = \frac{3}{13}$.
Conclusion : schéma de Bernoulli, $n = 50$, $p = \frac{6}{26}$

Exercice 3

Deux composantes électroniques, indépendantes.
Succès : "le composant tombe en panne", avec probabilité 0,01.
Deux issues (panne / pas panne)
Probabilité constante $p = 0{,}01$
Indépendance donnée
Donc c'est un schéma de Bernoulli avec :
$$n = 2, p = 0{,}01.$$

Conclusion : **schéma de Bernoulli**, $n = 2$, $p = 0{,}01$.

Exercice 4

Au déjeuner, un client prend un café avec probabilité $\frac{9}{10} = 0{,}9$.
4 clients commandent de façon indépendante.
Succès : "le client prend un café".
Deux issues (café / pas café)
Probabilité constante $p = 0{,}9$
Indépendance donnée $n = 4$
Donc :
$$n = 4, p = \frac{9}{10} = 0{,}9.$$

Conclusion : schéma de Bernoulli, $n = 4$, $p = 0{,}9$.

Variables aléatoires

Exercice 1

On récapitule les gains selon le numéro de la face :
$1 \to X = 3$
$2 \to X = -6$
$3 \to X = 3$
$4 \to X = -12$
$5 \to X = 3$
$6 \to X = -18$

Chaque face a une probabilité $\frac{1}{6}$.
$P(X = -12)$: réalisé uniquement par la face 4 $\to P(X = -12) = \frac{1}{6}$.
$P(X = 3)$: réalisé par les faces 1, 3 et 5 $\to P(X = 3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
$P(X = -6)$: réalisé uniquement par la face 2 $\to P(X = -6) = \frac{1}{6}$.
$P(X \geq 3)$: la seule valeur ≥ 3 est 3 $\to P(X \geq 3) = P(X = 3) = \frac{1}{2}$.

Exercice 2

Étape 1. Les quatre valeurs possibles pour X sont $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$ et $x_4 = 10$.

Étape 2. Les 10 boules ont toutes la même probabilité de sortie. **Dans cette situation d'équiprobabilité, on utilise la formule :**

$$\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Une boule porte le numéro 10, donc $p(X = 10) = \frac{1}{10}$.

De même $p(X = 5) = \frac{2}{10}$ et $p(X = 2) = \frac{3}{10}$.

Il reste quatre boules portant le numéro 1, donc $p(X = 1) = \frac{4}{10}$.

Étape 3. On dresse le tableau résumant la loi de X :

x_i	1	2	5	10
$p(X = x_i)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

Vérification : on a bien

$$\frac{4}{10} + \frac{3}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{10}{10} = 1.$$

Espérance, variance, écart-type

Exercice 1

Loi de probabilité de X

On lance un dé :

Faces impaires : 1, 3, 5 → on **perd 4 €**, donc $X = -4$.

$$P(X = -4) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Faces paires :

2 → gain $3 \times 2 = 6 \rightarrow X = 6$, probabilité $\frac{1}{6}$

4 → gain $3 \times 4 = 12 \rightarrow X = 12$, probabilité $\frac{1}{6}$

6 → gain $3 \times 6 = 18 \rightarrow X = 18$, probabilité $\frac{1}{6}$

Tableau :

x_i	-4	6	12	18
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Espérance $E(X)$

$$E(X) = \frac{1}{2} \times (-4) + \frac{1}{6} \times 6 + \frac{1}{6} \times 12 + \frac{1}{6} \times 18$$

$$E(X) = -2 + 1 + 2 + 3 = 4$$

$$\boxed{E(X) = 4}$$

Variance $V(X)$

On calcule d'abord $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \frac{1}{2} \times (-4)^2 + \frac{1}{6} \times 6^2 + \frac{1}{6} \times 12^2 + \frac{1}{6} \times 18^2$$

$$E(X^2) = \frac{1}{2} \times 16 + \frac{1}{6} \times 36 + \frac{1}{6} \times 144 + \frac{1}{6} \times 324$$

$$E(X^2) = 8 + 6 + 24 + 54 = 92$$

Donc :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 92 - 4^2 = 92 - 16 = 76$$

$$\boxed{V(X) = 76}$$

Écart-type $\sigma(X)$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{76}$$

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{76} \approx 8{,}72}$$

Exercice 2

1. Loi de probabilité de X

Nombres de 1 à 20 : 20 billes → gain 4 €

$$P(X = 4) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

Nombres de 21 à 45 : 25 billes → gain 2 €

$$P(X = 2) = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}$$

Nombres de 46 à 60 : 15 billes → gain -1 €

$$P(X = -1) = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$$

Tableau de la loi de probabilité :

x_i	4	2	-1
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$

On vérifie :

$$\frac{1}{3} + \frac{5}{12} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{5}{12} + \frac{3}{12} = \frac{12}{12} = 1.$$

2. Espérance de X

$$E(X) = \frac{1}{3} \times 4 + \frac{5}{12} \times 2 + \frac{1}{4} \times (-1)$$

$$E(X) = \frac{4}{3} + \frac{10}{12} - \frac{1}{4} = \frac{4}{3} + \frac{5}{6} - \frac{1}{4}$$

$$E(X) = \frac{16}{12} + \frac{10}{12} - \frac{3}{12} = \frac{23}{12}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{23}{12} \approx 1{,}92}$$

3. Variance et écart-type de X

On calcule d'abord $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \frac{1}{3} \times 4^2 + \frac{5}{12} \times 2^2 + \frac{1}{4} \times (-1)^2$$

$$E(X^2) = \frac{1}{3} \times 16 + \frac{5}{12} \times 4 + \frac{1}{4} \times 1$$

$$= \frac{16}{3} + \frac{20}{12} + \frac{1}{4}$$

$$E(X^2) = \frac{16}{3} + \frac{5}{3} + \frac{1}{4} = \frac{21}{3} + \frac{1}{4}$$

$$= 7 + \frac{1}{4} = \frac{29}{4}$$

Variance :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{29}{4} - \left(\frac{23}{12}\right)^2 = \frac{29}{4} - \frac{529}{144}$$

$$= \frac{1044}{144} - \frac{529}{144} = \frac{515}{144}$$

$$\boxed{V(X) = \frac{515}{144} \approx 3{,}57}$$

Écart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{515}{144}} = \frac{\sqrt{515}}{12}$$

$$\boxed{\sigma(X) = \frac{\sqrt{515}}{12} \approx 1{,}89}$$

LES FICHES MAGIQUES

Le collection de référence pour te réconcilier avec les maths et tout comprendre !

Tu veux t'en sortir en maths sans te prendre la tête ? Ce cahier est fait pour toi.

En 40 fiches simples et directes, tu retrouves tout ce qu'il faut savoir pour l'année, avec des rappels clairs et des exercices pour t'entraîner pas à pas. Idéal pour réviser à ton rythme, comprendre ce qui bloque, et garder confiance.

Que ce soit pour suivre en classe ou préparer les contrôles, ce cahier t'accompagne toute l'année.

40 fiches colorées et simples à comprendre
des exercices corrigés pour t'entraîner
les astuces et pièges à éviter

CAMPUS XYZ