

ÉDITION 2026-2027

LES FICHES MAGIQUES

terminale spé maths



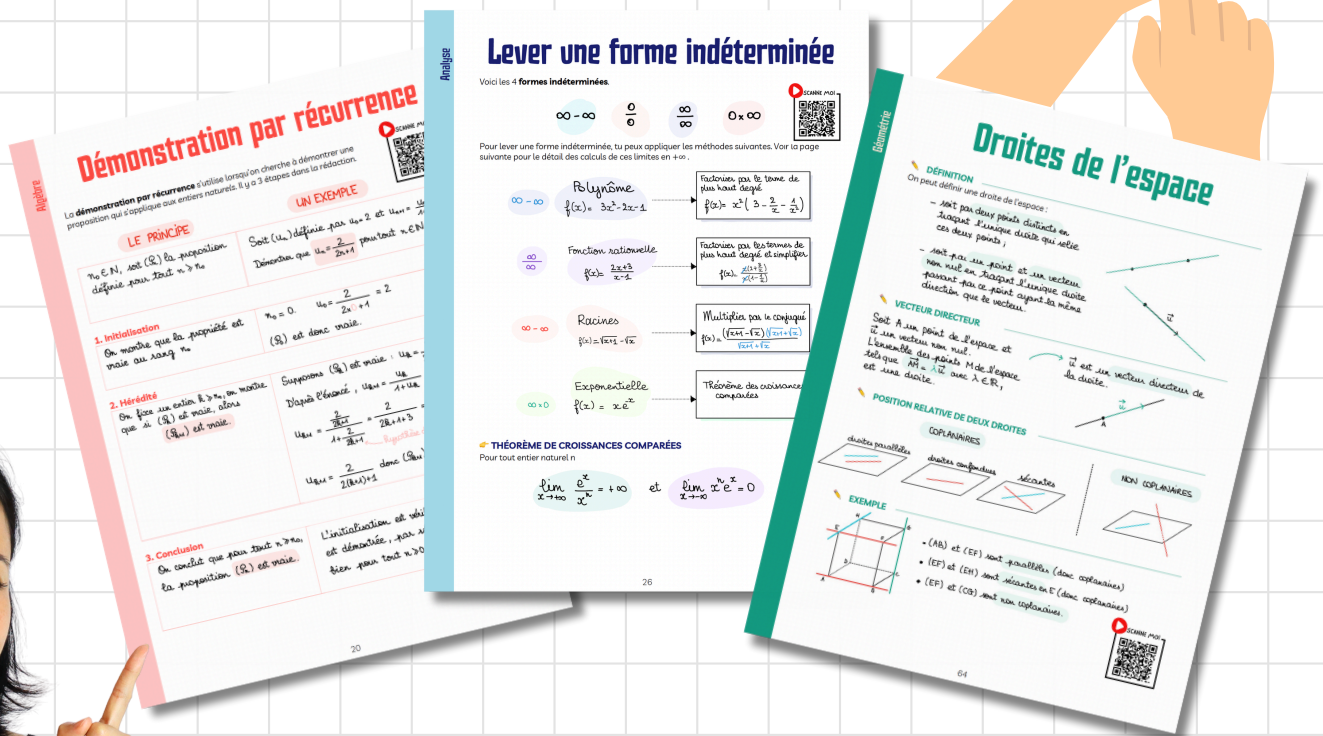
40 fiches de maths claires et illustrées



Vidéos méthodes pas à pas

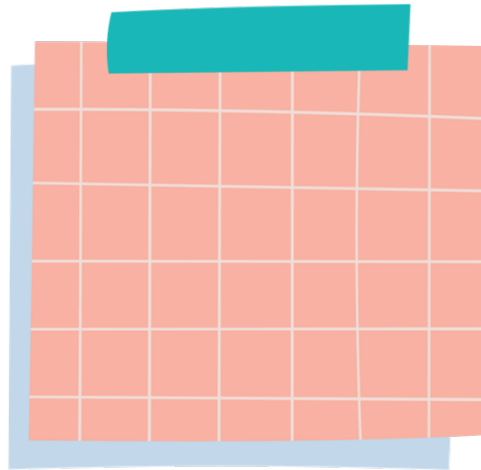


15 MIN PAR JOUR d'exercices corrigés



CAMPUS XYZ

Ce cahier appartient à



© 2026, Campus XYZ, publication indépendante.
37 avenue Foch, 75116 Paris
Dépôt légal : septembre 2026

Tous droits réservés. Toute reproduction ou utilisation sous quelque forme et par quelque moyen électronique, photocopie, enregistrement ou autre que ce soit est strictement interdite sans l'autorisation écrite de l'éditeur.

Sommaire

Algèbre

Rappels de calculs	6
Équations et inéquations	8
Équation du second degré	10
Généralités sur les suites	12
Limites de suites	14
Convergence, divergence	16
Lever une forme indéterminée	18
Démonstration par récurrence	20
Notes personnelles	22

Analyse

Limites de fonctions	24
Lever une forme indéterminée	26
Continuité et TVI	28
Composée de deux fonctions	30
Fonctions dérivées	32
Tangente en un point	34
Dérivée seconde et convexité	36
Logarithme népérien	38
Fonction logarithme népérien	40
Équations trigonométriques	42
Fonctions trigonométriques	44
Primitives de fonctions	46
Primitive : opérations et composition	48
Équations différentielles	50
Intégrale d'une fonction continue	52
Primitive et intégrale	54
Propriétés de l'intégrale	56
Intégration par parties	58
Notes personnelles	60

Géométrie

Vecteurs dans l'espace	62
Droites de l'espace	64
Plans de l'espace	66
Représentation paramétrique d'une droite	68
Équation cartésienne d'un plan	70
Produit scalaire	72
Orthogonalité	74
Notes personnelles	76

Probabilités

Dénombrement	78
Arrangement et permutation	80
Combinaisons	82
Probabilités conditionnelles	84
Probabilités totales	86
Loi de Bernoulli	88
Loi binomiale	90
Somme de variables aléatoires	92
Loi des grands nombres	94
Notes personnelles	96
Corrigé	97

Comment utiliser ?



PARCOURS RELAX

Réviser régulièrement pendant l'année.

Objectif : **1 séance par semaine.**



PARCOURS RÉGULIER

Pour se remettre dans le bain avant les contrôles.

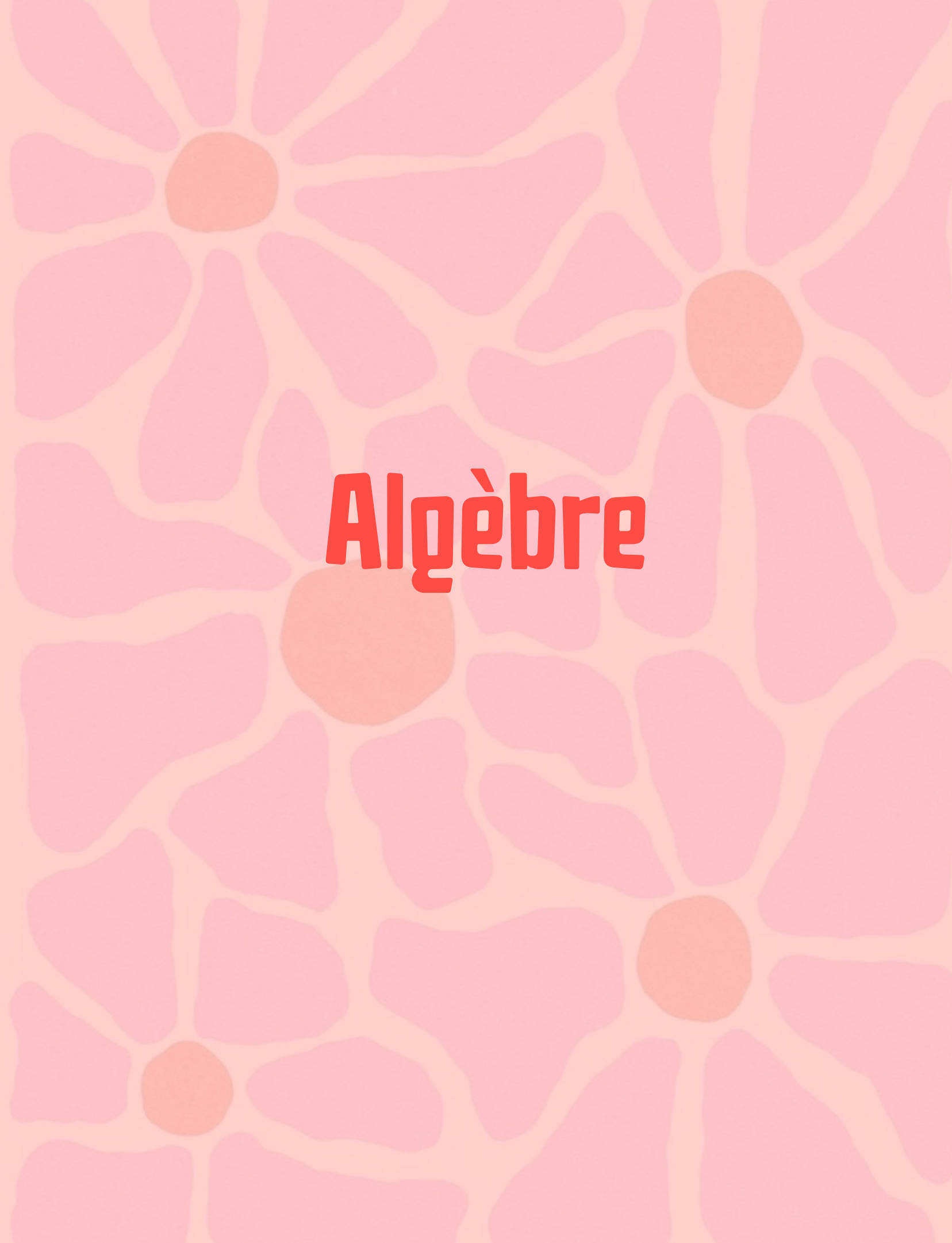
Objectif : **1 séance avant chaque devoir surveillé.**



PARCOURS INTENSE

Tu as tout oublié ? Pas de panique, revois tout le programme en 2 semaines.

Objectif : **2 séances par jour pendant deux semaines.**

The background features a repeating pattern of stylized floral or sunburst shapes. Each shape consists of a central orange circle surrounded by several elongated, pink, petal-like segments. The overall color palette is soft, with various shades of pink and a muted orange.

Algèbre

Rappels de calculs



PUISSANCES

Je **multiplie** deux puissances qui ont la même base en **additionnant leurs exposants**.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Je **divise** deux puissances qui ont la même base en **soustrayant les exposants**.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ici, $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Une **puissance de puissance** ? Je multiplie les exposants !

$$(a^n)^m = a^{n \times m}$$

Si les puissances n'ont pas la même base mais le **même exposant**, on peut factoriser.

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$

Exemple : $2^7 \times 5^7 = (2 \times 5)^7 = 10^7$

La même règle s'applique pour un quotient.

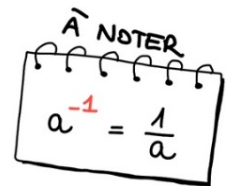
$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$



LA PUISSANCE NÉGATIVE, COMMENT ÇA MARCHE ?

Pour un nombre réel a non nul, et n un nombre entier, la **puissance négative**, c'est une **division répétée**. Ainsi, a^{-n} c'est l'**inverse** de a^n .

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$



CALCULER LES RACINES CARRÉES

Soit a et b deux réels positifs non nuls. Je peux **multiplier** deux racines en mettant **sous le même signe** :

$$\sqrt{50} \times \sqrt{3} = \sqrt{50 \times 3} = \sqrt{150} \quad \checkmark$$

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Je peux simplifier un **quotient** : $\sqrt{\frac{100}{4}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{4}} = \frac{10}{2} = 5 \quad \checkmark$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Attention !

$$\times \sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{2+3} \quad \checkmark \sqrt{2+3} = \sqrt{5}$$



METTRE SOUS FORME $a\sqrt{b}$

La forme préconisée pour les racines carrées est de type $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers, b étant le plus petit possible. **Exemple :** $\sqrt{8} = \sqrt{2 \times 4} = \sqrt{2} \times \sqrt{4} = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2} \quad \checkmark$

Exercices

1. Simplifier les écritures suivantes, si possible. x, y, a et b sont des réels non nuls.

a) $\frac{(2^3 \times 2^{-5})^2}{2^{-4}} =$

b) $(3^{-2} \times 3^5)^{-1} =$

c) $(a^3 b^{-2})^{-2} \times a^{-1} b^4 =$

d) $\frac{(2^2)^3 \times (2^{-1})^4}{2^3} =$

e) $\frac{(x^{-3} y^2)^2}{(x^2 y^{-1})^{-1}} =$

f) $(5^2 \times 5^{-4})^{-3} =$

2. Simplifier les écritures suivantes.

a) $\sqrt{200} =$

b) $\sqrt{3} \times \sqrt{48} =$

c) $\sqrt{75} + \sqrt{27} - \sqrt{12} =$

d) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) =$

e) $(\sqrt{2} + 1)^2 =$

f) $\frac{1}{\sqrt{5}+2} =$

3. Simplifier les écritures suivantes, si possible. Préciser les valeurs interdites.

a) $(x + 2)^2 - (x - 2)^2 =$

b) $\frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} =$

c) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} =$

d) $(2x - 3)^2 - (2x + 3)^2 =$

e) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x-2} =$

f) $\frac{x}{x+1} - \frac{2}{x-1} =$

Équations et inéquations



RÉSoudre UNE ÉQUATION PRODUIT NUL

L'équation produit $A \times B = 0$ est équivalente à $A = 0$ ou $B = 0$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x(x - 1) = 0$

$$2x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \text{ ou } (x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 \quad \checkmark$$

On note l'ensemble des solutions $S = \{0; 1\}$.



SCANNE MOI



RÉSoudre UNE ÉQUATION QUOTIENT

L'équation quotient $\frac{A}{B} = 0$ est équivalente à $A = 0$ et $B \neq 0$.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\frac{x-3}{2x+6} = 0$.

$$x - 3 = 0 \text{ et } 2x + 6 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ et } x \neq -3$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \quad \checkmark$$

On note l'ensemble des solutions $S = \{3\}$.



SCANNE MOI



INÉQUATION PRODUIT

On étudie le signe de **chacun des facteurs** que l'on rassemble dans un tableau puis on applique la **règle des signes**.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(x + 1)(2x - 5) < 0$.

1. J'étudie le signe de $(x + 1)$.

x	-1
$x+1$	- 0 +

2. J'étudie le signe de $(2x - 5)$.

x	$\frac{5}{2}$
$2x-5$	- 0 +

3. Je rassemble dans un tableau et j'applique la règle des signes.

x	-1	$\frac{5}{2}$			
x+1	-	0	+	+	
2x-5	-	-	0	+	
(x+1)x	+	0	-	0	+
(2x-5)					

4. J'obtiens l'ensemble des solutions.

$$S =]-1; \frac{5}{2}[$$

Exercices

1. Résoudre les équations suivantes.

a) $(2x - 3)(x + 5) = 0$

b) $(3x + 1)(x - 4)(2x - 6) = 0$

c) $(x^2 - 9)(x + 2) = 0$

d) $(x - 1)^2(2x + 3) = 0$

2. Résoudre les inéquations suivantes.

a) $(x - 2)(x + 3) \geq 0$

b) $(2x - 1)(3 - x) < 0$

c) $(x + 1)(x - 2)(x - 4) > 0$

3. Résoudre les équations suivantes.

a) $\frac{2x-4}{x+1} = 0$

b) $\frac{x-3}{2x-6} = 0$

c) $\frac{x^2-1}{x-5} = 0$

Équation du second degré



DISCRIMINANT

On appelle **discriminant** de la fonction $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ le réel

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

La forme canonique de f
s'écrit alors :
 $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\Delta}{4a}$

À quoi sert le discriminant ?

À connaître le nombre de solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Graphiquement, résoudre $ax^2 + bx + c = 0$, c'est chercher les intersections de la courbe qui représente f et l'axe horizontal.

Si $\Delta < 0$

L'équation n'a pas de solution réelle.



Si $\Delta = 0$

L'équation a une seule solution

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$



Si $\Delta > 0$

L'équation a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$



RACINES ET FACTORISATION

x_1 et x_2 sont appelées les racines de $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$. La fonction peut alors se factoriser selon la valeur de Δ .

- Si $\Delta < 0$, $f(x)$ ne s'écrit pas comme un produit de polynômes de degré 1.
- Si $\Delta = 0$, alors $f(x) = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$, alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Somme et produit des racines

$$\text{Somme} = -\frac{b}{a}$$

$$\text{Produit} = \frac{c}{a}$$

Exercices

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $2x^2 - 12x + 16 = 0$

2) $-x^2 + 4x - 9 = 0$

3) $-3x^2 - 30x - 75 = 0$

2. Utiliser la forme canonique pour résoudre l'équation suivante.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-x^2 + 5x - 4 = 0$ sans utiliser le discriminant, mais en utilisant la forme canonique du polynôme.

3. Déterminer, suivant la valeur du paramètre m , le nombre de solutions de l'équation du second degré.

1) $-2x^2 + mx + m - x + 1 = 0$

2) $x^2 - mx - m - 3x - 3 = 0$

Généralités sur les suites



COMMENT DÉFINIR UNE SUITE

Une suite peut être définie par :

- une formule **explicite** de type
- un **premier terme connu** et une **relation de récurrence** de type $u_{n+1} = f(u_n)$

$$u_n = f(n) \quad \text{une expression en } n$$

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases} \quad \text{une expression avec } u_n$$



VARIATIONS D'UNE SUITE

Soit (u_n) une suite. Pour tout n :

- si $u_{n+1} - u_n > 0$, alors (u_n) est strictement **croissante**.
- si $u_{n+1} - u_n < 0$, alors (u_n) est strictement **décroissante**.

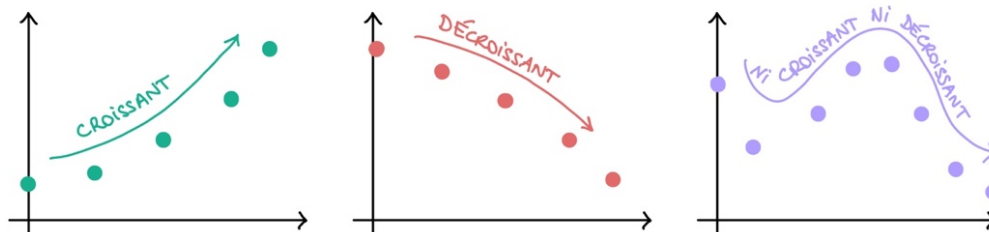


SCANNE MOI



Vocabulaire : Une suite est **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante.

Attention ! Une suite peut être **ni croissante, ni décroissante**.



CAS SPÉCIAL

Soit (u_n) une suite dont tous les termes sont **strictement positifs**. Pour tout n , si

- si $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ alors est strictement **croissante**.
- si $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors est strictement **décroissante**.

Cette propriété est pratique pour étudier les **suites géométriques**.



MÉTHODE

Pour déterminer le sens de variation d'une suite :

1. On détermine si la suite est **arithmétique**, **géométrique**, ou ni l'une ni l'autre.
2. Si la suite est arithmétique on conclut selon le **signe de la raison**.
3. Si la suite est géométrique, on conclut à l'aide du **tableau** de la fiche précédente.
4. Sinon, on calcule $u_{n+1} - u_n$ et on conclut selon le signe.

Exercices

1. Calculer les termes des suites suivantes.

a. Soit (u_n) une suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{-2n+1}{4n+6}$. Calculer u_1 .

Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre entier.

b. Soit (w_n) une suite définie par $w_0 = 0$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $w_{n+1} = 4w_n - 8n$. Calculer w_3 .

c. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = -9$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n - 8$. Calculer u_2 .

2. Dans chacun des cas, étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

a. $u_n = n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$

b. $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

c. $u_n = \frac{-2}{n+4}$ pour $n \in \mathbb{N}$

d. $u_n = \frac{3^n}{2^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Limites de suites

✎ LIMITE D'UNE SUITE

On dit qu'une suite (u_n) **converge vers un réel l** si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On écrit : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$.

On dit qu'une suite (u_n) **diverge vers $+\infty$** (respectivement vers $-\infty$) si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ (respectivement $] -\infty; A[$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ (respectivement $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$).

On dit aussi que u_n **tend vers $+\infty$** (respectivement $-\infty$) quand n tend vers $+\infty$.

✎ NOTION DE SUITE

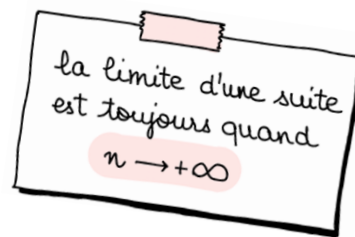
$$\begin{array}{ll} \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \end{array}$$

C'est quoi déjà,
la convergence ?



✎ Pour $k \geq 1$ entier naturel

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$$



✎ Limites d'une suite géométrique de raison q

- si $q > 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- si $q = 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$
- si $-1 < q < 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- si $q < -1$ pas de limites

✎ Toutes les suites n'ont pas forcément une limite

Les suites définies par les expressions suivantes n'ont pas de limites :

$$u_n = (-1)^n ; u_n = \sin(n) ; u_n = \cos(n)$$

Méthode

1. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^3 + n$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^3 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \end{array} \right\} \text{Par somme, } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^3 + n = +\infty$$

2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0 \end{array} \right\} \text{Par somme, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} = 0$$

3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + 0,2^n$

Comme $-1 < 0,2 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,2^n = 0$

Par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + 0,2^n = 3$

4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2\sqrt{n} + \sin n$

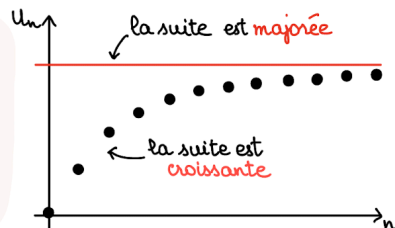
$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2\sqrt{n} = +\infty$ et $-1 \leq \sin n \leq 1$ pour tout entier n

Par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2\sqrt{n} + \sin n = +\infty$

Convergence, divergence

★ THÉORÈME DE CONVERGENCE MONOTONE

- Une suite **croissante** et **majorée** est convergente
- Une suite **décroissante** et **minorée** est convergente

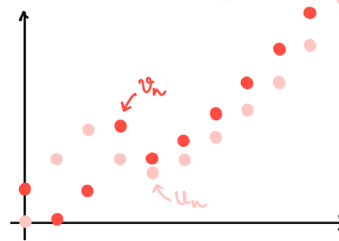


★ THÉORÈME DE COMPARAISON

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang n_0 .

- si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
- si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

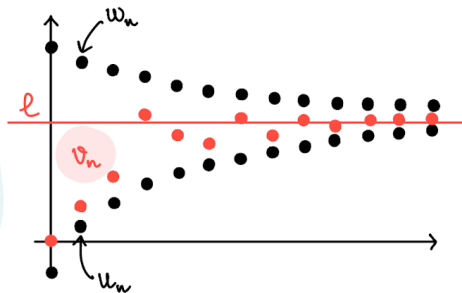
$u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$



★ THÉORÈME DES GENDARMES

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir de n_0 .

Si (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite l , alors v_n converge aussi vers l .



le théorème de comparaison
et le théorème des gendarmes



👉 Pense à utiliser le théorème des gendarmes dès que tu vois :
 $(-1)^n, \sin(n), \cos(n)$

Méthode

1. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - (-1)^n)$.

- On détermine une suite qui majore (ou mineure) la suite dont on cherche la limite

Pour tout entier naturel n , on a $(-1)^n \leq 1$ d'où $-(-1)^n \geq -1$

donc $n^2 - (-1)^n \geq n^2 - 1$.

- Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 1 = +\infty$
- Donc, d'après le théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - (-1)^n) = +\infty$ ✓

2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\sin(n)}{n}\right)$.

- Pour tout entier $n \geq 1$, on a $-1 \leq \sin(n) \leq 1$

$$\text{d'où } -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$1 - \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{\sin(n)}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

- On pose $u_n = 1 - \frac{1}{n}$, $v_n = 1 + \frac{\sin(n)}{n}$ et $w_n = 1 + \frac{1}{n}$

On a donc $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout $n \geq 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1$

- Ainsi, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\sin(n)}{n}\right) = 1 \quad \checkmark$$

3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n^2)}{n}$.

- Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$-1 \leq \sin(n^2) \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n^2)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

- Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

- D'après le théorème des gendarmes $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Lever une forme indéterminée

Voici les 4 **formes indéterminées**.

$$\infty - \infty$$

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$0 \times \infty$$



Pour lever une forme indéterminée, tu peux appliquer une des méthodes suivantes selon la situation.

SITUATION	MÉTHODE
1 Polynôme $U_n = -3n^2 + 2n - 1$	Factoriser par le terme du plus haut degré $U_n = n^2 \left(-3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right)$
2 Fonction rationnelle $U_n = \frac{2n+3}{n-1}$	Factoriser par les termes de plus haut degré et simplifier $U_n = \frac{n(2+\frac{3}{n})}{n(1-\frac{1}{n})}$
3 Racines $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$	Multiplier par le conjugué $U_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$
4 Puissance $U_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n - 5$	Utiliser limite de q^n ici $-1 < q < 1$ donc $\left(-\frac{1}{3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
5 Trigo $U_n = \frac{\cos(n^2)}{3n+1}$	Encadrer $\frac{-1}{3n+1} \leq \frac{\cos(n^2)}{3n+1} \leq \frac{1}{3n+1}$ et appliquer le théorème des gendarmes ou le théorème de comparaison.

Méthode

1. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2-1}{n+1}$

$$u_n = \frac{n^2-1}{n+1} = \frac{\cancel{(n+1)}(n-1)}{\cancel{n+1}} = n-1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n-1 = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3-1}{3n^2+5n^4}$

$$u_n = \frac{n^3-1}{3n^2+5n^4} = \frac{\cancel{n^3} \left(1 - \frac{1}{n^3}\right)}{n^2 \left(\frac{3}{n^2} + 5\right)} = \frac{1 - \frac{1}{n^3}}{n \left(\frac{3}{n^2} + 5\right)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n^3} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^2} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^2} + 5 = 5 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{3}{n^2} + 5\right) = +\infty$$

$$\text{Par conséquent} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 - 5n^2 + 3$

$$u_n = n^3 - 5n^2 + 3 = n^3 \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{3}{n^3}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^3} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{5}{n} + \frac{3}{n^3} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty \quad \text{donc par produit,} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Un exercice type Bac pour tout revoir



Démonstration par récurrence

La **démonstration par récurrence** s'utilise lorsqu'on cherche à démontrer une proposition qui s'applique aux *entiers naturels*. Il y a 3 étapes dans la rédaction.



LE PRINCİPE

$n_0 \in \mathbb{N}$, soit (P_n) la proposition définie pour tout $n \geq n_0$

UN EXEMPLE

Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$.
Démontrer que $u_n = \frac{2}{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Initialisation

On montre que la propriété est vraie au rang n_0

$$n_0 = 0. \quad u_0 = \frac{2}{2 \times 0 + 1} = 2$$

(P_0) est donc vraie.

2. Hérédité

On fixe un entier $k \geq n_0$, on montre que si (P_k) est vraie, alors (P_{k+1}) est vraie.

Supposons (P_k) est vraie : $u_k = \frac{2}{2k+1}$

D'après l'énoncé, $u_{k+1} = \frac{u_k}{1+u_k}$

$$u_{k+1} = \frac{\frac{2}{2k+1}}{1 + \frac{2}{2k+1}} = \frac{2}{2k+1+2} = \frac{2}{2k+3}$$

← hypothèse de récurrence

$$u_{k+1} = \frac{2}{2(k+1)+1} \text{ donc } (P_{k+1}) \text{ est vraie.}$$

3. Conclusion

On conclut que pour tout $n \geq n_0$, la proposition (P_n) est vraie.

L'initialisation est vérifiée, l'hérédité est démontrée, par récurrence, on a bien pour tout $n \geq 0$ $u_n = \frac{2}{2n+1}$

Méthode

✎ Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

✓ Corrigé

1. Initialisation

Au rang $n_0 = 0$ $0 + \dots + 0 = 0$ ✓

$$\frac{0 \times (0+1)}{2} = \frac{0 \times 1}{2} = 0 \quad \checkmark$$

La propriété P est vraie au rang $n_0 = 0$.

2. Hérité

Supposons pour $k \geq 0$ que (P_k) soit vraie $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

Démontrons que (P_{k+1}) est vraie

$$1 + 2 + \dots + k + k+1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

← hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + k + k+1 &= \frac{k(k+1)}{2} + k+1 = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $k+1$.

3. Conclusion

La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire à partir de ce rang. Elle est donc vraie pour tout entier naturel.

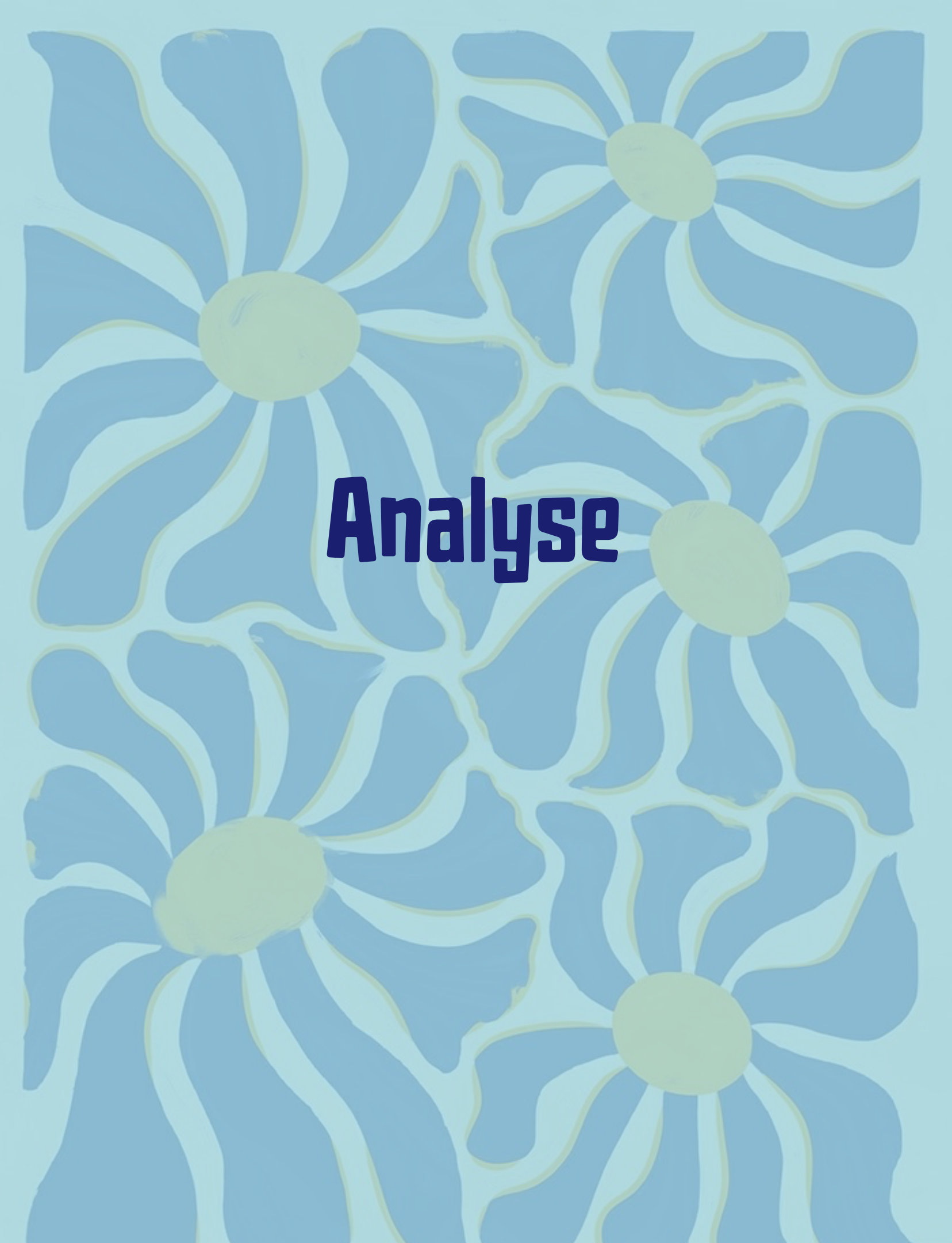
Je t'explique tout ça avec l'image des dominos



Notes personnelles

mes réussites

points à travailler

The background of the slide is a repeating pattern of stylized flowers. Each flower has a central yellow circle and several blue petals. The petals are outlined in yellow, creating a high-contrast, graphic look. The flowers are arranged in a grid-like fashion, with some overlapping.

Analyse

Limites de fonctions

LIMITES À CONNAÎTRE

$$f(x) = x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$f(x) = x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$f(x) = e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$$

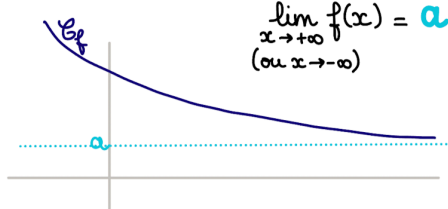
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$



ASYMPTOTES

horizontale

(limite en $\pm\infty$)

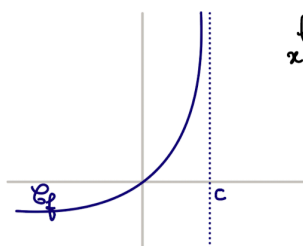


$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ \text{ou } x \rightarrow -\infty}} f(x) = a$$

Équation de l'asymptote $y = a$

verticale

limite en un réel c



$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty \text{ ou } -\infty$$

Équation de l'asymptote $x = c$

LIMITE DE FONCTION COMPOSÉE

Théorème : a, b et c désignent soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

$$\text{Si } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} u(x) = b \\ \lim_{x \rightarrow b} v(x) = c \end{cases}, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} v(u(x)) = c$$

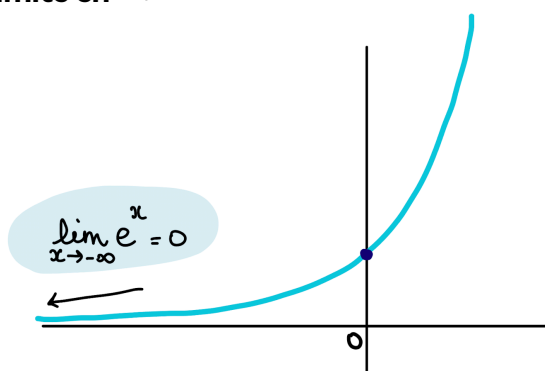
Méthode

💡 N'apprends pas par cœur !

Sache retrouver les limites à partir des courbes représentatives.

Exemple avec la fonction **exponentielle**.

Limite en $-\infty$

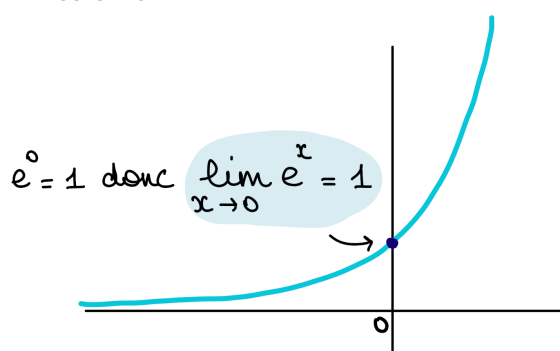


On observe la direction de la courbe quand elle se dirige vers la **gauche** (car x tend vers $-\infty$).

La courbe s'approche de **l'axe horizontal**, c'est-à-dire de 0, donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Limite en 0

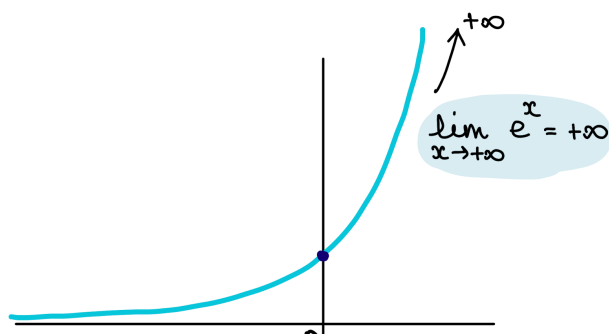


La fonction exponentielle est continue en 0, cela veut dire que je peux calculer e^0 tout simplement.

Or, je sais que $e^0 = 1$ donc je connais sa limite en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^0 = 1$$

Limite en $+\infty$



On observe la direction de la courbe quand elle se dirige vers la **droite** (car x tend vers $+\infty$).

Elle monte vers $+\infty$: on retrouve la limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Lever une forme indéterminée

Voici les 4 **formes indéterminées**.

$$\infty - \infty$$

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$0 \times \infty$$



Pour lever une forme indéterminée, tu peux appliquer les méthodes suivantes. Voir la page suivante pour le détail des calculs de ces limites en $+\infty$.

$$\infty - \infty$$

Polynôme

$$f(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

Factoriser par le terme de plus haut degré

$$f(x) = x^2 \left(3 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

Fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$

Factoriser par les termes de plus haut degré et simplifier

$$f(x) = \frac{x(2+\frac{3}{x})}{x(1-\frac{1}{x})}$$

$$\infty - \infty$$

Racines

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

Multiplier par le conjugué

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$\infty \times 0$$

Exponentielle

$$f(x) = x e^{-x}$$

Théorème des croissances comparées

👉 THÉORÈME DE CROISSANCES COMPARÉES

Pour tout entier naturel n

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

Méthode

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - 2x - 1$

On factorise par le terme de plus haut degré :

$$3x^2 - 2x - 1 = x^2 \left(3 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \end{array} \right\} \text{ Par produit, } \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - 2x - 1 = +\infty$$

2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x-1}$

On factorise par le terme de plus haut degré

$$\frac{2x+3}{x-1} = \frac{\cancel{x} \left(2 + \frac{3}{x} \right)}{\cancel{x} \left(1 - \frac{1}{x} \right)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{3}{x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1 \end{array} \right\} \text{ Par quotient, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x-1} = 2$$

3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

On multiplie par le conjugué.

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} &= \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \quad \leftarrow \text{IDENTITÉ REMARQUABLE!} \\ &= \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} + \sqrt{x} = +\infty \\ \text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0 \end{array} \right\} \text{ Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 0$$

4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}$

D'après le théorème des croissances comparées

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$$

Continuité et TVI

👉 C'EST QUOI LA CONTINUITÉ ?

Fonction continue en un point

Soit f une fonction f définie sur un intervalle I et soit $a \in I$.

f est continue en a si :

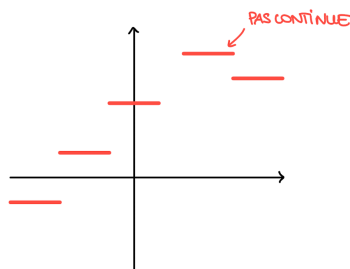
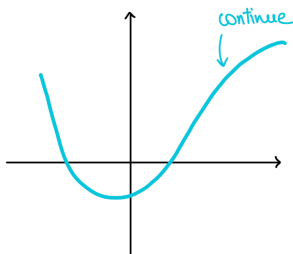
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$$



Fonction continue sur un intervalle

f est continue sur I
si f est continue
en tout point de I .

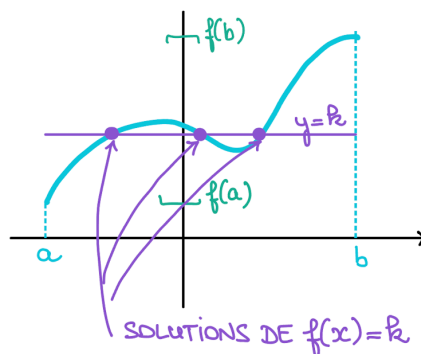
Graphiquement, on peut voir qu'une fonction est continue si on peut la tracer « **sans lever le crayon.** » 🖍



👉 THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES (TVI)

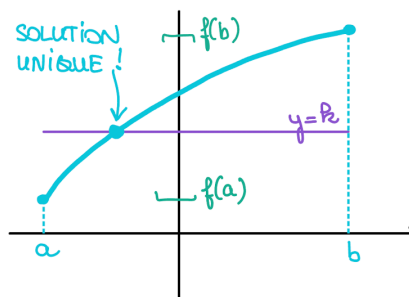
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

Pour tout $k \in \mathbb{R}$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$,
l'équation $f(x) = k$ admet au moins une
solution dans l'intervalle $[a; b]$.



Corollaire

Si f est continue et strictement monotone
sur $[a; b]$ alors pour tout réel k compris
entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$
admet une unique solution dans $[a; b]$.



Méthode



Soit $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$ sur $\mathbb{R}$?



Corrigé

1. On détermine f' et son signe

f est une fonction polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

2. On dresse le tableau de variations de f

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
signe de $f'(x)$	+	0	-	+
Variations de f				

3. On se sert des extremums pour localiser les intervalles où peuvent se trouver les solutions.

On applique le TVI sur ces intervalles.

Sur $]-\infty; 2]$, le maximum de f vaut -1 donc $f(x) = 4$ n'a pas de solution sur cet intervalle.

Sur $[2; +\infty[$, f est continue et strictement croissante.

$4 \in [-5; +\infty[$ donc d'après le corollaire du TVI, il existe une unique solution $a \in [2; +\infty[$ tel que $f(a) = 4$.

Donc l'équation $f(x) = 4$ n'admet qu'une seule solution sur $\mathbb{R}$.

Composée de deux fonctions



DÉFINITION

Soient u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur $u(I)$. On appelle fonction composée de u par v la fonction notée $v \circ u$ et définie sur I par :

$$v \circ u(x) = v(u(x))$$

Dire que v est définie sur $u(I)$ signifie que pour tout $x \in I$, v est définie en $u(x)$ (autrement dit : $v(u(x))$ existe).



EXEMPLE

Soient $u: x \mapsto x^2 + 1$ et $v: x \mapsto \frac{1}{x}$.

La fonction u est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 \neq 0$.

La fonction v est donc définie en tout $u(x)$: v est définie sur $u(I)$.

La fonction $v \circ u$ est donc définie sur $\mathbb{R}$ et :

$$v \circ u(x) = v[u(x)] = v(x^2 + 1) = \frac{1}{x^2 + 1}$$



DÉRIVÉE

Soient u une fonction dérivable sur I et v une fonction dérivable sur $u(I)$, alors $v \circ u$ est dérivable sur I , et pour tout $x \in I$:

$$(v \circ u)'(x) = v'[u(x)] \times u'(x)$$

Exemple

Si u est une fonction dérivable sur I alors :

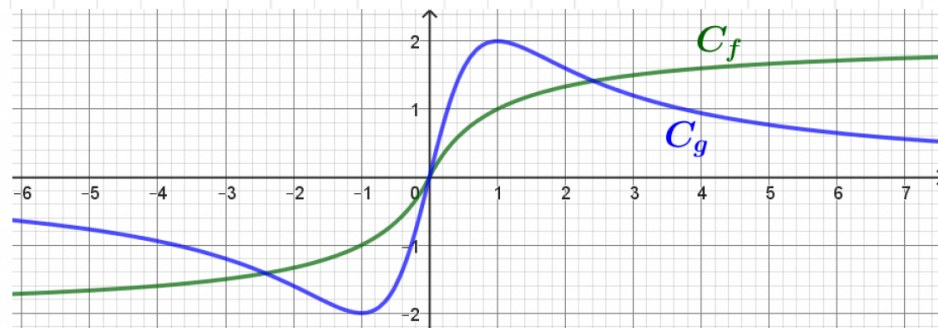
$$(u^n)' = nu^{n-1} \times u' \text{ et } (e^u)' = e^u \times u'$$

Exercices

1. On considère les fonctions **f** et **g** définies par : $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = 3x - 5$.

- a) Calculer $f(g(1))$ puis $g(f(1))$.
- b) Déterminer l'expression de la fonction $h(x) = f(g(x))$
- c) Déterminer l'expression de la fonction $m(x) = g(f(x))$
- d) Vérifier les résultats obtenus à la première question.

2. Représentations graphiques



On définit les fonctions : $h(x) = f(g(x))$ et $m(x) = g(f(x))$.

1) Comparer $h(1)$ et $m(1)$.

2) Calculer $m'(1)$.

Fonctions dérivées



DÉRIVÉES USUELLES ET OPÉRATIONS

dérivées usuelles

f	f'	I_{der}
k constante	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{*+}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

opérations

f	f'
$(u+v)'$	$u' + v'$
ku k constante	ku'
$(uv)'$	$u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$v \circ u(x)$ ou $v(u(x))$	$v'(u(x)) \times u'(x)$



SCANNE MOI



Exemples de dérivée d'une fonction composée

- $\bullet [(x^2+2x)^2]' = 2(x^2+2x) \times (2x+2)$
- $\bullet [\sin(\sqrt{x})]' = \cos(\sqrt{x}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $\bullet [e^{-x^3}]' = e^{-x^3} \times (-3x^2)$

$$u(x) = x^2 + 2x, v(x) = x^2$$

$$u(x) = \sqrt{x}, v(x) = \sin x$$

$$u(x) = -x^3, v(x) = e^x$$

Exercices

1. Calculer les dérivées sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes.

a. $f_1(x) = (5x^2 + 1)^7$

b. $f_2(x) = \frac{1}{f_1(x)}$

c. $f_3(x) = \sqrt{x^4 + 1}$

d. $f_4(x) = e^{-5x+1}$

e. $f_5(x) = \sqrt{e^x + 2}$

f. $f_6(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

2. Étudier le sens de variation des fonctions suivantes.

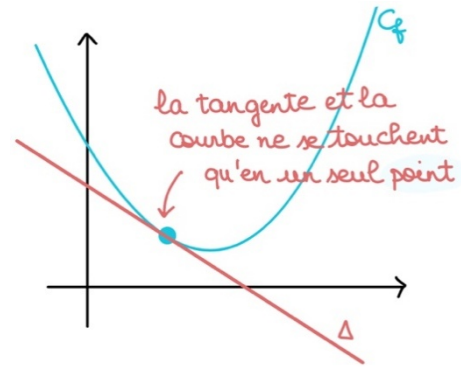
- f est définie sur $[2,5; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x - 5}$

- g est définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = (2\sqrt{x} - 1)^5$

Tangente en un point

DÉFINITION DE LA TANGENTE

Si f est dérivable en a , la droite passant par $A(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée **tangente à C_f au point A** .



ÉQUATION RÉDUITE DE LA TANGENTE

Soit f une fonction dérivable en a , alors l'équation réduite de la tangente au point de C_f d'abscisse a est :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

dérivée de f en a

Méthode : déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a

1. On place le point A d'abscisse a sur la courbe de f .
2. On détermine $f'(a)$
3. À partir du point A , on trace le vecteur de coordonnées $(1; f'(a))$: c'est un **vecteur directeur** de la tangente cherchée.
4. On utilise la formule : $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

On donne la courbe C_f ci-dessous. On sait que f est dérivable en -2 et que $f'(-2) = \frac{5}{3}$.
On cherche à tracer la tangente à C_f au point d'abscisse -2 .

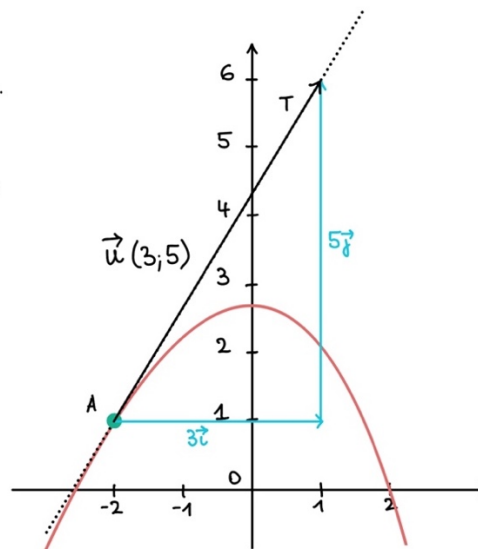
- Un vecteur $\vec{u}(3; 5)$ est un vecteur directeur de la tangente.
- On applique la formule $a = -2$:

$$y = f(-2) + f'(-2)(x - (-2))$$

$$= f(-2) + f'(-2)(x + 2)$$
- Ici on lit $f(-2)$: c'est l'ordonnée de A et donc $f(-2) = 1$

On en déduit :

$$y = 1 + \frac{5}{3}(x + 2) = \frac{5}{3}x + \frac{13}{3}$$



Exercices

1. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer une équation de la tangente à la courbe représentant la fonction au point d'abscisse a .

a. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ $a = 0$

b. $f(x) = \frac{x^2}{3x-9}$ $a = 1$

c. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ $a = 2$

2. **Problème paramétrique**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + 2x + b$ où a et b sont deux réels.

Déterminer les valeurs de a et b telles que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admette au point $A(1; -1)$ une tangente Δ de coefficient directeur -4 .

Dérivée seconde et convexité



DÉRIVÉE SECONDE

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .
On note f' sa fonction dérivée. Si f' est dérivable sur I , alors on appelle **fonction dérivée seconde** de f sur I la fonction dérivée de f' .

On note

$$f''(x) = (f'(x))'$$

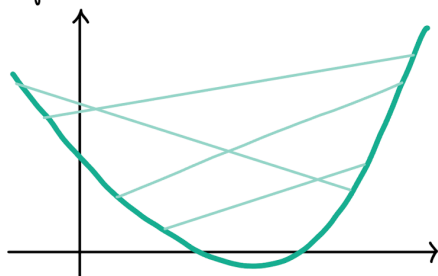


CONVEXITÉ

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . On dit que f est :

convexe

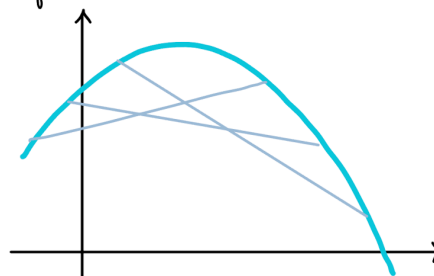
sur I si sa courbe représentative C_f est **en-dessous** de chacune de ses sécantes entre les points d'intersections de C_f .



- f est **convexe** sur I
- la courbe représentative C_f de f est **au-dessus** de toutes ses **tangentes** sur I
- f' est **croissante** sur I
- f'' est **positive** sur I

concave

sur I si sa courbe représentative C_f est **au-dessus** de chacune de ses sécantes entre les points d'intersections de C_f .



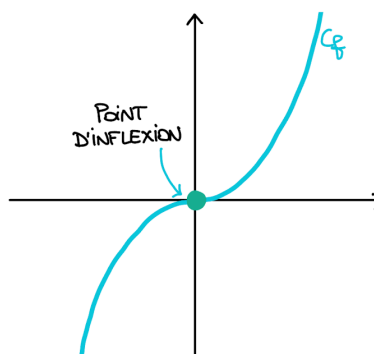
- f est **concave** sur I
- la courbe représentative C_f de f est **en-dessous** de toutes ses **tangentes** sur I
- f' est **décroissante** sur I
- f'' est **négative** sur I



POINT D'INFLEXION

Un **point d'inflexion** est un point où la courbe représentative de f traverse sa tangente.

Propriété : La fonction change de convexité en un point d'inflexion et la dérivée seconde s'annule.

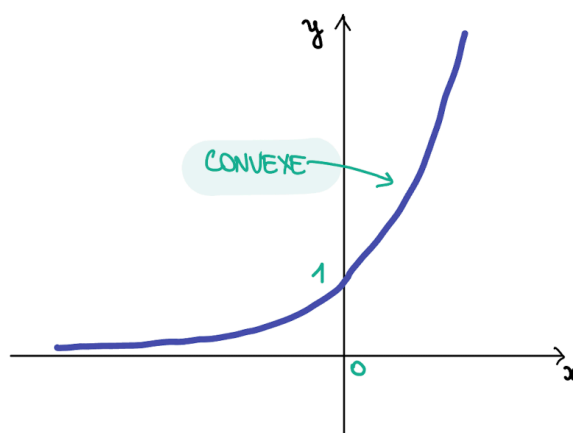
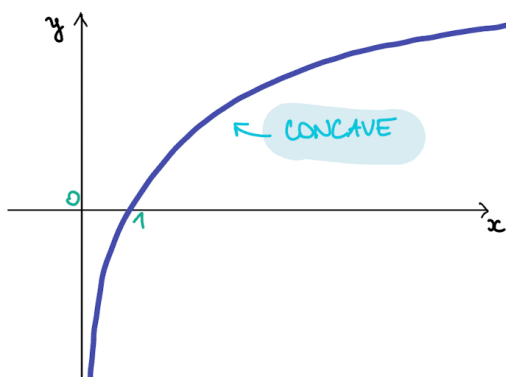
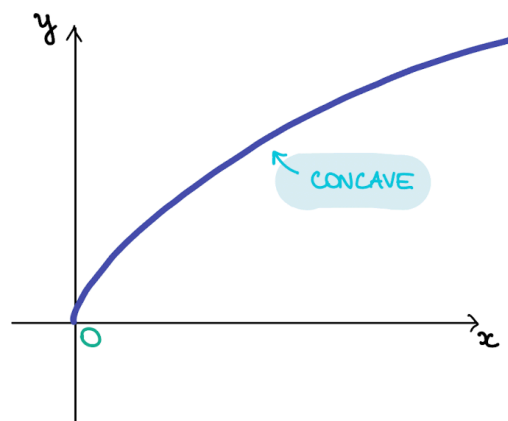
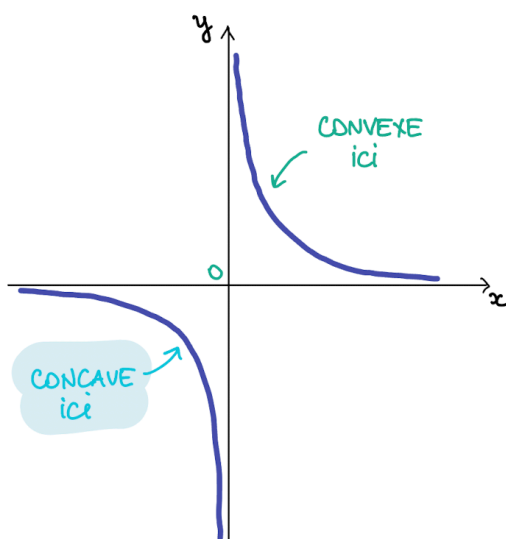
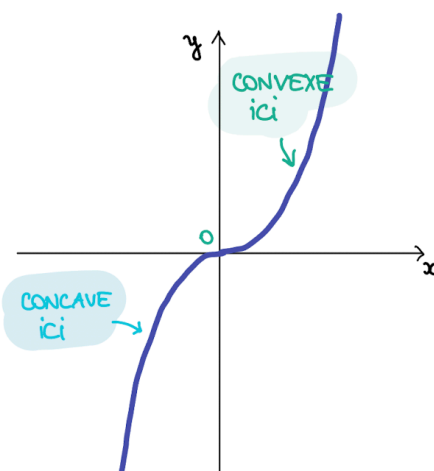
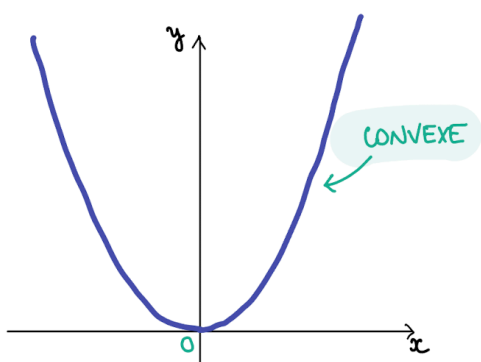


SCANNE MOI



Convexe, concave ?

👉 Connaître la convexité des fonctions de référence



Logarithme népérien

DÉFINITION

Pour tout nombre a strictement positif, on appelle **logarithme népérien** de a l'unique solution réelle de l'équation $e^x = a$. Autrement dit :

$$e^x = a \Leftrightarrow x = \ln(a)$$



Exemples

$$e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln(1) \text{ donc } \ln(1) = 0.$$

$$e^x = e \Leftrightarrow x = \ln(e) \text{ donc } \ln(e) = 1.$$

Propriétés

$$\text{Pour tout } x \in]0; +\infty[, e^{\ln(x)} = x$$

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x.$$

RELATION FONCTIONNELLE

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a

$$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$$

$$\text{Exemple : } \ln(42) = \ln(6 \times 7) = \ln(6) + \ln(7)$$

PROPRIÉTÉS

Pour tous réels a et b strictement positifs et pour tout entier naturel n .

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

$$\ln(a^{-n}) = -n \ln(a)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \ln(a)$$

$$\ln(a^n) = n \ln(a)$$

cette formule sert à retrouver toutes les autres!

Exemples

$$\ln(0,5) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

$$\ln(343) = \ln(7^3) = 3\ln(7)$$

$$\ln\left(\frac{5}{2}\right) = \ln(5) - \ln(2)$$

$$\ln(\sqrt{3}) = \ln\left(3^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln(3)$$

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

La stricte croissance de la fonction $\ln$ sur $]0; +\infty[$ a pour conséquence la propriété suivante.
Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$a = b \Leftrightarrow \ln(a) = \ln(b)$$

$$a > b \Leftrightarrow \ln(a) > \ln(b)$$

Exercices

1. Simplifier l'écriture des expressions suivantes.

a. $\ln(5e) =$

b. $\ln e^3 =$

c. $\ln(\sqrt[3]{e}) =$

d. $\ln \frac{2}{5} + \ln \frac{5}{8} + \ln \frac{8}{11} + \ln \frac{11}{14} =$

2. Résoudre les équations suivantes après avoir fourni l'ensemble d'étude.

a. $\ln x = -2$

b. $\ln x^2 = 1$

c. $\ln \frac{x}{3} = 2$

d. $\ln x^3 = -3$

e. $\ln(3x - 2) = 0$

f. $\ln(x^2 - 1) = \ln 4 + \ln 2$

3. Résoudre les inéquations suivantes après avoir fourni l'ensemble d'étude.

a. $1 - 2 \ln 2x \geqslant 0$

b. $3 - \ln x \leqslant 0$

c. $2 + 3 \ln 2x \leqslant 0$

Fonction logarithme népérien



PROPRIÉTÉS

On appelle fonction **logarithme népérien** la fonction f définie, pour tout $x \in]0; +\infty[$, par :

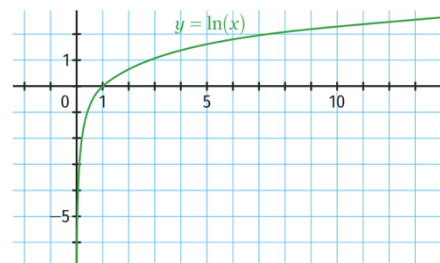
$$f(x) = \ln(x)$$

Propriétés

La fonction logarithme népérien est **strictement croissante** sur $]0; +\infty[$. De plus

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$



Théorème des croissances comparées

Pour tout entier naturel n strictement positif :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$\text{En particulier, } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

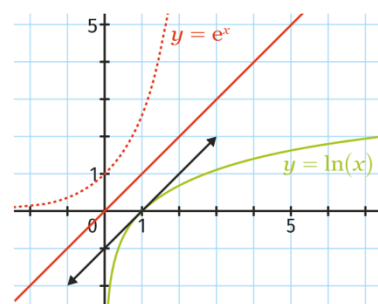


SCANNE MOI



PROPRIÉTÉS GRAPHIQUES

- Dans un repère orthonormé, la représentation graphique de la fonction logarithme népérien est le symétrique de la représentation graphique de la fonction exponentielle par rapport à la droite d'équation $y = x$.
- La fonction logarithme népérien est **concave** sur $]0; +\infty[$.
- La droite d'équation $x = 0$ est une **asymptote verticale** à la représentation graphique de la fonction.



DÉRIVATION

La fonction **logarithme népérien** est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction inverse restreinte à $]0; +\infty[$.

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Propriété

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$. Alors $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $(\ln(u))'$, définie sur I , par :

$$(\ln(u))'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exemple

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$. Ainsi, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ a pour dérivée la fonction f' définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Exercices

1. Donner le domaine de définition des fonctions suivantes.

a. $f_0(x) = \ln(-3x - 1)$

b. $f_1(x) = \ln(-4x + 5)$

2. Dériver une fonction logarithme.

Dans chaque cas, u est une fonction strictement positive sur son ensemble de définition.
Calculer la dérivée de f .

a. $f(x) = \ln(5x + 3)$

b. $f(x) = \ln(x^2 + 4)$

c. $f(x) = \ln(3x^2 - 2x + 6)$

d. $f(x) = \ln(x^3 + 1)$ sur $]0; +\infty[$

e. $f(x) = \ln(e^x + 1)$

f. $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $]0; +\infty[$

Équations trigonométriques



RÉSOLVRE $\cos x = \cos a$ ou $\sin x = \sin a$

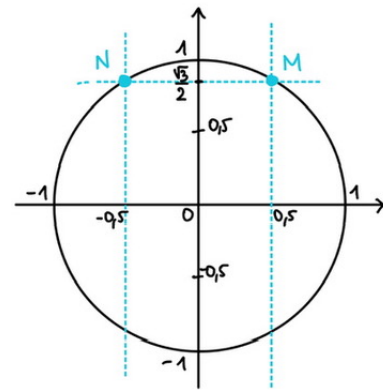
- Placer sur le cercle trigonométrique le point M d'affixe a , puis, s'il existe, l'autre point du cercle ayant la même abscisse (ou ordonnée).
- Déduire les solutions de l'équation à l'aide des résultats suivants :

$$\cos(x) = \cos(a) \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -a + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - a + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- On a $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Plaçons $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$. L'autre point du cercle ayant pour ordonnée $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est le point $N\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.
- $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{ou} \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$



TROUVER $\cos a$ CONNAISSANT $\sin a$ (OU INVERSEMENT)

Exemple : Soit a un réel vérifiant $\sin a = 0,8$ et tel que $a \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Déterminer la valeur de $\cos a$.

- Calculer $\cos^2 a$ à l'aide de la relation $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$.
- Déduire, de l'intervalle auquel appartient a , le signe de $\cos a$.

Calculons $\cos^2(a)$:

$$\begin{aligned} \cos^2(a) + \sin^2(a) &= 1 \Leftrightarrow \cos^2(a) + 0,8^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \cos^2(a) = 0,36 \end{aligned}$$

Comme $a \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, on sait que $\cos(a)$ est négatif. Par conséquent,

$$\cos(a) = -0,6$$

Exercices

1. Déterminer les réels t de l'intervalle $] -\pi; \pi[$ tels que :

$$\cos(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(t) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{🌶} \sin(t) = \sin\left(\frac{17\pi}{5}\right)$$

2. Déterminer les réels t tels que :

$$\cos(t) = \cos\frac{\pi}{8}$$

$$\cos(t) = \frac{1}{2}$$

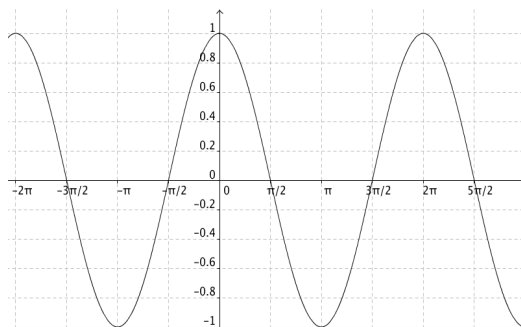
$$\sin(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(t) = -1$$

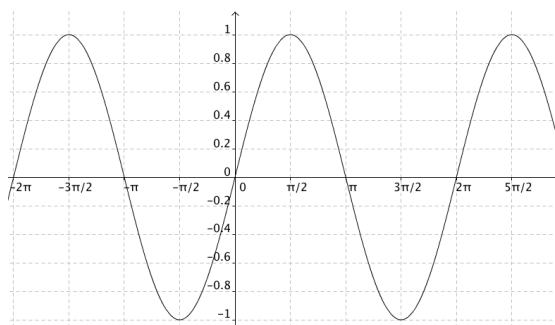
3. Soit a un réel vérifiant $\cos a = \frac{5}{7}$ et tel que $a \in [0; \pi]$. Déterminer $\sin a$.

Fonctions trigonométriques

La fonction **cosinus** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x , associe $\cos(x)$.



La fonction **sinus**, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x , associe $\sin(x)$.



PÉRIODICITÉ

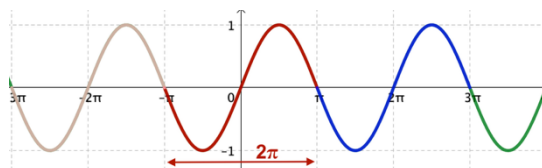
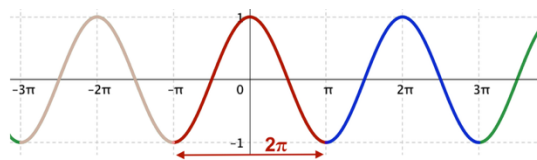
$$\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$$

$$\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$$

où k entier relatif.

On dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques de période 2π** .

Cela signifie qu'on retrouve le même morceau de courbe sur chaque intervalle de longueur 2π .



PARITÉ

Une fonction dont la courbe est

- **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées** est une fonction **paire**.
- **symétrique par rapport à l'origine du repère** est une fonction **impaire**.

La fonction **cosinus** est **paire**
et on a :

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

La fonction **sinus** est **impaire**
et on a :

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$



DÉRIVATION

La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a **$\sin'(x) = \cos(x)$** .

La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : **$\cos'(x) = -\sin(x)$** .

Exercices

1. Cocher la bonne case.

- a. $f(x) = \sin^2(-x)$ est paire. ☐ Vrai ☐ Faux
- b. $f(x) = \cos(3x)$ est périodique de période 3π . ☐ Vrai ☐ Faux
- c. $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ est périodique de période π . ☐ Vrai ☐ Faux
- d. $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ est impaire. ☐ Vrai ☐ Faux

2. Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

- a. $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$
- b. $f(x) = 3\cos(x) - 2\sin(x)$
- c. $f(x) = x\sin(x)$
- d. $f(x) = \sin(2x)$
- e. $f(x) = \cos(3x + 1)$
- f. $f(x) = \sin^2(x)$
- g. $f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$ sur $]0; +\infty[$
- h. $f(x) = \cos(x^2)$

Primitives de fonctions



DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur I . On appelle **primitive** de f sur I , tout fonction F définie et dérivable sur I telle que : $F' = f$.

Autre formulation : F est **solution de l'équation différentielle** $y' = f$.

Exemple

La fonction $F: x \mapsto x^2$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f: x \mapsto 2x$.

On admet que toute fonction continue sur I admet des primitives sur I .



PRIMITIVES USUELLES

f	F (c constante)	f	F (c constante)
a constante	$ax + c$	$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$
x	$\frac{1}{2}x^2 + c$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$
x^2	$\frac{1}{3}x^3 + c$	e^x	$e^x + c$
$(n \neq -1) x^n$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$\cos x$	$\sin x + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$	$\sin x$	$-\cos x + c$



THÉORÈME

Soit f une fonction continue sur I et F une primitive de f sur I , alors les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto F(x) + c$ où c est un réel quelconque.

Pour tous $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}$, il existe une **unique primitive** F de f telle que $F(a) = b$.

Corollaire

Pour tous $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

Exemple

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0 + \infty[$, alors elle admet des primitives sur $]0 + \infty[$; ce sont les fonctions de la forme $x \mapsto \ln(x) + c$, où c est un réel quelconque et en particulier :

- $x \mapsto \ln(x)$ est l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 ;
- $x \mapsto \ln(x) + 2$ est l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui vaut 2 en 1.

Exercices

1. Trouver les primitives des fonctions suivantes sur l'intervalle I considéré.

a. $f(x) = x^2 - 3x + 1$ sur $I = \mathbb{R}$

b. $f(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}}$ sur $I =]0; +\infty[$

c. $f(x) = \frac{2}{x^3}$ sur $I =]0; +\infty[$

2. Trouver la primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

a. $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$, $I =]0; +\infty[$ et $x_0 = 1$, $y_0 = 5$.

b. $f(x) = x^2 - 2x - \frac{1}{2}$, $I = \mathbb{R}$ et $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.

c. $f(x) = \frac{3x-1}{x^3}$, $I =]0; +\infty[$ et $x_0 = 3$, $y_0 = 2$.

Primitive : opérations et composition



COMPOSITION

D'après le théorème de dérivation d'une fonction composée $v \circ u$ est une primitive de $(v' \circ u) \times u'$.
Le tableau suivant donne les cas usuels à connaître. u et v désignent deux fonctions continues sur I et k un réel.

f	F (c constante)	f	F (c constante)
$u'(x) u^n(x)$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1}(x) + c$	$\frac{u'(x)}{u^2(x)}$	$-\frac{1}{u(x)} + c$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + c$	$u'(x) e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + c$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x) + c$	$u'(x) \sin(u(x))$	$-\cos(u(x)) + c$
		$u'(x) \cos(u(x))$	$\sin(u(x)) + c$



EXEMPLES

Soit u une fonction dérivable sur I .

Forme $\frac{u'}{u}$. Si u ne s'annule pas sur I , une primitive de $\frac{u'}{u}$ sur I est $\ln |u|$.

Exemple : soit $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

On pose $u(x) = x^2 + 1$, donc $u'(x) = 2x$.

$f = \frac{u'}{u}$ donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = \ln(x^2 + 1)$.

Forme $u'e^u$. Une primitive de $u'e^u$ sur I est e^u .

Exemple : soit $f(x) = 3e^{3x+1}$.

On pose $u(x) = 3x + 1$, donc $u'(x) = 3$.

$f = u'e^u$ donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = e^{3x+1}$.

Forme $u'u^n$. Une primitive de $u'u^n$ (avec $n \neq -1$) sur I est $\frac{u^{n+1}}{n+1}$.

Exemple : soit $f(x) = 4x(2x^2 + 1)^3$.

On pose $u(x) = 2x^2 + 1$, donc $u'(x) = 4x$.

$f = u'u^3$ donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = \frac{(2x^2+1)^4}{4}$.



Exercices

Exemple pas à pas

Trouver une primitive de $f(x) = 6x^2(2x^3 + 5)^4$ sur $I = \mathbb{R}$.

Étape 1 : repérer la fonction intérieure

On identifie la partie composée. Ici, l'expression $2x^3 + 5$ est élevée à la puissance 4.

On pose $u(x) = 2x^3 + 5$.

Étape 2 : calculer u' : $u'(x) = 6x^2$

Étape 3 : comparer f à $u'u^n$

On remarque que $f(x) = u'(x) \times (u(x))^4$

En effet, $u'(x) \times u(x)^4 = 6x^2 \times (2x^3 + 5)^4 = f(x)$.

Donc $f = u'u^4$, avec $n = 4$.

Étape 4 : appliquer la formule

Une primitive de $u'u^n$ est $\frac{u^{n+1}}{n+1}$. Ici $n + 1 = 5$. $F(x) = \frac{u(x)^5}{5}$

Étape 5 : conclure

$$F(x) = \frac{(2x^3 + 5)^5}{5}$$

Vérification

On dérive F pour retrouver f . $F'(x) = \frac{1}{5} \times 5 \times u'(x) \times u(x)^4 = u'(x) \times u(x)^4 = 6x^2(2x^3 + 5)^4$

On retrouve bien $f(x)$.

Trouver les primitives des fonctions suivantes sur l'intervalle I considéré.

a. $f(x) = 2x(x^2 + 1)^3$ sur $I = \mathbb{R}$

b. $f(x) = \frac{2x}{x^2+3}$ sur $I = \mathbb{R}$

c. $f(x) = 4xe^{x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$

d. $f(x) = \cos(x)\sin^2(x)$ sur $I = \mathbb{R}$

e. $f(x) = 3(3x - 1)e^{(3x-1)^2}$ sur $I = \mathbb{R}$

Équations différentielles

ÉQUATION $y' = ay$

L'équation différentielle $(E_0): y' = ay$, qui peut aussi s'écrire $y' - ay = 0$, est appelée **équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants**.

Exemple

Les équations différentielles $y' = 5y$ et $2y' + 9y = 0$ sont des équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre à coefficients constants avec respectivement $a = 5$ et $a = -\frac{9}{2}$.

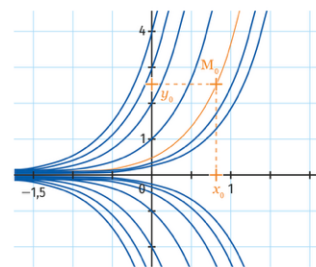
Les solutions de l'équation $y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ce^{ax}$, où C est un réel.

Pour tous réels x_0 et y_0 , (E_0) a une unique solution y telle que $y(x_0) = y_0$.

Exemple

Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{2x}$, où C est un réel, sont les solutions de l'équation différentielle $(E_0): y' = 2y$.

L'allure des courbes représentatives de certaines solutions de (E_0) est donnée ci-contre.



Propriété

Soient y_1 et y_2 des solutions de (E_0) et k un réel. Alors la somme $y_1 + y_2$ et le produit ky_1 sont aussi solutions de (E_0) .

ÉQUATION $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$

L'équation différentielle $(E): y' = ay + b$, qui peut aussi s'écrire $y' - ay = b$, est appelée **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre**.

Propriété

Les solutions de l'équation $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ce^{\frac{ax}{a}} - \frac{b}{a}$.



ÉQUATION $y' = ay + f$ avec $a \neq 0$

L'équation différentielle $(E): y' = ay + f$, qui s'écrit aussi $y' - ay = f$, est également appelée **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre**.

Soit φ une solution particulière de l'équation $y' = ay + f$.
Alors y est une solution de (E) si et seulement si, $y - \varphi$ est une solution de l'équation homogène associée $y' = ay$.

Méthode

forme de
l'équation
(E)

$$y' = f$$

méthode

Trouver une primitive
de la fonction f

$$y' = ay$$

$a \neq 0$

• Les solutions sont les fonctions
définies par :

$$x \mapsto C e^{ax} \quad (C \in \mathbb{R})$$

• Pour tout x_0 et y_0 réels, (E_0)
a une unique solution telle
que $y(x_0) = y_0$

$$y' = ay + b$$

$a \neq 0$

Les solutions sont les fonctions
définies par :

$$x \mapsto C e^{ax} - \frac{b}{a} \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$y' = ay + f$$

$a \neq 0$

Soit φ une solution particulière
de (E). Alors y est une solution
de (E) si et seulement si

$y - \varphi$ est une solution de
l'équation homogène $y' = ay$

Intégrale d'une fonction continue

FONCTION POSITIVE

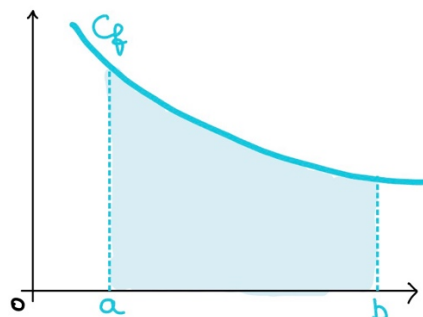
Définition

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ ($a \leq b$).

On appelle **intégrale de a à b de f** l'aire délimitée par la courbe représentative de f et l'axe des abscisses entre a et b .

On la note

$$\int_a^b f(x) dx$$



Remarque :

$$\int_a^b f(x) dx$$

La variable x est "muette". On notera indifféremment :

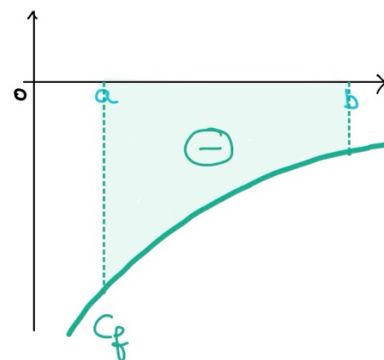
$$\int_a^b f(t) dt, \int_a^b f(y) dy, \int_a^b f(\theta) d\theta$$



FONCTION NÉGATIVE

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ ($a \leq b$).

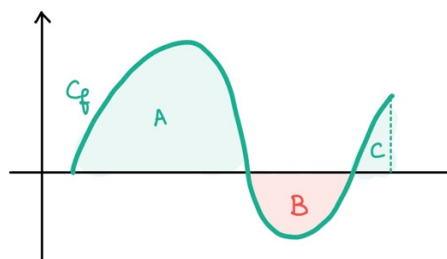
Si f est négative sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx$ est **l'opposé** de l'aire délimitée par la courbe représentative de f et l'axe des abscisses entre a et b .



Calcul d'aires

Si f est de signe quelconque :

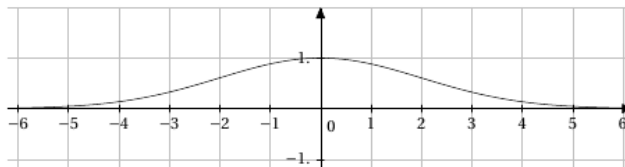
$$\int_a^b f(x) dx = \text{Aire}(A) - \text{Aire}(B) + \text{Aire}(C)$$



Exercice

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse.

1. La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-6; 6]$.



On pose $A = \int_{-2}^2 f(x) dx$. Un encadrement de A est :

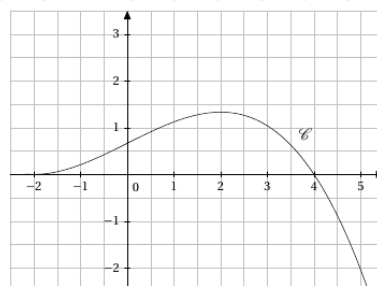
A : $0 < A < 1$

B : $1 < A < 2$

C : $3 < A < 4$

D : $4 < A < 5$

2. La courbe ($\mathcal{C}$) tracée ci-contre représente une fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé. Cette affirmation est-elle vraie ?



Proposition : $2 \leq \int_1^3 f(x) dx \leq 3$

3. On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f dans un repère du plan.

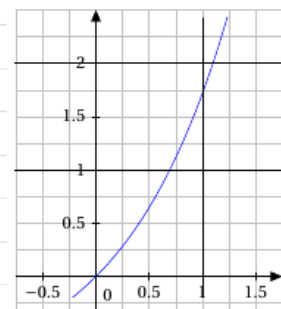
La valeur de $\int_0^1 f(x) dx$ est :

A : $e - 2$

B : 2

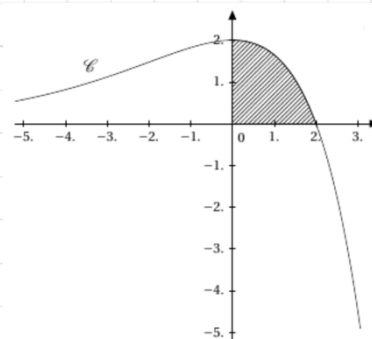
C : $\frac{1}{4}$

D : $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$



4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé.

À l'aide de la figure, justifier que la valeur de l'intégrale $\int_0^2 f(x) dx$ est comprise entre 2 et 4.



Primitive et intégrale



THÉORÈME FONDAMENTAL

Soit f une fonction continue sur I , alors pour tous $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$



SCANNE MOI



où F est une primitive quelconque de f sur I .

Notation On pose $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$



EXEMPLES

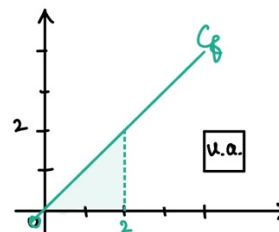
Exemple 1

Calculer l'intégrale $\int_0^2 x dx$. Soit $f(x) = x$.

Une primitive F de f est $F(x) = \frac{x^2}{2}$

$$\int_0^2 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{(2)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} = \frac{4-0}{2} = 2 \text{ u.a.}$$

$$\text{Aire du triangle} = \frac{2 \times 2}{2} = 2 \text{ u.a.}$$



Exemple 2

Calculer $\int_{-1}^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx$.

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

Par opérations de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$. f admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.

On a $f = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, avec $u(x) = x^2 + 9$ et $u'(x) = 2x$. Donc $F = \sqrt{u}$.

Pour tout réel x , $F(x) = \sqrt{x^2 + 9}$.

$$\text{Ainsi, } \int_{-1}^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx = [\sqrt{x^2+9}]_{-1}^3 = \sqrt{3^2+9} - \sqrt{(-1)^2+9} = 3\sqrt{2} - \sqrt{10}.$$

Exercice

Calculer les intégrales des fonctions sur les intervalles indiqués.

a) $I = \int_5^{10} (-5x + 2) dx$

b) $I = \int_{-1}^1 (9x^2 + 6x + 3) dx$

c) $I = \int_{-6}^{-2} \left(\frac{-2}{-2x-2} \right) dx$

d) $I = \int_0^2 e^x (5e^x + 3)^2 dx$

Propriétés de l'intégrale



BORNES D'INTÉGRATION

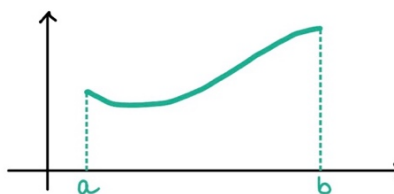
$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$$



RELATION DE CHASLES

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et $c \in [a; b]$, alors :

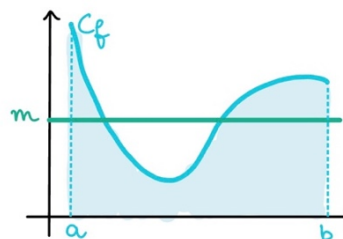
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$



VALEUR MOYENNE

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$, avec $a < b$. On appelle **valeur moyenne de f** sur $[a; b]$ le réel m tel que :

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$



LINÉARITÉ DE L'INTÉGRALE

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ et k un réel. On a :

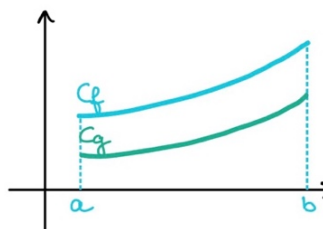
- $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
- $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$



POSITIVITÉ ET CROISSANCE

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$. Si pour tout $x \in [a; b]$,

- $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$
- $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$



Exercice

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse.

a) Soit f une fonction continue sur $[-5; 0]$.

☐ Vrai ☐ Faux

$$\int_{-5}^0 (f(t) + 4)dt = \int_{-5}^0 f(t)dt + 4$$

b) La valeur moyenne de la fonction f définie sur $[-5; 0]$ par $f(x) = 2x$ est -25 .

☐ Vrai ☐ Faux

c) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)dt = 0$

☐ Vrai ☐ Faux

d) Pour toutes fonctions f et g continues sur $[-5; 0]$,

☐ Vrai ☐ Faux

$$\int_{-5}^0 (f(x) + g(x))dx = \int_{-5}^0 f(x)dx + \int_{-5}^0 g(x)dx$$

e) La fonction F définie sur $[0 + \infty[$ par $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ change de sens de variation.

☐ Vrai ☐ Faux

f) Si F est une primitive de f sur $[3; 7]$, alors $\int_3^7 f(t)dt = F(7) - F(3)$.

☐ Vrai ☐ Faux

g) La valeur moyenne d'une fonction f continue sur $[3; 7]$ est donnée par $\frac{1}{7-3} \int_3^7 f(x)dx$.

☐ Vrai ☐ Faux

h) $\int_5^8 6 dt = 19$

☐ Vrai ☐ Faux

i) On sait que si une fonction f continue sur $[5; 8]$ vérifie sur cet intervalle $1 \leq f(x) \leq 6$.

On peut en déduire que $3 \leq \int_5^8 f(x)dx \leq 18$.

☐ Vrai ☐ Faux

j) L'aire entre la courbe d'une fonction f et l'axe des abscisses sur $[5; 8]$ est donnée par $\int_5^8 f(x)dx$.

☐ Vrai ☐ Faux

Intégration par parties



THÉORÈME

Soient u et v deux fonctions dérivables continues sur $[a; b]$, alors on a :

$$\int_a^b u'(x) \times v(x) dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \times v'(x) dx$$



MÉTHODE

Lorsque le calcul d'une intégrale n'est pas possible directement avec une primitive, on peut utiliser une intégration par parties.

1. **Choisir** judicieusement u' et v en justifiant la dérivabilité et la continuité des fonctions.
2. **Utiliser** la formule d'intégration par parties.
3. **Calculer** les intégrales pour conclure.



EXEMPLE

Calculer $I = \int_0^{\pi} x \sin(x) dx$



1. On définit $x \times \sin(x) = u(x) \times v'(x)$
 $u(x) = x$ et $v(x) = -\cos(x)$, $u'(x) = 1$
 u et v sont définies sur $[0; \pi]$ et leurs dérivées sont continues sur $[0; \pi]$.

$$\begin{aligned} 2. \quad \int_0^{\pi} x \sin(x) dx &= \int_0^{\pi} u(x) \times v'(x) dx = [u(x) v(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u'(x) v(x) dx \\ I &= \int_0^{\pi} x \sin(x) dx = [-x \cos(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1 \times (-\cos x) dx \\ &= -\pi \times (-1) - 0 + \int_0^{\pi} \cos x dx \\ &= \pi + [\sin x]_0^{\pi} = \pi + \sin(\pi) - \sin(0) = \pi \end{aligned}$$

Exercice

Calculer les intégrales sur les intervalles en utilisant l'intégration par parties.

1) Calculer $I = \int_0^1 (3x - 1)e^{-x} dx$

$$u'(x) =$$

$$v(x) =$$

$$u(x) =$$

$$v'(x) =$$

2) Calculer $I = \int_0^{\pi/4} (3x + 2)\cos(-2x) dx$

$$u'(x) =$$

$$v(x) =$$

$$u(x) =$$

$$v'(x) =$$

3) Calculer $I = \int_1^e (-4x + 3)\ln(x) dx$

$$u'(x) =$$

$$v(x) =$$

$$u(x) =$$

$$v'(x) =$$

4) 🌶 Calculer $I = \int_0^1 \frac{x}{(5x+3)^3} dx$

$$u'(x) =$$

$$v(x) =$$

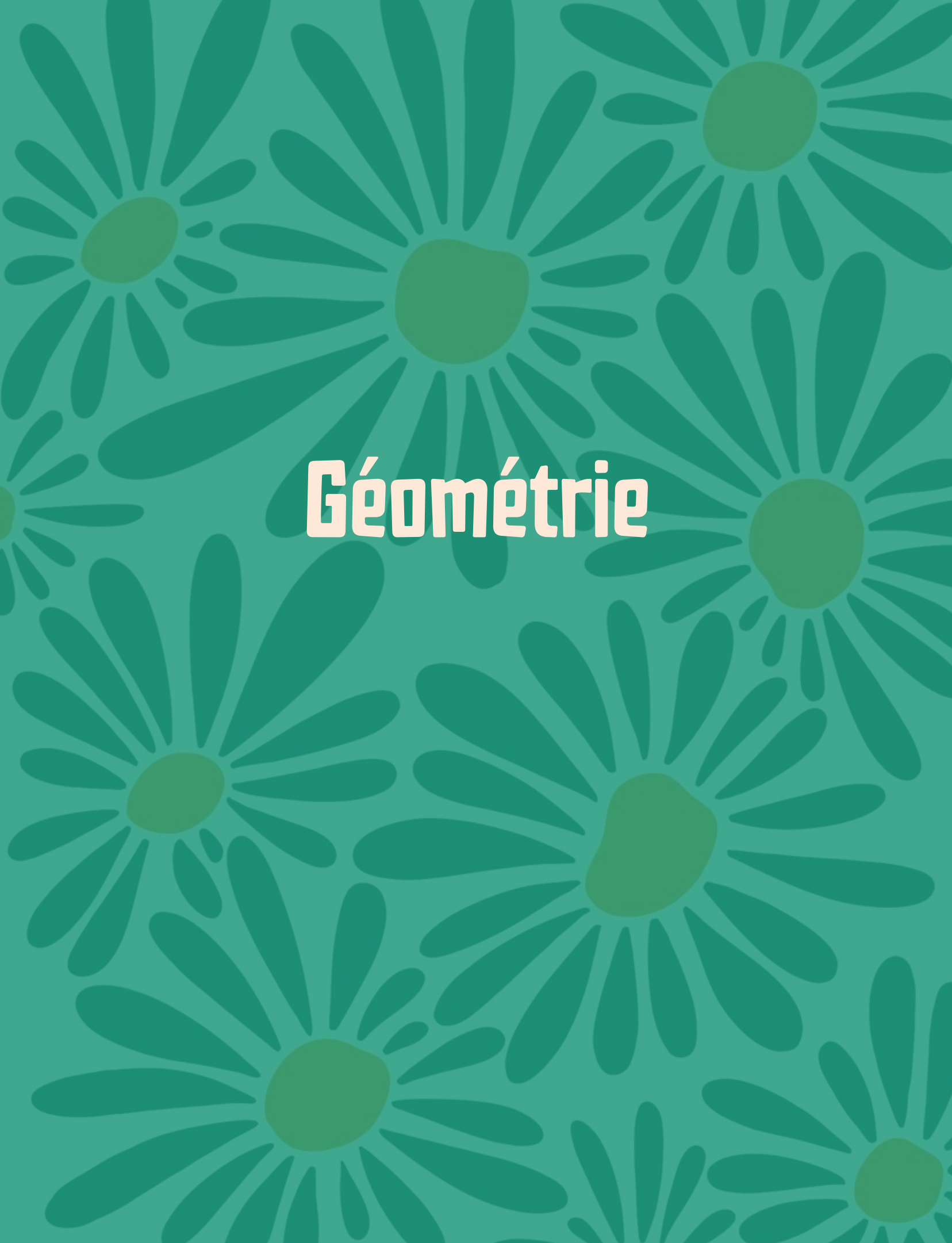
$$u(x) =$$

$$v'(x) =$$

Notes personnelles

mes réussites

points à travailler



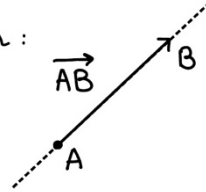
Géométrie

Vecteurs dans l'espace

DÉFINITION

Un vecteur de l'espace est un objet défini par :

- une **direction** dans l'espace
- un **sens**
- et une **norme**, qui est une longueur



Le vecteur $\vec{AB}$ a pour direction la droite (AB), pour sens A vers B, et pour norme la distance AB.

VECTEURS COLINÉAIRES

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** lorsqu'il existe un nombre réel λ non nul tel que :

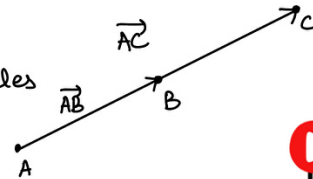
$$\vec{u} = \lambda \vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \lambda \vec{u}$$

↳ c'est-à-dire qu'ils ont la même direction

Propriété

Soit A, B et C trois points distincts de l'espace.

Les points A, B et C sont **alignés** si, et seulement si, les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont **colinéaires**.



VECTEURS COPLANAIRES

On considère quatre points de l'espace

O, A, B et C et on définit trois vecteurs

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ par

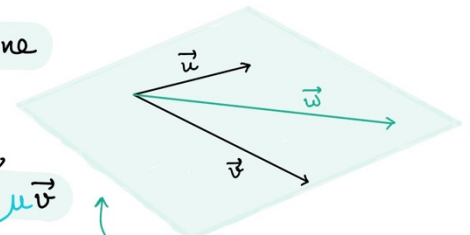
$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{OA} \\ \vec{v} = \vec{OB} \\ \vec{w} = \vec{OC} \end{cases}$$

On dit que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** lorsque les points O, A, B et C appartiennent à un même plan.

Propriété

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si, et seulement si, il existe deux nombres réels λ et μ tels que $\vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$



On dit que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercices

1. Calculer les coordonnées d'un point défini par une combinaison de vecteurs.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(4; 3; -3)$, $B(8; 0; -2)$ et $C(6; 4; -6)$. Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

2. Prouver que 3 points de l'espace sont ou non alignés.

Dans l'espace, muni d'un repère orthonormé, on considère trois points : $A(3; -; 3 - 1)$, $B(6; 6; -16)$ et $C(5; 3; -11)$. Les points A , B et C sont ils alignés ? Justifier ta réponse.

3. Déterminer si des points sont ou non coplanaires.

On donne, dans un repère orthonormé de l'espace $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, les coordonnées des points suivants. $A(1; 2; 3)$, $B(3; 4; -2)$, $C(3; -; 6 - 1)$, $D(-; 5; 617)$.

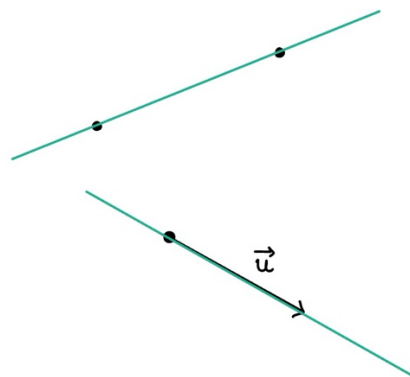
Déterminer si les points A , B , C et D sont ou non coplanaires.

Droites de l'espace

DÉFINITION

On peut définir une droite de l'espace :

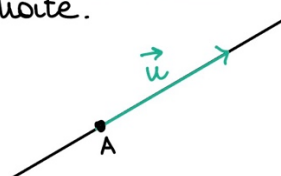
- soit par deux points distincts en traçant l'unique droite qui relie ces deux points ;
- soit par un point et un vecteur non nul en traçant l'unique droite passant par ce point ayant la même direction que le vecteur.



VECTEUR DIRECTEUR

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{AM} = \lambda \vec{u}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, est une droite.

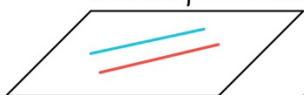
$\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite.



POSITION RELATIVE DE DEUX DROITES

COPLANAIRES

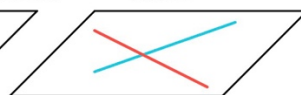
droites parallèles



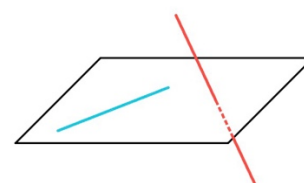
droites confondues



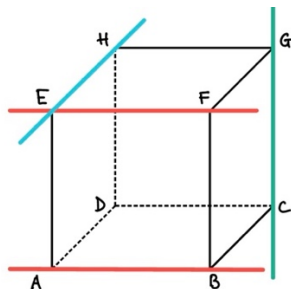
sécantes



NON COPLANAIRES



EXEMPLE



- (AB) et (EF) sont parallèles (donc coplanaires)
- (EF) et (EH) sont sécantes en E (donc coplanaires)
- (EF) et (CG) sont non coplanaires.



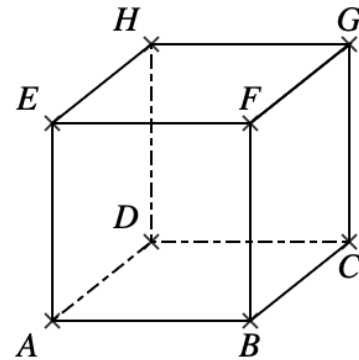
Exercices

1. Positions relatives de droites

On considère le cube suivant. On justifiera toutes les réponses à l'aide de bases de vecteurs bien choisies.

Quelles sont les positions relatives :

- des droites (HF) et (DF) ?
- des droites (EC) et (AG) ?
- des droites (EC) et (FB) ?
- des droites (EG) et (AC) ?



2. Étude de droites dans un cube

On considère un cube $ABCDEFGH$. On note M le milieu du segment $[EH]$, N celui de $[FC]$ et P le point tel que $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.

1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L . Construire le point L .

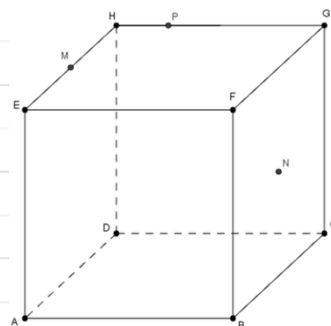
2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection.

On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.

a. Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.

b. Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF) .

3. En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP) .



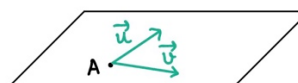
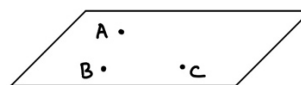
Plans de l'espace



DÉFINITION

On peut définir un plan de l'espace :

- soit par trois points non alignés
- soit par un point et deux vecteurs non colinéaires.



La direction du plan est déterminée par les deux vecteurs non colinéaires.

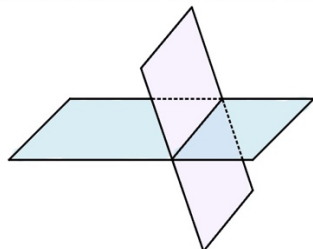
CARACTÉRISATION

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. L'ensemble des points M tels que $\vec{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$, λ et μ réels est un plan de l'espace.

POSITION RELATIVE DE DEUX PLANS

PLANS SÉCANTS

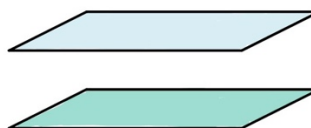
L'intersection est une droite.



PLANS PARALLÈLES

Strictement parallèles

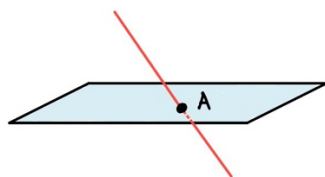
Confondus



POSITION RELATIVE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

SÉCANTS

sécants en un point



PARALLÈLES

strictement parallèles

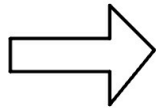
contenus l'une dans l'autre



Méthode

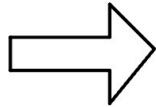
Comment montrer que...

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont
colinéaires



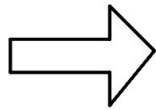
s'il existe un réel λ non nul
tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$

A, B et C sont
alignés



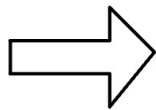
$\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires

$\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont
coplanaires



Pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires, non nuls,
s'il existe deux réels λ et μ
tels que $\vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$
 $\vec{w}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont
orthogonaux



Le produit scalaire est nul
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Représentation paramétrique d'une droite

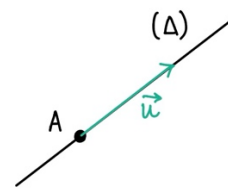


PROPRIÉTÉ

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ appartenant à une droite Δ de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$M(x; y; z)$ appartient à Δ si, et seulement si, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$



SCANNE MOI



DÉFINITION

Le système d'équations avec t décrivant $\mathbb{R}$ est une **représentation paramétrique** de la droite Δ .

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

Remarque : il existe une infinité de représentations paramétriques d'une droite.



MÉTHODE : DONNER LA REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE

On se place dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) où $A(1; -3; 1)$ et $B(-1; 1; 4)$.

Méthode

Étape 1 : déterminer un vecteur directeur

À partir des deux points connus $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$, on calcule les coordonnées du

vecteur $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

Étape 2 : choisir un point de la droite

On prend l'un des deux points connus comme point de référence de la droite.

Étape 3 : écrire la représentation paramétrique

En notant $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, une représentation paramétrique de la droite (AB) est : $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} t \in \mathbb{R}$

Corrigé

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB) . On détermine alors ses coordonnées puis on applique la définition du cours.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1-1 \\ 1-(-3) \\ 4-1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = -2t + x_A \\ y = 4t + y_A \\ z = 3t + z_A \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R} \quad \text{soit}$$

$$\begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = 4t - 3 \\ z = 3t + 1 \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

Exercices

1. Déterminer une représentation paramétrique d'une droite.

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne le point F et le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées respectives : $F(-; 2; 4 - 6)$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) , passant par le point F et ayant comme vecteur directeur $\vec{v}$.

2. Déterminer si un point appartient à une droite de l'espace.

Déterminer si le point $M(20; 8; -29)$ appartient à la droite (Δ) dont on donne la représentation paramétrique ci-dessous :

$$(\Delta) \begin{cases} x = 8 - 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = -5 + 6t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

Équation cartésienne d'un plan

L'équation cartésienne d'un plan est une équation qui donne les coordonnées de tout point du plan. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

ÉQUATION DU PLAN

Un plan ayant pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a pour équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$.

MÉTHODE : Déterminer l'équation d'un plan

Exemple 1. On considère le plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ passant par le point $A(1; 2; -1)$.

Déterminer une équation cartésienne de ce plan.

Étape 1 : le vecteur normal est déjà donné : $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Étape 2 : écrire l'équation à l'aide du vecteur normal

Une équation du plan est de la forme : $2x - y + 3z + d = 0$

Étape 3 : déterminer la constante d

Le point $A(1; 2; -1)$ appartient au plan, donc :

$$2 \times 1 - 2 + 3 \times (-1) + d = 0$$

$$2 - 2 - 3 + d = 0$$

$$-3 + d = 0$$

$$d = 3$$

On en déduit une équation cartésienne du plan : $2x - y + 3z + 3 = 0$ ✓

Exemple 2. On considère les points $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$ et $C(0; 0; 1)$. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .

Étape 1 : déterminer un vecteur normal au plan. On calcule deux vecteurs directeurs du plan :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On cherche $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tel que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$: $-a + b = 0 \Rightarrow b = a$ et $-a + c = 0 \Rightarrow c = a$

En choisissant $a = 1$, on obtient $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Étape 2 : écrire l'équation à l'aide du vecteur normal.

Une équation du plan est de la forme : $x + y + z + d = 0$

Étape 3 : déterminer la constante d

Le point $A(1; 0; 0)$ appartient au plan, donc : $1 + 0 + 0 + d = 0$, soit $d = -1$

On en déduit une équation cartésienne du plan (ABC) : $x + y + z - 1 = 0$ ✓



Exercice

1) On considère le plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ passant par le point $A(2; -; 14)$.

Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

2) On considère le plan $\mathcal{P}$ contenant la droite D de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ passant par le point $M(1; 0; 2)$, et contenant également le point $N(3; 1; 0)$ n'appartenant pas à D .
Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

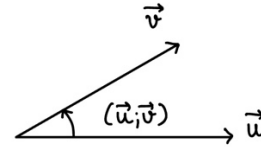
3) On considère les points $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$ et $C(0; 0; 4)$, non alignés.
Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)

Produit scalaire



C'EST QUOI, LE PRODUIT SCALAIRE ?

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On définit leur produit scalaire par : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$



PROPRIÉTÉS

- **Bilinéarité** :
$$\begin{cases} \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \\ \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) \end{cases}$$
- **Symétrie** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- **Formules de polarisation** :
$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) \end{cases}$$

ORTHOGONALITÉ

Deux vecteurs non nuls sont **orthogonaux** si, et seulement, si leur produit scalaire est nul : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

DANS UN REPÈRE ORTHONORMÉ

Expression du produit scalaire

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé. On a

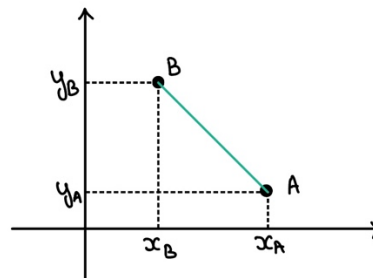
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

DISTANCE ENTRE DEUX POINTS

Dans un repère orthonormé de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, pour tous $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$, on a :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$



Exercices

1. Calculer le produit scalaire des vecteurs suivants.

Dans un repère orthonormé de l'espace $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on donne deux vecteurs :

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} =$

b) $\vec{u} \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}$. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} =$

c) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} =$

2. Déterminer un vecteur orthogonal à deux autres vecteurs.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. Déterminer les réels a et b , tels

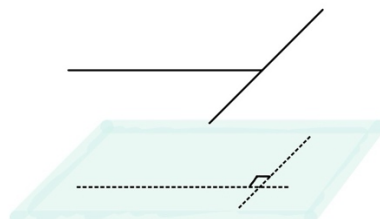
que $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ -16 \end{pmatrix}$ soit un vecteur normal au plan engendré par les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Orthogonalité



ORTHOGONALITÉ DE DEUX DROITES

Deux droites de l'espace sont dites **orthogonales** lorsque leurs projections sur un plan sont deux droites perpendiculaires. On parle d'**orthogonales dans l'espace**, et de perpendiculaires lorsque les droites sont en plus **coplanaires**.



On dit qu'une droite est **orthogonale à un plan** de l'espace si elle est orthogonale à toute droite du plan.

PROJETÉ ORTHOGONAL

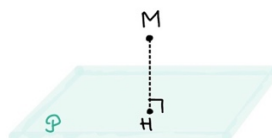
Sur une droite

Le projeté orthogonal sur une droite d est le point H tel que (MH) et d soient perpendiculaires.



Sur un plan

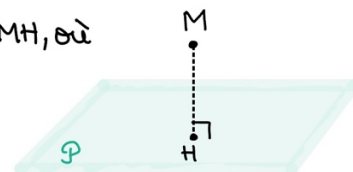
Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan P est le point H tel que (MH) et P soient orthogonaux, ou encore que $\overrightarrow{MH}$ soit **normal** à P .



DISTANCE

La distance d'un point M à un plan P est la distance MH , où H est le projeté orthogonal de M sur P .

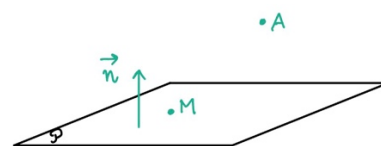
$$d(M, P) = MH$$



Propriété

Soient P le plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ et $A(x_A; y_A; z_A)$ un point. Si on note $\vec{n}$ un vecteur normal de P et $M(x; y; z)$ un point de P , alors :

$$d(A, P) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



Méthode

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point A de coordonnées $A(5; 3; -2)$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne : $4x + 2y - z + 8 = 0$. Déterminer la valeur approchée, arrondie au centième, de la distance du point A au plan $\mathcal{P}$.

1. Vérification que A n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$:

On remplace les coordonnées du point A dans l'équation du plan et on calcule $4 \times 5 + 2 \times 3 - 1 \times (-2) + 8 = 36 \neq 0$. Donc le point A n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$.

2. Vecteur normal au plan :

À partir de l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$, on en déduit que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal du plan $\mathcal{P}$.

3. Représentation paramétrique de la droite orthogonale au plan $\mathcal{P}$ passant par le point A :

On cherche une représentation paramétrique de la droite (d) , orthogonale au plan $\mathcal{P}$ et passant par le point $A(5; 3; -2)$.

Elle possède comme vecteur directeur le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. On obtient alors : $(d) : \begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 3 + 2t \\ z = -2 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

4. Coordonnées du point H intersection entre la droite (d) et le plan $\mathcal{P}$:

La droite (d) étant orthogonale au plan $\mathcal{P}$, on sait qu'ils admettent un unique point commun H . Le point $H(x_H, y_H, z_H)$ appartient au plan $\mathcal{P}$ et à la droite (d) si et seulement s'il existe des réels (x_H, y_H, z_H, t) tels que :

$$\begin{cases} x_H = 5 + 4t \\ y_H = 3 + 2t \\ z_H = -2 - t \\ 4x_H + 2y_H - z_H + 8 = 0 \end{cases}$$

En remplaçant x_H, y_H et z_H dans la quatrième équation, on obtient :

$$\begin{aligned} 4(5 + 4t) + 2(3 + 2t) - (-2 - t) + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow (16 + 4 + 1)t + 36 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= -\frac{12}{7} \end{aligned}$$

En remplaçant t par $-\frac{12}{7}$ dans la représentation paramétrique de la droite (d) , on obtient :

$$\begin{cases} x_H = 5 + 4 \times \left(-\frac{12}{7}\right) \\ y_H = 3 + 2 \times \left(-\frac{12}{7}\right) \\ z_H = -2 - 1 \times \left(-\frac{12}{7}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -\frac{13}{7} \\ y_H = -\frac{3}{7} \\ z_H = -\frac{2}{7} \end{cases}$$

5. Calculer la distance AH :

Pour calculer la distance entre les points A et H , on calcule la norme du vecteur $\overrightarrow{AH}$:

$$AH = \|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2 + (z_H - z_A)^2}.$$

$$\text{On a } \overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} -\frac{13}{7} - 5 \\ -\frac{3}{7} - 3 \\ -\frac{2}{7} + 2 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} -\frac{48}{7} \\ -\frac{24}{7} \\ \frac{12}{7} \end{pmatrix}. \text{ On en déduit que : } AH = \sqrt{\left(-\frac{48}{7}\right)^2 + \left(-\frac{24}{7}\right)^2 + \left(\frac{12}{7}\right)^2} \approx 7,86$$

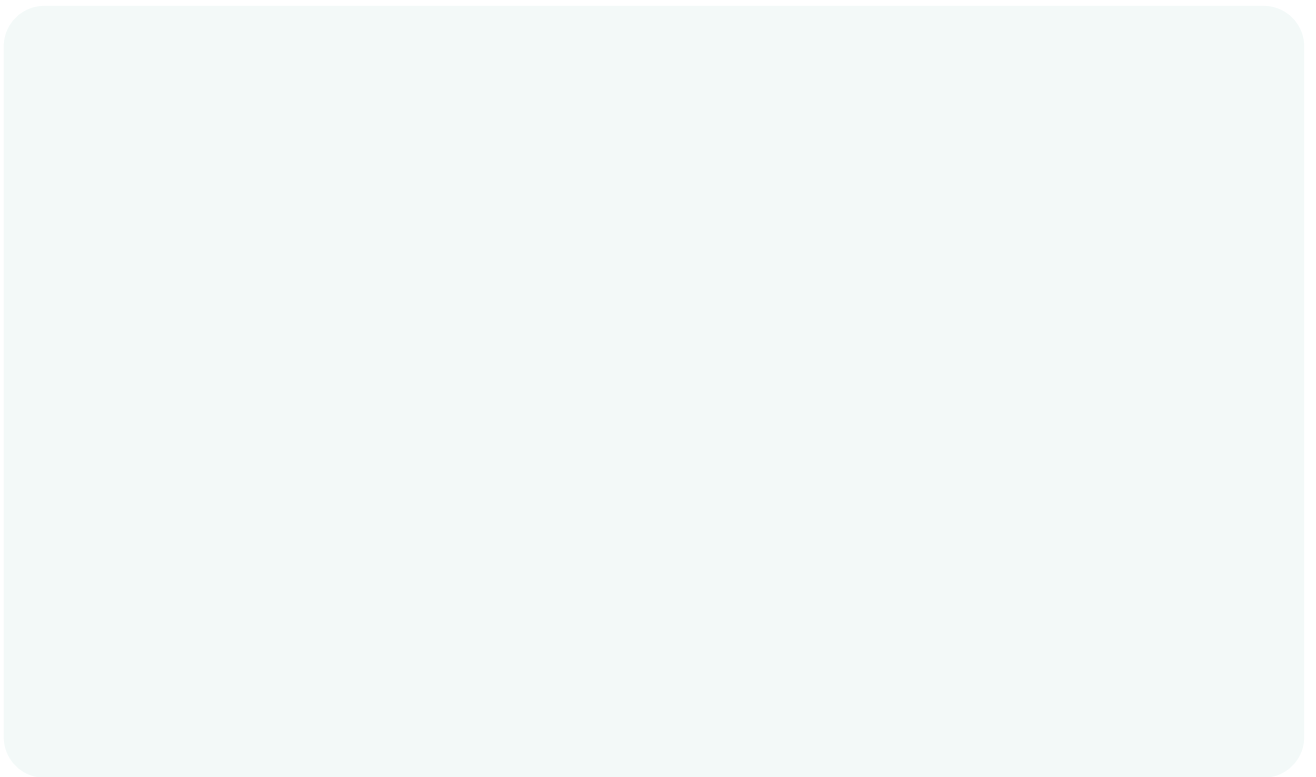
La valeur approchée au centième de la distance entre le point A et le plan $\mathcal{P}$ est donc $AH \approx 7,86$.

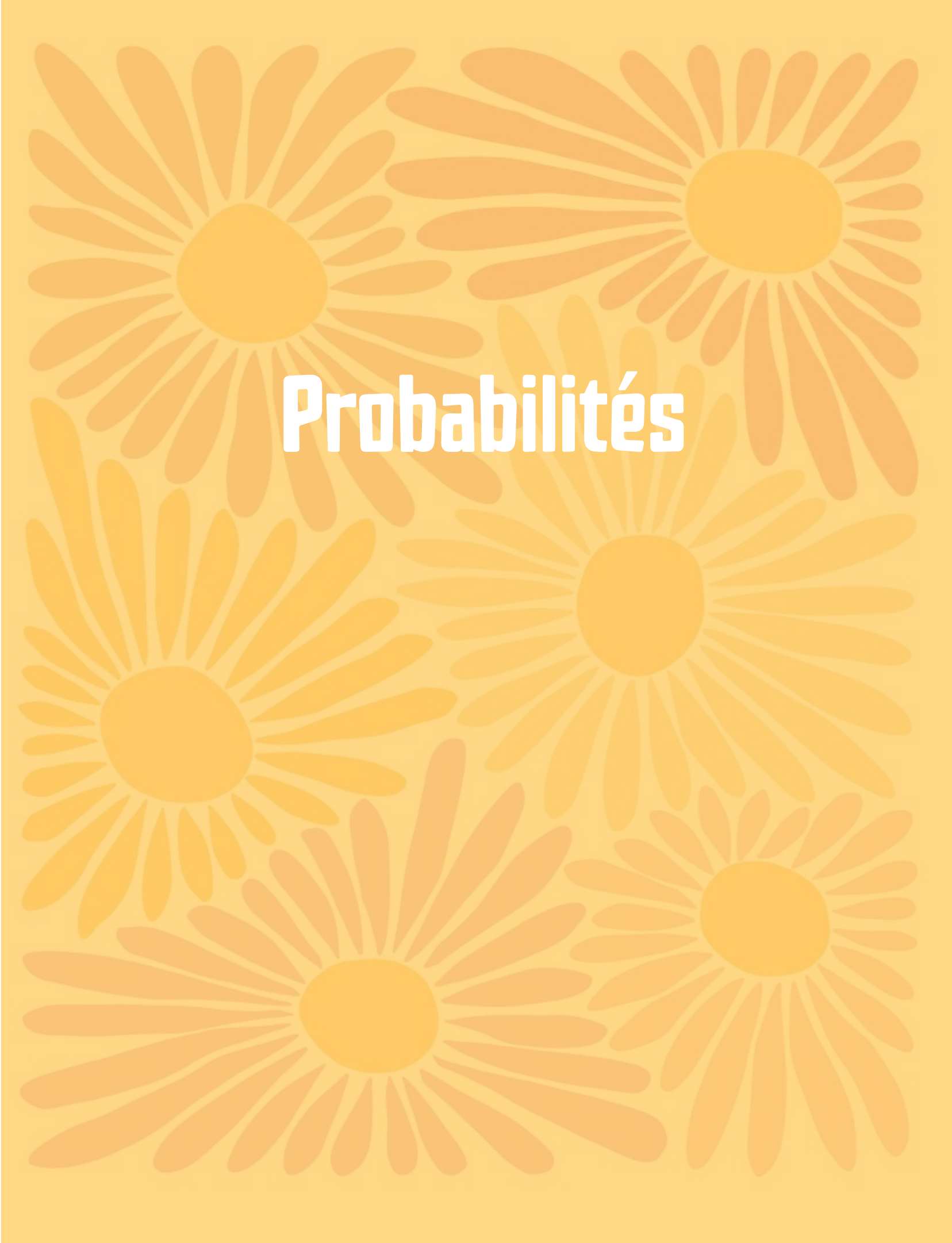
Notes personnelles

mes réussites

A large, empty rectangular box with rounded corners, intended for writing personal notes or achievements.

points à travailler

A large, empty rectangular box with rounded corners, intended for writing personal notes or areas for improvement.



Probabilités

Dénombrement



PRODUIT CARTÉSIEN

Soient X et Y deux ensembles. Le produit cartésien de X et Y est **l'ensemble des couples** $(x; y)$ avec $x \in X$ et $y \in Y$. On le note $X \times Y$.

Exemple : $X = \{2; 4; 6\}$ et $Y = \{a; b\}$. $X \times Y = \{(2; a); (2; b); (4; a); (4; b); (6; a); (6; b)\}$

Propriété (principe multiplicatif)

Si X compte n éléments et Y compte p éléments, le produit cartésien $X \times Y$ compte **$n \times p$ couples**.



GÉNÉRALISATION À k ENSEMBLES

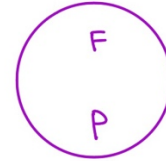
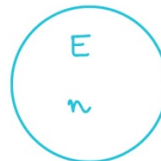
Le produit cartésien $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ est l'ensemble des **k -listes** ou **k -uplets** $(a_1; a_2; \dots; a_k)$ avec $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_k \in A_k$.

Si A_1 compte n_1 éléments, A_2 compte n_2 éléments, ..., A_k compte n_k éléments, le nombre de k -listes (ou k -uplets) du produit cartésien $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ est égal à **$n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$** .



DÉNOMBREMENT

Si E et F sont deux ensembles disjoints ($E \cap F = \emptyset$) comptant respectivement n et p éléments, leur réunion **$E \cup F$** est un ensemble à **$n+p$ éléments**.



PARTIES DE E

Définition : Soit E un ensemble fini à n éléments ($n \geq 1$). Une partie de E est un sous-ensemble non ordonné de E .

Propriété : Le nombre de partie de E est égal à **2^n** .

Exemple

$E = \{a; b; c\}$ compte **2^3** soit 8 parties.

- 1 partie à 0 élément : $\emptyset$
- 3 parties à 1 élément : $\{a\}; \{b\}; \{c\}$ appelés **singletons**.
- 3 parties à 2 éléments : $\{a; b\}; \{a; c\}; \{b; c\}$ qui ne sont pas ordonnés.
- 1 partie à 3 éléments : $\{a; b; c\}$

QCM

a) $X = \{1; 2; 3\}$ et $Y = \{a; b\}$. Combien d'éléments compte $X \times Y$?

- ☐ 5 ☐ 6 ☐ 8 ☐ 9

b) Un menu propose 4 entrées, 3 plats et 2 desserts.

Combien de menus différents (une entrée, un plat, un dessert) peut on former ?

- ☐ 9 ☐ 12 ☐ 18 ☐ 24

c) A_1 compte 5 éléments, A_2 compte 2 éléments, A_3 compte 6 éléments.

Combien de triplets contient $A_1 \times A_2 \times A_3$?

- ☐ 13 ☐ 30 ☐ 60 ☐ 36

d) E et F sont deux ensembles disjoints. E compte 8 éléments, F compte 5 éléments. Combien d'éléments compte $E \cup F$?

- ☐ 3 ☐ 13 ☐ 40 ☐ cela dépend

e) Pourquoi la formule $|E \cup F| = |E| + |F|$ n'est vraie que si E et F sont disjoints ?

- ☐ Cette formule n'est jamais vraie
☐ Sinon les éléments communs seraient comptés deux fois
☐ L'union n'existe que pour des ensembles disjoints
☐ E et F doivent avoir le même nombre d'éléments

f) E est un ensemble à 4 éléments. Combien de parties possède E ?

- ☐ 4 ☐ 8 ☐ 16 ☐ 24

g) $E = \{a; b; c; d\}$. Combien de singletons (parties à 1 élément) E possède t il ?

- ☐ 1 ☐ 4 ☐ 6 ☐ 16

h) Une partie d'un ensemble E est

- ☐ un couple ordonné d'éléments de E
☐ un sous ensemble non ordonné de E
☐ un élément de E répété plusieurs fois
☐ toujours l'ensemble E lui même

Arrangement et permutation



FACTORIELLE

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle **factorielle** n , et on note $n!$ le nombre :

Exemple $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$; $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 3! \times 4 \times 5 = 120$



SCANNE MOI



ARRANGEMENT

Soit E un ensemble fini non vide à n éléments, et k un entier naturel $k \leq n$.
Un **arrangement** de k éléments de E est un k -uplet d'éléments distincts de E .

Remarque : Un arrangement de E peut être interprété comme un tirage avec ordre et sans remise.

Exemple : $E = \{1; 2; 3; 4\}$ alors $(1; 3; 4)$ et $(1; 4; 3)$ sont deux arrangements de 3 éléments de E .

Propriété

Le nombre des k -uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments est égal à $\frac{n!}{(n-k)!} = n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)$

Exemple : $E = \{a; b; c\}$ compte 6 listes ordonnées de 2 éléments : $(a; b)$, $(b; a)$, $(a; c)$, $(c; a)$, $(b; c)$, $(c; b)$.
 $n = 3$ et $k = 2$. Il y a bien $\frac{3!}{1!} = 6$ 2-uplets d'éléments distincts.



PERMUTATION

Soit E un ensemble fini non vide à n éléments.

Une **permutation** de E est un n -uplet d'éléments distincts de E .

Une **permutation** est donc un n -arrangement.

Exemple :

$E = \{a; b; c\}$, les permutations de E sont : $(1; 2; 3)$, $(1; 3; 2)$, $(2; 1; 3)$, $(2; 3; 1)$, $(3; 1; 2)$, $(3; 2; 1)$.

Propriété

Le nombre de permutations d'un ensemble fini à n éléments est égal à : $n!$

Exemple : $E = \{a; b; c; d; e\}$



Exercices

1. Rangement d'objets

Edmond classe ses 10 cahiers et souhaite les ranger sur la même étagère. Quel est le nombre de rangements possibles ?

2. Code secret

Un code secret est composé de 3 chiffres (qui peuvent être identiques) suivis de 5 lettres distinctes à choisir parmi A, B, C, D, E, F, G, H . Combien de codes secrets différents peut-on former ?

3. Arrangement et permutation

Un club de 12 membres doit élire un bureau composé d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier. Ces trois postes sont distincts et une même personne ne peut occuper qu'un seul poste.

a. Combien de bureaux différents peut-on former ?

Après l'élection, les 12 membres se rangent en ligne pour une photo de groupe.

b. Combien de dispositions différentes sont possibles pour cette photo ?

Combinaisons



DÉFINITION

Soit E un ensemble fini à n éléments ($n \geq 1$). Une partie non-ordonnée à k éléments distincts de E est une **combinaison** de E .

Propriété

Si k est un entier compris entre 0 et n , le nombre de combinaisons à k éléments de E est égal à :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times \dots \times 2 \times 1}$$

se lit « k parmi n »

Exemple

$E = \{a; b; c\}$ compte $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \times 1!} = 3$ combinaisons à 2 éléments : $\{a; b\}, \{a; c\}, \{b; c\}$



COEFFICIENT BINOMIAL

On appelle **coefficient binomial** le nombre $\binom{n}{k}$. On a, pour tout $0 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Propriété

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq k \leq n$, on a :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$



RELATION DE PASCAL

Relation de Pascal

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq k \leq n$, on a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Triangle de Pascal

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Exercices

1. Tirage dans un jeu de cartes

On tire ensemble 5 cartes d'un jeu de 32 cartes.

1. Combien de tirages peut on obtenir ?
2. Combien de tirages comportant 5 carreaux ?
3. Combien de tirages comportant 2 cœurs et 3 piques ?

2. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

$$A = \frac{3}{5! \times 3!} + \frac{4}{7!} =$$

$$B = \frac{n!}{(n-1)!} =$$

$$C = \frac{2}{n!} + \frac{2}{(n+2)!} + \frac{2}{(n+1)!} =$$

$$D = \frac{12!}{10! 2!} =$$

$$E = \frac{6 \times 8!}{6!} =$$

3. Tirage dans une urne

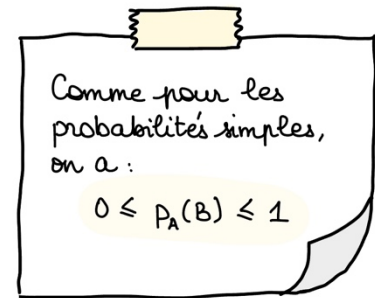
On extrait 2 boules d'une urne contenant huit boules blanches et sept boules noires.

1. Combien y a t il d'issues possibles ?
2. Combien y a t il de façons d'extraire 2 boules noires ?
3. Combien y a t il de façons d'extraire 2 boules blanches ?

Probabilités conditionnelles

DÉFINITION

On appelle **probabilité conditionnelle de B sachant A**, la probabilité que l'événement B se réalise *sachant que* l'événement A est réalisé. On la note : $P_A(B)$.



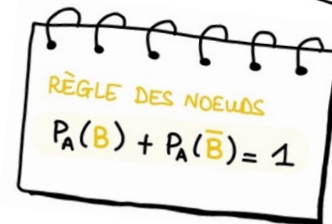
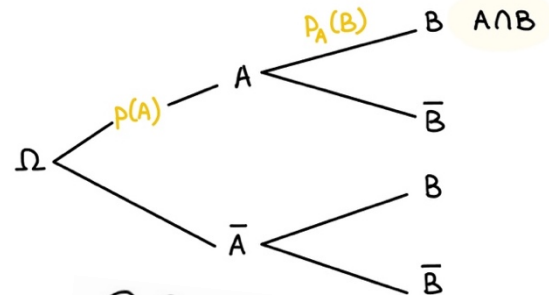
Propriété

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{ou encore} \quad P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

DANS UN ARBRE PONDÉRÉ

Ainsi, en pondérant la branche reliant A à B par la probabilité de B sachant A, on trouve la probabilité de $A \cap B$ en **multipliant les probabilités le long des branches**.

Règle des noeuds : La somme des probabilités rencontrées sur les branches partant d'un même événement est égale à 1.



CALCULER UNE PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Soit A l'événement : « Le résultat est un pique » et B l'événement : « Le résultat est un roi ». Calculer $P_A(B)$, la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique.

Réponse :

$$P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{32} \quad (\text{tirer un roi de pique}).$$

Donc la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique est :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{32} : \frac{1}{4} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \quad \checkmark$$

Exercices

1. Choisir la bonne réponse.

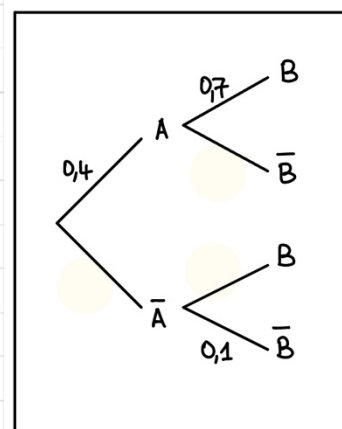
On interroge 40 élèves sur la langue vivante qu'ils étudient. On obtient le tableau suivant. On choisit un élève au hasard parmi ces 40 élèves.

	Anglais (E)	Allemand (D)	Total
Garçons (G)	10	14	24
Filles (F)	6	10	16
Total	16	24	40

- a. $p(E \cap G) =$ ☐ $\frac{10}{16}$ ☐ $\frac{10}{24}$ ☐ $\frac{10}{40}$ ☐ $\frac{16}{40}$
- b. $p(D \cap F) =$ ☐ $\frac{6}{16}$ ☐ $\frac{10}{16}$ ☐ $\frac{10}{24}$ ☐ $\frac{10}{40}$
- c. $p_E(F)$ ☐ $\frac{6}{40}$ ☐ $\frac{16}{40}$ ☐ $\frac{6}{16}$ ☐ $\frac{24}{40}$
- d. $p_F(D)$ ☐ $\frac{10}{16}$ ☐ $\frac{24}{40}$ ☐ $\frac{10}{40}$ ☐ $\frac{16}{40}$

2. On considère l'arbre pondéré. Répondre aux questions.

- a. Donner les probabilités qu'on peut y lire.
- b. Compléter l'arbre.
- c. Calculer les probabilités $p(A \cap B)$ et $p(\bar{A} \cap \bar{B})$.



3. Calculer les probabilités suivantes.

Noah boit un smoothie **trois fois sur cinq**, sinon il boit un soda. Quand il boit un smoothie, il utilise une paille **50 %** du temps. Quand il boit un soda, il utilise une paille **20 %** du temps.

On note : **S** : « Il boit un smoothie » et **P** : « Il utilise une paille ».

1. Donner les probabilités correspondant à l'énoncé.

$$P(S) = \quad P(\bar{S}) = \quad P_S(P) = \quad P_S(\bar{P}) =$$

2. $P(S \cap P) =$

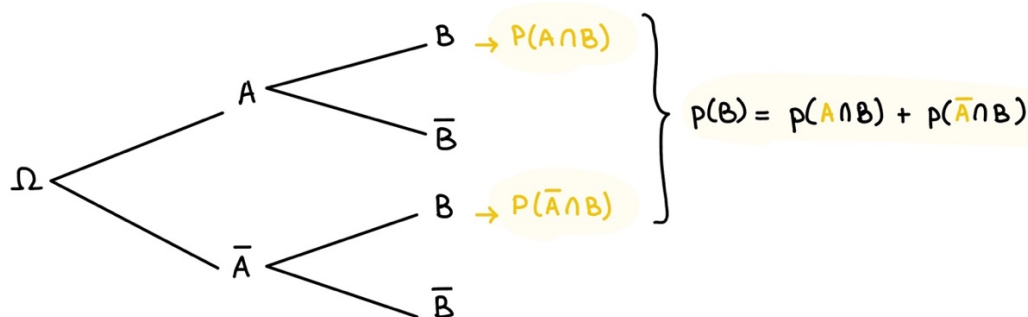
3. $P_{\bar{S}}(P) =$

Probabilités totales

La **probabilité de B** s'obtient en **ajoutant** les probabilités des branches qui aboutissent à B.

Autrement dit :

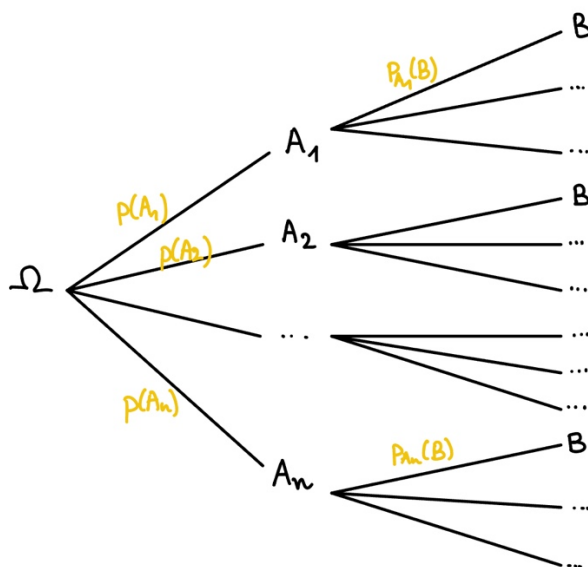
$$\begin{aligned} p(B) &= p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) \\ &= p(A) \times p_A(B) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B) \end{aligned}$$



FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ une partition de l'univers et B un événement, alors la **probabilité de B** est donnée par :

$$\begin{aligned} p(B) &= p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \dots + p(B \cap A_n) \\ &= p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + \dots + p(A_n) \times p_{A_n}(B) \end{aligned}$$



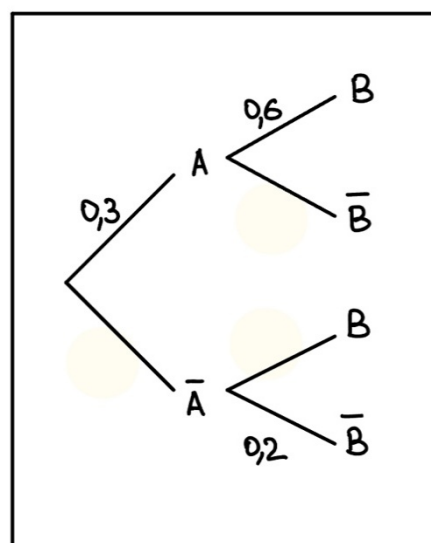
Exercices

1. Vrai ou faux ?

- | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| a. $p(A \cap B) = p(A) + p(B)$ | ☐ Vrai | ☐ Faux |
| b. $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ | ☐ Vrai | ☐ Faux |
| c. $p(B) = p_A(B) + p_{\bar{A}}(B)$ | ☐ Vrai | ☐ Faux |
| d. $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ | ☐ Vrai | ☐ Faux |

2. Compléter l'arbre pondéré.

- a. Compléter l'arbre pondéré.



- b. Calculer la probabilité $P(B)$.

- c. En déduire la probabilité de A sachant B.

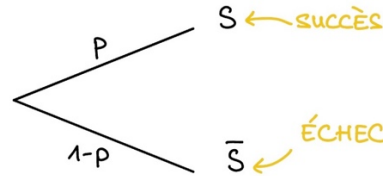
Loi de Bernoulli



ÉPREUVE DE BERNOULLI

On appelle **épreuve de Bernoulli** une expérience qui ne possède que 2 issues :

- succès, de probabilité p
- échec, de probabilité $1-p$



Exemple

On tire une carte dans un jeu de 52 cartes. Pour chacune des expériences suivantes, indiquer s'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli :

1. On regarde la couleur de la carte (pique, cœur, carreau, trèfle) NON
2. On vérifie que la carte est un pique. OUI
3. On regarde si la carte n'est pas un pique. OUI
4. On regarde la valeur de la carte (as, 2, 3, etc.) NON

LOI DE BERNOULLI

On appelle **loi de Bernoulli de paramètre p** , une loi de probabilité suivant le schéma :

- succès de probabilité p
 - échec de probabilité $1-p$
- avec $0 < p < 1$

On peut représenter cette loi par le tableau :

x_i	0	1
$P(X=x_i)$	$1-p$	p

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p .

L'espérance de X est : La variance de X est : L'écart-type est :

$$E(X) = p$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^k p_i x_i$$

$$V(X) = p(1-p)$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^k p_i (x_i - E(X))^2$$

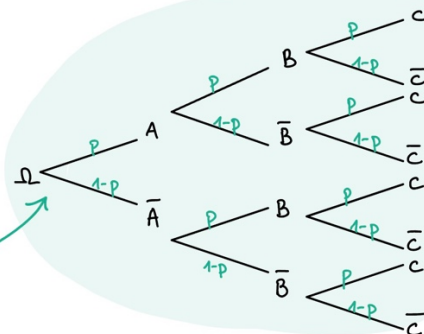
$$\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

SCHÉMA DE BERNOULLI

La répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de même paramètre p constitue un **schéma de Bernoulli**.

arbre de probabilité



QCM

- 1.** Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui possède :
a. exactement 3 issues b. exactement 2 issues
c. un nombre quelconque d'issues d. une seule issue
- 2.** Dans une épreuve de Bernoulli de paramètre p , quelle est la probabilité de l'échec ?
a. p b. $1 - p$ c. p^2 d. $1 + p$
- 3.** On tire une carte dans un jeu de 52 cartes. On considère l'expérience « la carte est un cœur ». S'agit-il d'une épreuve de Bernoulli ?
a. On ne peut pas savoir b. Non c. Cela dépend de la carte tirée d. Oui
- 4.** Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p , que vaut $P(X = 1)$?
a. p b. $1 - p$ c. 0 d. 1
- 5.** L'espérance d'une loi de Bernoulli de paramètre p est égale à :
a. p b. $1 - p$ c. $p(1 - p)$ d. $\sqrt{p(1 - p)}$
- 6.** La variance d'une loi de Bernoulli de paramètre p est égale à :
a. $1 - p$ b. p c. $p(1 - p)$ d. p^2
- 7.** L'écart type d'une loi de Bernoulli de paramètre p est égal à :
a. $p(1 - p)$ b. $\sqrt{p(1 - p)}$ c. p d. $\sqrt{p}$
- 8.** Dans une loi de Bernoulli de paramètre p , quelle condition doit vérifier p ?
a. $0 < p < 1$ b. $p > 1$ c. $p < 0$ d. $p = 1$
- 9.** Un schéma de Bernoulli est constitué de :
a. la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de même paramètre p
b. la répétition de n épreuves de Bernoulli différentes
c. une seule épreuve de Bernoulli répétée deux fois
d. n épreuves de Bernoulli dépendantes les unes des autres
- 10.** Dans l'arbre de probabilité d'un schéma de Bernoulli à n répétitions, à chaque nœud, combien de branches partent ?
a. 1 b. 2 c. 3 d. n

Loi binomiale



DÉFINITION

Si X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès de ce schéma de Bernoulli, on dit que X suit une **loi binomiale**, de paramètre n et p

$$B(n; p)$$

Propriété : On se place dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p .

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès de ce schéma de Bernoulli $B(n; p)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq k \leq n$, la loi de probabilité de X vaut :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemple

Une urne contient 3 boules noires, 2 boules vertes, et 3 boules blanches. On extrait au hasard successivement et avec remise 5 boules de cette urne et on note la couleur. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 boules noires ?

Corrigé :

Succès : tirer une boule noire. $p = \frac{3}{8}$

On répète 5 fois la même épreuve de Bernoulli de façon indépendante.

Ceci constitue un schéma de Bernoulli. $n = 5$

Soit X le nombre de boules noires obtenues. X suit la loi $B\left(5; \frac{3}{8}\right)$

On calcule

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \left(\frac{3}{8}\right)^3 \left(1 - \frac{3}{8}\right)^{5-3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} \times \left(\frac{3}{8}\right)^3 \times \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{40500}{196608} = \frac{3375}{16384} \approx 0,206$$

soit environ **0,206** à 10^{-3} près

ESPÉRANCE ET VARIANCE

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $B(n; p)$.

Son espérance vaut

$$E(X) = np$$

Sa variance vaut

$$V(X) = np(1-p)$$

et donc son écart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

Exercices

1. Choisir la bonne réponse.

On considère la variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(3; p)$. On sait que $P(X = 0) = \frac{1}{125}$.

On peut affirmer que :

- A. $p = \frac{4}{5}$ B. $p = \frac{1}{5}$ C. $P(X = 1) = \frac{124}{125}$ D. $P(X = 1) = \frac{4}{5}$

2. Choisir la bonne réponse

On effectue n lancers d'une pièce de monnaie équilibrée. Le résultat d'un lancer est « pile » ou « face ». On considère la liste ordonnée des n résultats. Quelle est la probabilité d'obtenir au plus deux fois « pile » dans cette liste ?

- A. $1 + n + \frac{n(n-1)}{2}$ B. $\frac{n(n-1)}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ C. $\frac{n(n-1)}{2}$ D. $\left(1 + n + \frac{n(n-1)}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

3. Choisir la bonne réponse

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 8 % des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses. On choisit au hasard 65 pièces produites par la chaîne de fabrication. Le nombre de pièces produites est suffisamment grand pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses tirées.

La probabilité $p(6 < X \leq 13)$ est égale à :

- A. $p(X \leq 13) - p(X \leq 6)$ B. $p(X < 13) - p(X \geq 6)$
 C. $p(X \leq 13) - p(X > 6)$ D. $p(X < 13) - p(X > 6)$

Somme de variables aléatoires



VARIABLE ALÉATOIRE

Une **variable aléatoire réelle** X est une fonction qui à chaque issue E_i de l'univers Ω associe un réel x_i .



LOI DE PROBABILITÉ

Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$. La **loi de probabilité** de X est donnée par toutes les probabilités $P(X = x_i)$.

les « x_i » sont toutes les valeurs prises par X



SOMME DE VARIABLES ALÉATOIRES

Soient X et Y deux variables aléatoires.

$X + Y$ est aussi une variable aléatoire, dont la loi de probabilité vaut :

$$P(X + Y = k) = \sum_{i+j=k} P((X=i) \cap (Y=j))$$

Cas d'indépendance

Dans le cas où les variables aléatoires X et Y sont **indépendantes**, la loi de probabilité vaut :

$$P(X + Y = k) = \sum_{i+j=k} P(X=i) \times P(Y=j)$$



ESPÉRANCE ET VARIANCE

Espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires.
On a la linéarité de l'espérance :

$$\begin{cases} E(X+Y) = E(X) + E(Y) \\ E(aX+b) = aE(X) + b \end{cases} \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

Variance

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On a pour la variance :

$$\begin{cases} V(X+Y) = V(X) + V(Y) \\ V(aX+b) = a^2 V(X) \end{cases}$$

Exercices

1. Interrogation QCM.

Une interrogation écrite sous forme de QCM comporte 5 questions.

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte : on obtient 1 point si on trouve la bonne réponse, et 0 sinon. Un élève décide d'y répondre au hasard.

1. On note X_1 le nombre de points que l'élève reçoit à la question 1. Quelle est la loi de X_1 ?

2. On note de même X_2, X_3, X_4, X_5 le nombre de points obtenus aux questions 2 à 5. On admet que X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont 2 à 2 indépendantes.

a. Quelle loi suit la note obtenue par l'élève ?

b. Le professeur multiplie cette note par 4 pour la ramener sur 20 au moment de calculer les moyennes. Quelle note sur 20 cet élève peut-il espérer ?

2. Variable aléatoire.

Six boîtes numérotées de 1 à 6 contiennent chacune 10 pièces.

L'une ne contient que des pièces de 1 centime, une autre de 2 centimes, une de 5 centimes, une de 10 centimes, une de 20 centimes, et la dernière de 1 euro. Les urnes ont été remplies au hasard.

Un joueur donne 1 euro et lance un dé bien équilibré. Si le chiffre obtenu est k , le joueur pioche k pièces de l'urne numéro k .

Ce jeu est-il favorable au joueur ?

Loi des grands nombres

INÉGALITÉ DE BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV

Théorème

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$.

Alors, pour tout réel a strictement positif, $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$

Remarque

- la variable aléatoire $|X - E(X)|$ est positive ou nulle
- L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est loin d'être optimale. En réalité, il est fort possible que la probabilité soit bien inférieure au majorant obtenu.



Exemple

Le taux moyen de glycémie dans une population est de 1 g/L avec une variance de 0,1. Une personne présente un taux X critique si son taux ne se situe pas dans l'intervalle $]0,5; 1,5[$.

- Cet événement se traduit par l'inégalité $|X - E(X)| \geq 0,5$
- Sa probabilité vérifie : $P(|X - E(X)| \geq 0,5) \leq \frac{0,1}{0,5^2}$

INÉGALITÉ DE MARLOV

Une variable aléatoire est dite **positive ou nulle** dans un univers Ω , lorsque toutes les valeurs prises par celle-ci sont des réels positifs ou nuls.

Autrement dit, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geq 0$

INÉGALITÉ DE CONCENTRATION

Propriété

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X suivant une loi de probabilité d'espérance μ et de variance V .

Soit $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ la variable aléatoire moyenne de cet échantillon.

Pour tout nombre réel $\delta > 0$, on a : $P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}$



LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES

Propriété

Soit (X_n) un échantillon d'une variable aléatoire. On pose

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k = \frac{1}{n} (X_1 + X_2 + \dots + X_n)$$

Alors, pour tout réel a strictement positif, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq a) = 0$

Exercices

1. Forage pétrolier.

Dans une région pétrolifère, la probabilité qu'un forage conduise à une nappe de pétrole est 0,1.

1) Justifier que la réalisation d'un forage peut être assimilée à une épreuve de Bernoulli.

2) On effectue 9 forages.

a. Quelle hypothèse doit on formuler pour que la variable aléatoire X correspondant au nombre de forages qui ont conduit à une nappe de pétrole suive une loi binomiale ?

b. Sous cette hypothèse, calculer la probabilité qu'au moins un forage conduise à une nappe de pétrole. En donner la valeur à 10^{-3} près.

2. Contrôle de qualité.

Un constructeur de composants produit des résistances. La probabilité qu'une résistance soit défectueuse est égale à 5×10^{-3} . Dans un lot de 1000 résistances, quelle est la probabilité d'avoir

a. Exactement deux résistances défectueuses ?

b. Au plus deux résistances défectueuses ?

c. Au moins deux résistances défectueuses ?

3. Cours de maths

Une classe compte 30 élèves dont 20 filles. À chaque cours de mathématiques, le professeur interroge au hasard un élève de la classe, sans se rappeler quels élèves il a déjà interrogés.

On considère un entier positif ou nul n et on note X la variable aléatoire qui correspond au nombre de filles interrogées au cours de n jours consécutifs.

1) Quelle est la loi de X ?

2) Quelle est la probabilité que sur 10 jours consécutifs, soient interrogées 4 filles exactement ? au moins 4 filles ?

3) Quel doit être le nombre minimal de cours consécutifs pour que la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée soit inférieure à 0,001 ?

Notes personnelles

mes réussites

points à travailler

Corrigé

Rappels de calculs

Exercice 1

a) $\frac{(2^3 \times 2^{-5})^2}{2^{-4}} = \frac{(2^{-2})^2}{2^{-4}} = \frac{2^{-4}}{2^{-4}} = 2^0 = 1$
b) $(3^{-2} \times 3^5)^{-1} = (3^3)^{-1} = 3^{-3} = \frac{1}{27}$
c) $(a^3 b^{-2})^{-2} \times a^{-1} b^4 = a^{-6} b^4 \times a^{-1} b^4 = a^{-7} b^8 = \frac{b^8}{a^7}$
d) $\frac{(2^2)^3 \times (2^{-1})^4}{2^3} = \frac{2^6 \times 2^{-4}}{2^3} = 2^{6-4-3} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$
e) $\frac{(x^{-3} y^2)^2}{(x^2 y^{-1})^{-1}} = \frac{x^{-6} y^4}{x^{-2} y^1} = x^{-4} y^3 = \frac{y^3}{x^4}$
f) $(5^2 \times 5^{-4})^{-3} = (5^{-2})^{-3} = 5^6$

Exercice 2

a) $\sqrt{200} = \sqrt{100 \times 2} = 10\sqrt{2}$
b) $\sqrt{3} \times \sqrt{48} = \sqrt{144} = 12$
c) $\sqrt{75} + \sqrt{27} - \sqrt{12} = 5\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$
d) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 5 - 3 = 2$
e) $(\sqrt{2} + 1)^2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 2\sqrt{2}$
f) $\frac{1}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} = \frac{\sqrt{5}-2}{5-4} = \sqrt{5}-2$

Exercice 3

a) $\frac{(x+2)^2 - (x-2)^2}{x^2 - 4x} = \frac{(x^2 + 4x + 4) - (x^2 - 4x + 4)}{x(x-4)} = \frac{8x}{x(x-4)} = \frac{8}{x-4}$
b) $\frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} = \frac{(x-4)(x+4)}{x(x-4)} = \frac{x+4}{x}$
($x \neq 0, x \neq 4$)
c) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1) + (x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x}{x^2-1}$ ($x \neq \pm 1$)
d) $\frac{(2x-3)^2 - (2x+3)^2}{(4x^2 - 12x + 9) - (4x^2 + 12x + 9)} = \frac{-24x}{-24x} = 1$
e) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x-2} = \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = x-3$ ($x \neq 2$)
f) $\frac{x}{x+1} - \frac{2}{x-1} = \frac{x(x-1) - 2(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2 - 3x - 2}{x^2 - 1}$ ($x \neq \pm 1$)

Équations et inéquations

Exercice 1

a) $(2x-3)(x+5) = 0$
 $2x-3 = 0$ ou $x+5 = 0$
 $x = \frac{3}{2}$ ou $x = -5$
 $S = \{-5; \frac{3}{2}\}$
b) $(3x+1)(x-4)(2x-6) = 0$
 $3x+1 = 0$ ou $x-4 = 0$ ou $2x-6 = 0$
 $x = -\frac{1}{3}$ ou $x = 4$ ou $x = 3$
 $S = \{-\frac{1}{3}; 3; 4\}$
c) $(x^2 - 9)(x+2) = 0$
 $x^2 - 9 = 0$ ou $x+2 = 0$
 $x = 3$ ou $x = -3$ ou $x = -2$
 $S = \{-3; -2; 3\}$

d) $(x-1)^2(2x+3) = 0$
 $(x-1)^2 = 0$ ou $2x+3 = 0$
 $x = 1$ ou $x = -\frac{3}{2}$
 $S = \{-\frac{3}{2}; 1\}$

Exercice 2

a) Racines : $x = -3$ et $x = 2$.
Le produit est négatif entre les racines, positif à l'extérieur.
 $S =]-\infty; -3] \cup [2; +\infty[$

b) Racines : $x = \frac{1}{2}$ et $x = 3$.
Le coefficient dominant est négatif :
le produit est positif entre les racines et négatif à l'extérieur.
 $S =]-\infty; \frac{1}{2}] \cup [3; +\infty[$
c) Racines : $-1, 2$ et 4 .
Signes successifs de gauche à droite :
négatif, positif, négatif, positif.
 $S =]-1; 2] \cup [4; +\infty[$

Exercice 3

a) Domaine : $x \neq -1$.
 $2x-4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, valable car différent de -1 .
 $S = \{2\}$
b) Domaine : $x \neq 3$.
 $x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$, mais cette valeur est exclue du domaine.
 $S = \emptyset$
c) Domaine : $x \neq 5$.
 $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$, toutes deux valables.
 $S = \{-1; 1\}$

Équation du second degré

Exercice 1

1) Par simplicité, on peut diviser les deux membres par 2 : $x^2 - 6x + 8 = 0$
 $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 4$
 $\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions :
 $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
 $x_1 = \frac{6-\sqrt{4}}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{6+\sqrt{4}}{2} = 4$
L'ensemble des solutions de cette équation est : $S = \{2; 4\}$.

2) On calcule le discriminant :
 $\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-9) = -20$
 $\Delta < 0$ donc l'équation n'admet pas de solution.
 $S = \emptyset$

3) On peut diviser les deux membres par -3 : $x^2 + 10x + 25 = 0$
 $\Delta = 10^2 - 4 \times 1 \times 25 = 0$
 $\Delta = 0$ donc l'équation admet une unique solution :

$$x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2} = -5$$

L'ensemble des solutions de cette équation est : $S = \{-5\}$.

Exercice 2

On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-x^2 + 5x - 4 = 0$ (1).
On reconnaît une équation du second degré sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$.
La consigne nous amène à commencer par écrire le polynôme du second degré sous forme canonique, c'est à dire sous la forme : $a(x - \alpha)^2 + \beta$.

On commence par diviser les deux membres de l'égalité par le coefficient a qui vaut ici -1 .

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

On reconnaît le début d'une identité remarquable :

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = x^2 - 5x + \frac{25}{4}$$

On en déduit que :

$$x^2 - 5x = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} &= 0 \end{aligned}$$

On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2$ avec

$$a = \left(x - \frac{5}{2}\right) \text{ et } b = \frac{3}{2}.$$

L'équation est équivalente à :

$$\left(x - \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\right) = 0$$
$$(x-4)(x-1) = 0$$

On applique la propriété du produit nul :

Soit $x-4 = 0$, soit $x-1 = 0$

Soit $x = 4$, soit $x = 1$

$$S = \{1; 4\}$$

Exercice 3

1) Écrivons l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$:

$$(-2)x^2 + (m-1)x + (m+1) = 0$$

On a $a = -2$, $b = m-1$ et $c = m+1$

Le discriminant vaut

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c$$

$$= (m-1)^2 - 4 \times (-2) \times (m+1).$$

Ou encore, sous forme développée :

$$\Delta = m^2 + 6m + 9$$

Cherchons les valeurs de m qui annulent cette expression du second degré : le discriminant Δ' vaut 0.

(Remarquons que $\sqrt{\Delta'} = 0$)

Celui-ci étant nul, l'équation $\Delta = 0$ a une unique solution $m = \frac{-b}{2a} = -3$.

Le coefficient 1 devant m^2 étant positif, $\Delta > 0$ si $m \neq -3$.

Conclusion :

Si $m = -3$, l'équation admet une unique solution ; sinon, l'équation admet 2 solutions.

2) Écrivons l'équation sous la

forme $ax^2 + bx + c = 0$:

$$1x^2 + (-m-3)x + (-m-3) = 0$$

On a donc

$$a = 1, b = -m-3 \text{ et } c = -m-3$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c$$

$$= (-m-3)^2 - 4 \times 1 \times (-m-3).$$

Sous forme développée :

$$\Delta = m^2 + 10m + 21$$

Cherchons les valeurs de m qui annulent cette expression du second degré : le discriminant Δ' vaut 16.

Celui-ci étant strictement positif, l'équation $\Delta = 0$ a 2 solutions :

$$m_1 = -7 \text{ et } m_2 = -3$$

De plus le coefficient devant m^2 est positif, Δ est donc une parabole avec ses branches dirigées vers le haut.

Δ est donc positif à l'extérieur des racines et négatif à l'intérieur.

Conclusion :

-Si $m = -7$ ou $m = -3$, l'équation admet une unique solution ;

-si $m \in]-7; -3[$, l'équation n'a pas de solution réelle ;

-si $m \in]-\infty; -7[\cup]-3; +\infty[$, l'équation admet 2 solutions réelles.

Généralités sur les suites

Exercice 1

a. Dans l'expression de u_n , on remplace n par 1, on obtient :

$$u_1 = \frac{-2 \times 1 + 1}{4 \times 1 + 6} = -\frac{1}{10}$$

b. On calcule successivement les termes jusqu'à obtenir w_3 :

$$w_1 = 4 \times w_0 - 8 \times 0 = 4 \times 0 + 0 = 0$$

$$w_2 = 4 \times w_1 - 8 \times 1 = 4 \times 0 - 8 = -8$$

$$w_3 = 4 \times w_2 - 8 \times 2 = 4 \times (-8) - 16 = -48$$

Ainsi, $w_3 = -48$.

c. On calcule successivement les termes jusqu'à obtenir u_2 :

$$u_1 = u_0 - 8 = -9 - 8 = -17$$

$$u_2 = u_1 - 8 = -17 - 8 = -25$$

Ainsi, $u_2 = -25$.

Exercice 2

a. $u_n = n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2$$

$$= n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

Or $n \in \mathbb{N}$ donc $2n + 1 > 0$.

Par conséquent $u_{n+1} - u_n > 0$.

La suite (u_n) est donc croissante.

b. $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{n+1} - 1 - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n - (n+1)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

La suite (u_n) est donc décroissante.

c. $u_n = \frac{-2}{n+4}$ pour $n \in \mathbb{N}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$n < n+1 \Leftrightarrow n+4 < (n+1)+4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+4} > \frac{1}{(n+1)+4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{n+4} < \frac{-2}{(n+1)+4}$$

$$\Leftrightarrow u_n < u_{n+1}$$

La suite (u_n) est donc croissante.

d. $u_n = \frac{3^n}{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3^{n+1}}{2(n+1)} - \frac{3^n}{2n}$$

$$= 3^n \times \frac{3}{2(n+1)} - \frac{3^n}{2n}$$

$$= 3^n \left(\frac{3}{2(n+1)} - \frac{1}{2n} \right)$$

$$= 3^n \times \frac{3n - (n+1)}{2n(n+1)}$$

$$= 3^n \times \frac{2n-1}{2n(n+1)}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $3^n > 0$ et $2n-1 > 0$. Donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

La suite (u_n) est donc croissante.

Composée de deux fonctions

Exercice 1

a) Calculer $f(g(1))$ puis $g(f(1))$.

$$g(1) = 3 \times 1 - 5 = -2 \text{ donc}$$

$$f(g(1)) = f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$$

$$f(1) = 1^2 + 1 = 2 \text{ donc :}$$

$$g(f(1)) = g(2) = 3 \times 2 - 5 = 1$$

b) Déterminer l'expression de la fonction $h(x) = f(g(x))$

$$g(x) = 3x - 5$$

Donc

$$h(x) = f(3x - 5) = (3x - 5)^2 + 1$$

$$= 9x^2 - 30x + 25 + 1$$

$$= 9x^2 - 30x + 26$$

c) Déterminer l'expression de la fonction $m(x) = g(f(x))$

$$f(x) = x^2 + 1$$

Donc

$$m(x) = g(x^2 + 1) = 3(x^2 + 1) - 5$$

$$= 3x^2 + 3 - 5$$

$$= 3x^2 - 2$$

d) Vérifier les résultats obtenus à la première question.

$$h(1) = 9 \times 1^2 - 30 \times 1 + 26$$

$$= 9 - 30 + 26 = 5 = f(g(1))$$

$$m(1) = 3 \times 1^2 - 2 = 3 - 2 = 1$$

$$= g(f(1))$$

Exercice 2

On définit les fonctions :

$$h(x) = f(g(x)) \text{ et } m(x) = g(f(x)).$$

1) Comparer $h(1)$ et $m(1)$.

Par lecture graphique :

$$g(1) = 2 \text{ et } f(1) = 1$$

Donc :

$$f(g(1)) = f(2) \approx 1,38$$

$$g(f(1)) = g(1) = 2$$

2) Calculer $m'(1)$.

$$m'(1) = (g(f(1)))' = g'(1) = 0 \text{ en}$$

raison de la tangente horizontale à la courbe C_g .

Fonctions dérivées

Exercice 1

$$a. f_1(x) = (5x^2 + 1)^7$$

Forme u^n , avec $u = 5x^2 + 1$ et $u' = 10x$

$$f_1'(x) = 7 \cdot 10x \cdot (5x^2 + 1)^6$$

$$f_1'(x) = 70x(5x^2 + 1)^6$$

$$b. f_2(x) = \frac{1}{f_1(x)}$$

Forme $\frac{1}{u}$

$$f_2'(x) = -\frac{f_1'(x)}{f_1(x)^2}$$

$$\text{avec } f_1(x)^2 = (5x^2 + 1)^{14}$$

$$f_2'(x) = -\frac{70x(5x^2 + 1)^6}{(5x^2 + 1)^{14}} = -\frac{70x}{(5x^2 + 1)^8}$$

$$c. f_3(x) = \sqrt{x^4 + 1}$$

Forme $\sqrt{u}$, avec $u = x^4 + 1$ et $u' = 4x^3$

$$f_3'(x) = \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}} = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}}$$

$$d. f_4(x) = e^{-5x+1}$$

Forme e^u , avec $u = -5x + 1$ et $u' = -5$

$$f_4'(x) = -5e^{-5x+1}$$

$$e. f_5(x) = \sqrt{e^x + 2}$$

Forme $\sqrt{u}$, avec $u = e^x + 2$ et $u' = e^x$

$$f_5'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x+2}}$$

$$f. f_6(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

avec $u = x^2 + 1$ et $u' = 2x$

$$f_6'(x) = -\frac{u'}{2u^{3/2}}$$

$$f_6'(x) = -\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

Exercice 2

a. Pour tout $x \in [2, 5 + \infty[$,

$$f(x) = \sqrt{2x-5} = \sqrt{u(x)} = v(u(x))$$

avec $v: x \mapsto \sqrt{x}$ et $u: x \mapsto 2x - 5$.

Pour tout $x \geq 2,5 \Leftrightarrow 2x - 5 \geq 0$

$\Leftrightarrow u(x) \geq 0$, donc $v(u(x))$ existe pour tout $x \in [2,5; +\infty[$.

De plus, pour tout $x > 2,5$,

$u'(x) = 2$ et, pour tout $x > 0$,

$$v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$$

$$= 2 \times \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x-5}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x-5}} > 0$$

Donc f est strictement croissante sur $[2,5; +\infty[$.

b. Pour tout $x \in [0 + \infty[$,

$$g(x) = (2\sqrt{x} - 1)^5 = (u(x))^5 = v(u(x))$$

avec $u: x \mapsto 2\sqrt{x} - 1$ et $v: x \mapsto x^5$.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$u'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

et pour tout x réel, $v'(x) = 5x^4$.

Donc, pour tout $x > 0$:

$$g'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \times 5(u(x))^4 = \frac{5}{\sqrt{x}} \times (2\sqrt{x} - 1)^4 \geq 0$$

De plus, g' s'annule uniquement

lorsque $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$, c'est à dire uniquement

pour $x = \frac{1}{4}$ (valeur isolée).

Donc g est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Tangente en un point

Exercice 1

a. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $a = 0$ est

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0).$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

Donc $f'(0) = -3$. De plus $f(0) = 1$.

Une équation de la tangente est par conséquent $y = -3x + 1$.

b. La fonction f est dérivable sur $]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$.

Une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $a = 1$ est

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1).$$

Pour déterminer l'expression de f' on applique la formule

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ avec}$$

$$u(x) = x^2 \text{ et } v(x) = 3x - 9.$$

Donc $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 3$.

Ainsi :

$$f'(x) = \frac{2x(3x-9) - 3(x^2)}{(3x-9)^2} = \frac{6x^2 - 18x - 3x^2}{(3x-9)^2} = \frac{3x^2 - 18x}{(3x-9)^2}.$$

Ainsi $f'(1) = -\frac{5}{12}$. De plus $f(1) = -\frac{1}{6}$.

Une équation de la tangente est par conséquent

$$y = -\frac{5}{12}(x - 1) - \frac{1}{6} \text{ soit}$$

$$y = -\frac{5}{12}x + \frac{1}{4}.$$

c.

La fonction f est dérivable

sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.

Une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $a = 2$ est

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2).$$

Pour déterminer l'expression de f' on applique la formule

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ avec } u(x)$$

$$= x + 1 \text{ et } v(x) = x - 1.$$

Donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1$.

$$f'(x) = \frac{x - 1 - (x + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{-2}{(x - 1)^2}.$$

Donc $f'(2) = -2$. De plus $f(2) = 3$.

Une équation de la tangente est par conséquent

$$y = -2(x - 2) + 3 \text{ soit}$$

$$y = -2x + 7.$$

Exercice 2

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Le coefficient directeur de la tangente Δ est $f'(1)$

$$f'(x) = 2ax + 2.$$

Donc $f'(1) = 2a + 2$. On veut

$$f'(1) = -4 \Leftrightarrow 2a + 2 = -4 \Leftrightarrow a = -3.$$

Ainsi $f(x) = -3x^2 + 2x + b$.

Le point $A(1; -1)$ appartient à $\mathcal{C}_f$. Par conséquent :

$$f(1) = -1 \Leftrightarrow -3 + 2 + b = -1 \Leftrightarrow b = 0$$

$$\text{Donc } f(x) = -3x^2 + 2x.$$

Logarithme népérien

Exercice 1

$$a. \ln(5e) = \ln 5 + \ln e = \ln 5 + 1$$

$$b. \ln e^3 = 3 \ln e = 3$$

$$c. \ln(\sqrt[3]{e}) = \frac{1}{3} \ln e = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} d. \ln \frac{2}{5} + \ln \frac{5}{8} + \ln \frac{8}{11} + \ln \frac{11}{14} \\ = \ln 2 - \ln 5 + \ln 5 - \ln 8 + \ln 8 \\ - \ln 11 + \ln 11 \\ - \ln 14 \\ = \ln 2 - \ln 14 = \ln \frac{2}{14} \\ = \ln \frac{1}{7} = -\ln 7 \end{aligned}$$

Exercice 2

a. L'ensemble d'étude est tel que

$x > 0$ soit $]0; +\infty[$.

$$\ln x = -2 \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{-2} \Leftrightarrow x = e^{-2}$$

La solution de l'équation est e^{-2} .

b. L'ensemble d'étude est tel

que $x^2 > 0$ soit $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$;

$$\ln x^2 = 1 \Leftrightarrow \ln x^2 = \ln e$$

$$\Leftrightarrow x^2 = e \Leftrightarrow x = \sqrt{e} \text{ ou } x = -\sqrt{e}.$$

Les solutions de l'équation

sont $-\sqrt{e}$ et $\sqrt{e}$.

c. L'ensemble d'étude est tel que

$$\frac{x}{3} > 0 \text{ soit }]0; +\infty[.$$

$$\ln \frac{x}{3} = 2 \Leftrightarrow \ln \frac{x}{3} = \ln e^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{3} = e^2 \Leftrightarrow x = 3e^2.$$

La solution de l'équation est $3e^2$.

d. L'ensemble d'étude est tel que

$$x^3 > 0 \text{ soit }]0; +\infty[.$$

$$\ln x^3 = -3 \Leftrightarrow \ln x^3 = \ln e^{-3}$$

$$\Leftrightarrow x^3 = e^{-3} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{e^{-3}} \Leftrightarrow x = e^{-1}.$$

La solution de l'équation est e^{-1} .

e. L'ensemble d'étude est tel que

$$3x - 2 > 0 \text{ soit }]\frac{2}{3}; +\infty[.$$

$$\ln(3x - 2) = 0 \Leftrightarrow \ln(3x - 2) = \ln 1$$

$\Leftrightarrow 3x - 2 = 1 \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$.
La solution de l'équation est 1.

f. L'ensemble d'étude est tel que $x^2 - 1 > 0$ soit $] -\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.
 $\ln(x^2 - 1) = \ln 4 + \ln 2$
 $\Leftrightarrow \ln(x^2 - 1) = \ln(4 \times 2)$
 $\Leftrightarrow x^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 9$
 $\Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 3$.
Les solutions sont -3 et 3 .

Exercice 3

a. L'ensemble d'étude est tel que $2x > 0$ soit $]0; +\infty[$.
 $1 - 2 \ln 2x \geq 0 \Leftrightarrow -2 \ln 2x \geq -1$
 $\Leftrightarrow \ln 2x \leq \frac{1}{2}$
 $\Leftrightarrow \ln 2x \leq \ln e^{1/2}$
 $\Leftrightarrow 2x \leq e^{1/2}$
 $\Leftrightarrow x \leq \frac{e^{1/2}}{2}$

La solution de l'inéquation est $]0; \frac{e^{1/2}}{2}]$.

b. L'ensemble d'étude est tel que $x > 0$ soit $]0; +\infty[$.
 $3 - \ln x \leq 0 \Leftrightarrow -\ln x \leq -3$
 $\Leftrightarrow \ln x \geq 3 \Leftrightarrow \ln x \geq \ln e^3 \Leftrightarrow x \geq e^3$
La solution de l'inéquation est $[e^3; +\infty[$.

c. L'ensemble d'étude est tel que $2x > 0$ soit $]0; +\infty[$.
 $2 + 3 \ln 2x \leq 0 \Leftrightarrow 3 \ln 2x \leq -2$
 $\Leftrightarrow \ln 2x \leq -\frac{2}{3}$
 $\Leftrightarrow \ln 2x \leq \ln e^{-2/3}$
 $\Leftrightarrow 2x \leq e^{-2/3}$
 $\Leftrightarrow x \leq \frac{e^{-2/3}}{2}$
La solution de l'inéquation est $]0; \frac{e^{-2/3}}{2}]$.

Fonction logarithme népérien

Exercice 1

a. La fonction $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, donc x doit vérifier $-3x - 1 > 0$
 $-3x - 1 > 0 \Leftrightarrow -3x > 1$
 $\Leftrightarrow x < -\frac{1}{3}$
Donc $\mathcal{D}_{f_0} =]-\infty; -\frac{1}{3}[$.

b. La fonction $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, donc x doit vérifier $-4x + 5 > 0$
 $-4x + 5 > 0 \Leftrightarrow -4x > -5 \Leftrightarrow x < \frac{5}{4}$
Donc $\mathcal{D}_{f_1} =]-\infty; \frac{5}{4}[$.

Exercice 2

a. $u(x) = 5x + 3$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{5}{5x + 3}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b.} \quad u(x) &= x^2 + 4 \\ u'(x) &= 2x \\ f'(x) &= \frac{2x}{x^2 + 4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c.} \quad u(x) &= 3x^2 - 2x + 6 \\ u'(x) &= 6x - 2 \\ f'(x) &= \frac{6x - 2}{3x^2 - 2x + 6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d.} \quad u(x) &= x^3 + 1 \\ u'(x) &= 3x^2 \\ f'(x) &= \frac{3x^2}{x^3 + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e.} \quad u(x) &= e^x + 1 \\ u'(x) &= e^x \\ f'(x) &= \frac{e^x}{e^x + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f.} \quad u(x) &= \frac{1}{x} \\ u'(x) &= -\frac{1}{x^2} \\ f'(x) &= \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} \\ &= -\frac{1}{x^2} \times x = -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

Équations trigonométriques

Exercice 1

1) $\cos(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
Sur le cercle trigonométrique,
 $\cos(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pour les angles : $t = \pm \frac{\pi}{6}$
On vérifie qu'ils sont bien dans $] -\pi, \pi[$.

Solutions :

$$t = \frac{\pi}{6} \text{ ou } t = -\frac{\pi}{6}$$

2) $\sin(t) = -\frac{1}{2}$
L'angle de référence est $\frac{\pi}{6}$.
Dans $] -\pi; \pi[$, les deux angles ayant un sinus égal à $-\frac{1}{2}$ sont :

$$t = -\frac{5\pi}{6} \text{ et } t = -\frac{\pi}{6}$$

3) $\cos(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
On cherche les angles du cercle trigonométrique où le cosinus vaut $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Sur le cercle :

$$\begin{aligned} \cos(t) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow t &= \frac{3\pi}{4} \text{ ou } t = -\frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

Les deux sont dans l'intervalle demandé.

Solutions : $t = \frac{3\pi}{4}$ ou $t = -\frac{3\pi}{4}$

4) $\sin(t) = \sin\left(\frac{17\pi}{5}\right)$
On doit d'abord réduire $\frac{17\pi}{5}$ modulo 2π .
Réduction dans $[0, 2\pi[$
 $2\pi = \frac{10\pi}{5}$
 $\frac{17\pi}{5} - \frac{10\pi}{5} = \frac{7\pi}{5}$
 $\sin\left(\frac{17\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{5}\right)$.

Comme $\frac{7\pi}{5} = \pi + \frac{2\pi}{5}$, on peut aussi réduire dans $] -\pi, \pi[$.

$$\frac{7\pi}{5} - 2\pi = \frac{7\pi}{5} - \frac{10\pi}{5} = -\frac{3\pi}{5}$$

Donc : $\sin\left(\frac{17\pi}{5}\right) = \sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$

Angles ayant le même sinus
Deux angles ont le même sinus si :

$$t = -\frac{3\pi}{5} \text{ ou } t = \pi - \left(-\frac{3\pi}{5}\right)$$

Calcul : $t = \pi + \frac{3\pi}{5} = \frac{8\pi}{5}$
Réduisons dans $] -\pi, \pi[$:
 $\frac{8\pi}{5} - 2\pi = \frac{8\pi}{5} - \frac{10\pi}{5} = -\frac{2\pi}{5}$

👉 **Solutions** dans $] -\pi, \pi[$

$$t = -\frac{3\pi}{5} \text{ ou } t = -\frac{2\pi}{5}$$

Exercice 2

1) $\cos(t) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$
 $t = \frac{\pi}{8} + 2k\pi$ ou $t = -\frac{\pi}{8} + 2k\pi$

2) $\cos(t) = \frac{1}{2}$. Angles de référence : $\frac{\pi}{3}$
 $t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $t = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

3) $\sin(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Angles de référence : $\frac{\pi}{4}$
 $t = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $t = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

4) $\sin(t) = -1$
C'est le point bas du cercle :
 $t = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Exercice 3

On sait : $\cos a = \frac{5}{7}$, $a \in [0, \pi]$.

Dans $[0, \pi]$, le sinus est positif.

On utilise l'identité fondamentale :

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1.$$

$$\text{Donc : } \sin^2 a = 1 - \cos^2 a$$

$$= 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2 = 1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49}.$$

Comme $a \in [0, \pi] \Rightarrow \sin a \geq 0$:

$$\boxed{\sin a = \frac{\sqrt{24}}{7} = \frac{2\sqrt{6}}{7}}$$

Fonctions trigonométriques

Exercice 1

a. $\sin(-x) = -\sin(x)$

$$\Rightarrow \sin^2(-x) = \sin^2(x)$$

Donc $f(-x) = f(x) \rightarrow$ paire.

👉 **Vrai**

b. La période de $\cos(kx)$ est $T = \frac{2\pi}{k}$.

Ici : $T = \frac{2\pi}{3} \neq 3\pi$

👉 **Faux**

c. La période de $\sin(2x)$ est :

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Le $+\pi/3$ ne change rien.

👉 **Vrai**

d. $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ est impaire.

On teste :

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{-x} = \frac{\cos x}{-x}$$

$$= -\frac{\cos x}{x} = -f(x)$$

👉 **Vrai**

Exercice 2

a. $f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$

b. $f'(x) = -3\sin(x) - 2\cos(x)$

c. On utilise la formule $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \sin(x)$.

$$u'(x) = 1 \text{ et } v'(x) = \cos(x)$$

$$f'(x) = 1 \times \sin(x) + x \times \cos(x)$$

$$f'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$$

d. On pose $u(x) = 2x$, donc $u'(x) = 2$.

$\sin(u(x))$ a pour dérivée $u'(x)\cos(u(x))$

$$f'(x) = 2\cos(2x)$$

e. On pose $u(x) = 3x + 1$,

donc $u'(x) = 3$.

$\cos(u(x))$ a pour dérivée

$$-u'(x)\sin(u(x))$$

$$f'(x) = -3\sin(3x + 1)$$

f. On écrit $f(x) = (\sin(x))^2$, on

pose $u(x) = \sin(x)$, donc

$$u'(x) = \cos(x). u^2 \text{ a pour dérivée } 2u'u$$

$$f'(x) = 2\cos(x)\sin(x)$$

g. On utilise la formule

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ avec}$$

$$u(x) = \cos(x) \text{ et } v(x) = x.$$

$$u'(x) = -\sin(x) \text{ et } v'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{-\sin(x) \times x - \cos(x) \times 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x\sin(x) - \cos(x)}{x^2}$$

h. On pose $u(x) = x^2$,

donc $u'(x) = 2x$. $\cos(u(x))$ a pour

dérivée $-u'(x)\sin(u(x))$

$$f'(x) = -2x\sin(x^2)$$

Primitives de fonctions

Exercice 1

a. f est une fonction continue sur I ;

une primitive est donc F définie

$$\text{par } F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x.$$

b. f est une fonction continue sur I ;

une primitive est donc F définie

$$\text{par } F(x) = -4\sqrt{x}.$$

c. f est une fonction continue sur I ;

une primitive est donc F définie

$$\text{par } F(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Exercice 2

a. f est une fonction continue sur I .

Une primitive F est définie par $F(x) =$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + k$$

On veut que $F(1) = 5$ soit

$$\frac{1}{2} - 1 + k = 5 \text{ d'où } k = \frac{11}{2}$$

$$\text{Par conséquent } F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + \frac{11}{2}$$

b. f est une fonction continue sur I .

Une primitive F est définie par

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - \frac{x}{2} + k$$

On veut que $F(1) = 0$ soit

$$\frac{1}{3} - 1 - \frac{1}{2} + k = 0 \text{ d'où } k = \frac{7}{6}$$

Par conséquent

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - \frac{x}{2} + \frac{7}{6}$$

c. f est une fonction continue sur I ;

elle possède donc des primitives.

$$f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}$$

Une primitive F est définie par

$$F(x) = -\frac{3}{x} + \frac{1}{2x^2} + k$$

On veut que $F(3) = 2$ soit

$$-1 + \frac{1}{18} + k = 2 \text{ d'où } k = \frac{53}{18}$$

Par conséquent

$$F(x) = -\frac{3}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{53}{18}$$

Primitive : opérations et composition

a. Soit $u(x) = x^2 + 1$, donc $u'(x) = 2x$.

$f = u'u^3$ donc une primitive

$$\text{de } f \text{ sur } I \text{ est } F(x) = \frac{u^4}{4}$$

$$F(x) = \frac{(x^2 + 1)^4}{4}$$

b. Soit $u(x) = x^2 + 3$, donc $u'(x) = 2x$.

Sur I , $u(x) > 0$.

$$f = \frac{u'}{u} \text{ donc une primitive}$$

$$\text{de } f \text{ sur } I \text{ est } F(x) = \ln(u)$$

$$F(x) = \ln(x^2 + 3)$$

c. Soit $u(x) = x^2$, donc $u'(x) = 2x$.

$f = 2u'e^u$ donc une primitive

$$\text{de } f \text{ sur } I \text{ est } F(x) = 2e^u$$

$$F(x) = 2e^{x^2}$$

d. Soit $u(x) = \sin(x)$, donc $u'(x) =$

$\cos(x)$. $f = u'u^2$ donc une primitive

$$\text{de } f \text{ sur } I \text{ est } F(x) = \frac{u^3}{3}$$

$$F(x) = \frac{\sin^3(x)}{3}$$

e. Soit $u(x) = (3x - 1)^2$, donc

$$u'(x) = 2 \times 3(3x - 1) = 6(3x - 1).$$

$$f = \frac{1}{2}u'e^u \text{ donc une primitive}$$

$$\text{de } f \text{ sur } I \text{ est } F(x) = \frac{1}{2}e^u$$

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{(3x-1)^2}$$

Intégrale d'une fonction continue

1. On cherche donc à encadrer l'aire

comprise entre l'axe des abscisses et

la courbe entre les droites

d'équations $x = -2$ et $x = 2$.

Par conséquent $3 < A < 4$.

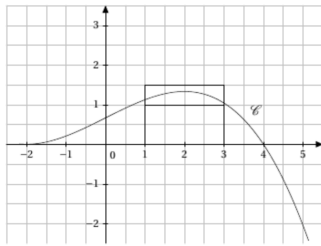
2. L'intégrale calculée correspond à

l'aire comprise entre l'axe des

abscisses, la courbe et les droites

d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

Elle est donc plus grande que celle du rectangle de côtés 2×1 et plus petite que celle du rectangle de côté $2 \times 1,5$.



Par conséquent l'affirmation est **vraie**.

3. $\ln \frac{1}{2} < 0$ donc cette solution ne convient pas pour le calcul de l'aire correspondant à cette intégrale. L'aire sous la courbe est inférieure à celle du rectangle de côtés 2×1 . Donc la solution B ne convient pas. L'aire sous la courbe est plus grande que celle du carré de côté 0,5. Donc la solution C ne convient pas non plus. La réponse est donc A.

4. L'intégrale à calculer correspond à l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$. Cette aire est plus grande que le triangle rectangle isocèle en O dont les côtés isocèles mesurent 2 unités. Donc l'aire cherchée est supérieure à $\frac{2 \times 2}{2} = 2$. Elle est également plus petite que celle du carré de côté 2. Donc l'aire est inférieure à $2 \times 2 = 4$. Par conséquent $2 \leq \int_0^2 f(x) dx \leq 4$

Primitive et intégrale

$$\begin{aligned} \text{a)} \int_5^{10} (-5x + 2) dx &= \left[-\frac{5}{2}x^2 + 2x \right]_5^{10} \\ &= \left(-\frac{5}{2} \times 10^2 + 2 \times 10 \right) - \left(-\frac{5}{2} \times 5^2 + 2 \times 5 \right) \\ &= -250 + 20 - \left(-\frac{125}{2} + 10 \right) = -177,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} I &= \int_{-1}^1 (9x^2 + 6x + 3) dx \\ &= \int_{-1}^1 (3 \times 3x^2 + 3 \times 2x + 3) dx \\ &= [3 \times x^3 + 3 \times x^2 + 3x]_{-1}^1 \\ &= (3 \times 1^3 + 3 \times 1^2 + 3 \times 1) - (3 \times (-1)^3 + 3 \times (-1)^2 + 3 \times (-1)) \\ &= (3 + 3 + 3) - (-3 + 3 - 3) \\ &= 9 + 3 = 12 \end{aligned}$$

On peut conclure que

$$I = \int_{-1}^1 (9x^2 + 6x + 3) dx = 12.$$

c) Soit $x \in [-6; -2]$.

Posons $u(x) = -2x - 2$.

On a alors $u'(x) = -2$.

On observe que $\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-2}{-2x-2}$.

Comme pour tout $x \in [-6; -2]$, $u(x) > 0$, on en déduit qu'une

primitive de $\frac{u'(x)}{u(x)}$ est $\ln(u)$.

$$\begin{aligned} \int_{-6}^{-2} \left(\frac{-2}{-2x-2} \right) dx &= \int_{-6}^{-2} \left(\frac{u'(x)}{u(x)} \right) dx \\ &= [\ln(u(x))]_{-6}^{-2} \\ &= [\ln(-2x-2)]_{-6}^{-2} \\ &= \ln(-2 \times (-2) - 2) - \ln(-2 \times (-6) - 2) \\ &= \ln(2) - \ln(10) = \ln\left(\frac{2}{10}\right) \end{aligned}$$

En simplifiant, on obtient $I = \ln\left(\frac{1}{5}\right)$.

On a donc $I = \ln\left(\frac{1}{5}\right)$.

d) Posons $u(x) = 5e^x + 3$. On a alors $u'(x) = 5e^x$.

On observe que

$$e^x (5e^x + 3)^2 = \frac{1}{5} u'(x) (u(x))^2.$$

On en déduit qu'une primitive

de $e^x (5e^x + 3)^2$ est

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \times \frac{(u(x))^3}{3} &= \frac{(5e^x + 3)^3}{15}. \\ I &= \int_0^2 e^x (5e^x + 3)^2 dx = \left[\frac{(5e^x + 3)^3}{15} \right]_0^2 \\ &= \frac{(5e^2 + 3)^3}{15} - \frac{(5e^0 + 3)^3}{15} \\ &= \frac{(5e^2 + 3)^3}{15} - \frac{8^3}{15} \\ &= \frac{(5e^2 + 3)^3 - 512}{15} \end{aligned}$$

On a donc $I = \frac{(5e^2 + 3)^3 - 512}{15}$.

Propriétés de l'intégrale

a) L'affirmation est **fausse**.

$$\begin{aligned} \int_{-5}^0 (f(t) + 4) dt &= \int_{-5}^0 f(t) dt + \int_{-5}^0 4 dt \\ &= \int_{-5}^0 f(t) dt + 4(0 - (-5)) \\ &= \int_{-5}^0 f(t) dt + 20 \end{aligned}$$

b) L'affirmation est **fausse**.

On a :

$$\int_{-5}^0 2x dt = [x^2]_{-5}^0 = 0 - 25 = -25$$

La valeur moyenne de f sur $[-5; 0]$ est donnée par

$$\frac{1}{0 - (-5)} \int_{-5}^0 2x dt = \frac{1}{5} \times (-25) = -5$$

c) L'affirmation est **vraie**.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t) dt &= [\sin(t)]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \sin(\pi) - \sin(-\pi) = 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

d) L'affirmation est **vraie**. C'est la propriété de la linéarité de l'intégrale.

e) L'affirmation est **fausse**.

$F'(x) = e^{x^2} > 0$ donc F est croissante sur $[0; +\infty[$.

f) L'affirmation est **fausse**.

C'est $\int_3^7 f(t) dt = F(7) - F(3)$.

g) L'affirmation est **vraie**. C'est la définition de la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle.

h) L'affirmation est **fausse**.

$$\begin{aligned} \int_5^8 6 dt &= [6t]_5^8 = 6 \times 8 - 6 \times 5 \\ &= 48 - 30 = 18 \end{aligned}$$

i) L'affirmation est **vraie**.

Si une fonction continue admet un minimum m et un maximum M sur $[5; 8]$, alors :

$$m(8 - 5) \leq \int_5^8 f(x) dx \leq M(8 - 5)$$

On a $m = 1$ et $M = 6$, donc on a bien $3 \leq \int_5^8 f(x) dx \leq 18$.

j) L'affirmation est **fausse**.

Ce n'est vrai que si on vérifie que f est une fonction positive.

Intégration par parties

Exercice 1

1) On pose

$$u'(x) = e^{-x} \text{ et } v(x) = 3x - 1.$$

Comme $(e^{-x})' = -e^{-x}$, une primitive de e^{-x} est $-e^{-x}$.

On a donc $u(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = 3$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (3x - 1) e^{-x} dx \\ &= [(3x - 1)(-e^{-x})]_0^1 - \int_0^1 -3e^{-x} dx \\ &= [(3x - 1)(-e^{-x})]_0^1 + [3e^{-x}]_0^1 \\ &= [e^{-x}(-3x + 2)]_0^1 \\ &= -5e^{-1} + 2 \end{aligned}$$

2) Ici, on pose

$$u'(x) = \cos(-2x) \text{ et } v(x) = 3x + 2.$$

Comme $(\sin(-2x))' = -2\cos(-2x)$, une primitive de $\cos(-2x)$ est $-\frac{1}{2}\sin(-2x)$.

On a donc

$$u(x) = -\frac{1}{2}\sin(-2x) \text{ et } v'(x) = 3.$$

$$I = \int_0^{\pi/4} (3x + 2)\cos(-2x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \left[-\frac{1}{2}(3x+2)\sin(-2x) \right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} -\frac{3}{2}\sin(-2x)dx \\
&= \left[-\frac{1}{2}(3x+2)\sin(-2x) \right]_0^{\pi/4} - \left[-\frac{3}{4}\cos(-2x) \right]_0^{\pi/4} \\
&= \left[-\frac{1}{2}(3x+2)\sin(-2x) + \frac{3}{4}\cos(-2x) \right]_0^{\pi/4} \\
&= \left(\frac{3}{8}\pi + 1 \right) - \frac{3}{4} = \frac{3}{8}\pi + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

3) Ici, on pose

$$u'(x) = -4x + 3 \text{ et } v(x) = \ln(x).$$

On a donc

$$u(x) = -2x^2 + 3x \text{ et } v'(x) = \frac{1}{x}.$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^e (-4x + 3)\ln(x)dx \\
&= [(-2x^2 + 3x)\ln(x)]_1^e - \int_1^e (-2x + 3)dx \\
&= [(-2x^2 + 3x)\ln(x)]_1^e - [-x^2 + 3x]_1^e \\
&= [(-2x^2 + 3x)\ln(x) + x^2 - 3x]_1^e \\
&= -e^2 + 2
\end{aligned}$$

4) On écrit x en fonction de $5x + 3$:

$$x = \frac{1}{5}(5x + 3) - \frac{3}{5}$$

On en déduit :

$$\frac{x}{(5x+3)^3} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{(5x+3)^2} - \frac{3}{5} \times \frac{1}{(5x+3)^3}$$

$$\text{Une primitive de } \frac{1}{(5x+3)^2} \text{ est } -\frac{1}{5(5x+3)}.$$

$$\text{Une primitive de } \frac{1}{(5x+3)^3} \text{ est } -\frac{1}{10(5x+3)^2}.$$

$$\text{Une primitive de } \frac{x}{(5x+3)^3} \text{ est donc :}$$

$$\begin{aligned}
F(x) &= -\frac{1}{25(5x+3)} + \frac{3}{50(5x+3)^2} \\
I &= [F(x)]_0^1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(1) &= -\frac{1}{25 \times 8} + \frac{3}{50 \times 64} \\
&= -\frac{1}{200} + \frac{3}{3200} = -\frac{13}{3200}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(0) &= -\frac{1}{25 \times 3} + \frac{3}{50 \times 9} \\
&= -\frac{1}{75} + \frac{1}{150} = -\frac{1}{150}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= F(1) - F(0) = -\frac{13}{3200} - \left(-\frac{1}{150}\right) \\
&= -\frac{39}{9600} + \frac{64}{9600} = \frac{25}{9600}
\end{aligned}$$

$$\text{On a donc } I = \frac{1}{384}.$$

Vecteurs dans l'espace

Exercice 1

On calcule d'abord $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\text{On sait que } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix},$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8-4 \\ 0-3 \\ -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{donc } 2\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{De même : } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \text{ donc } 3\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On en déduit alors } 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 14 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Soit $M(x; y; z)$ le point cherché. On a

$$\text{alors } \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix}, \text{ d'où } \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x - 4 \\ y - 3 \\ z + 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM} &= 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = 14 \\ y - 3 = -3 \\ z + 3 = -7 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \\ y = 0 \\ z = -10 \end{cases}
\end{aligned}$$

Le point M a donc pour coordonnées : $M(18; 0; -10)$.

Exercice 2

La méthode consiste à savoir si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

On cherche s'il existe un réel k tel

$$\text{que } \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}.$$

Pour le vérifier, on calcule les coordonnées des deux vecteurs, en sachant

$$\text{que } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}.$$

$$\text{On obtient } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6-3 \\ 6+3 \\ -16+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Il vient de la même manière } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 2k \\ 9 = 6k \\ -15 = -10k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{3}{2} \\ k = \frac{3}{2} \\ k = \frac{3}{2} \end{cases}$$

On vient de prouver que $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

Les vecteurs sont colinéaires.

Les points A , B et C sont donc **alignés**.

Exercice 3

Les quatre points sont coplanaires s'il

existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que

$$\overrightarrow{AD} = \lambda_1\overrightarrow{AB} + \lambda_2\overrightarrow{AC} \quad (1)$$

c'est à dire si $\overrightarrow{AD}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

On calcule les coordonnées des trois vecteurs :

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -5-1 \\ 6-2 \\ 17-3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 4-2 \\ -2-3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ -6-2 \\ -1-3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

On cherche des réels λ_1 et λ_2 qui vérifient (1), ce qui est équivalent à résoudre le système :

$$\begin{cases} -6 = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 4 = 2\lambda_1 - 8\lambda_2 \\ 14 = -5\lambda_1 - 4\lambda_2 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on obtient

$$\lambda_1 = -2 \text{ et } \lambda_2 = -1.$$

Le système admet donc un couple

$$\text{solution : } S = \{(-2; -1)\}.$$

On vient donc de montrer que

$$\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}. \text{ Les points}$$

A , B , C et D sont **coplanaires**.

Droites de l'espace

Exercice 1

a. (HF) et (DF) sont sécantes en F , donc elles sont également coplanaires.

b. $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont des vecteurs directeurs des droites (AG) et (EC) . $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AE})$ forment une base du plan (ACE) puisque ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} \text{ (donc } G \text{ est bien dans le plan } (ACE)).$$

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} -$$

$\overrightarrow{AE}$: $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{EC}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (AG) et (EC) sont coplanaires sécantes.

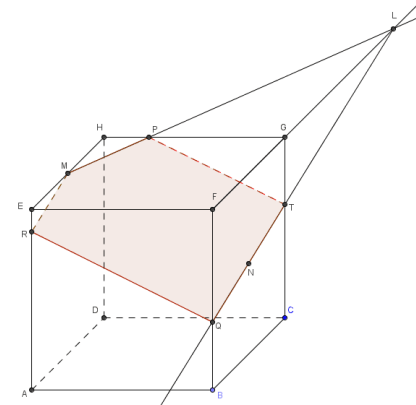
c. Si (EC) et (FB) étaient coplanaires, elles seraient incluses dans le plan (FBC) . $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{BC}$ forment une base du plan (FBC) puisque ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
Or :
 $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF} - 1\overrightarrow{BF} + 1\overrightarrow{BC}$.
 $\overrightarrow{EF}$ est un vecteur normal au plan (FBC) , il ne peut pas être décomposé dans la base $(\overrightarrow{BF}; \overrightarrow{BC})$, par conséquent $\overrightarrow{EC}$ non plus.
 (EC) et (FB) sont donc non coplanaires.

d. $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$;
les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires (et même égaux), donc les droites (EG) et (AC) sont parallèles et coplanaires

Exercice 2

1. Les 2 droites appartiennent à la face $EFGH$. Les droites (EH) et (FG) sont parallèles et le point M appartient à $[EH]$ mais pas le point P . Par conséquent les droites (MP) et (FG) sont sécantes.

2. b. L'intersection des 2 plans est représentée en trait plein rouge (les 2 droites (PT) et (RQ) sont parallèles).



3. La section du cube par le plan (MNP) est représentée par le polygone $RMPTQ$.

Remarque : on peut vérifier que les droites (TQ) et (RM) sont parallèles.

Représentation paramétrique d'une droite

Exercice 1

Soit $M(x; y; z)$ un point de la droite (d) .
 $M \in (d)$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{FM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
Ce qui est équivalent à dire qu'il existe

un réel t tel que : $\overrightarrow{FM} = t \times \vec{v}$.

On calcule : $\overrightarrow{FM} \begin{pmatrix} x - (-2) \\ y - 4 \\ z - (-6) \end{pmatrix}$, et on

obtient : $\overrightarrow{FM} \begin{pmatrix} x + 2 \\ y - 4 \\ z + 6 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{FM} = t \times \vec{v}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = t \times 2 \\ y - 4 = t \times (-5) \\ z + 6 = t \times (-3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t - 2 \\ y = -5t + 4 \\ z = -3t - 6 \end{cases}$$

Une représentation paramétrique de la droite (d) est donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x = 2t - 2 \\ y = -5t + 4 \\ z = -3t - 6 \end{cases}$$

Exercice 2

Il suffit de vérifier s'il existe un réel t qui valide le système pour les coordonnées du point M .

Réolvons le système :

$$\begin{cases} 20 = 8 - 3t \\ 8 = -1 - 2t \\ -29 = -5 + 6t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3t = 20 - 8 \\ -2t = 8 + 1 \\ 6t = -29 + 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3t = 12 \\ -2t = 9 \\ 6t = -24 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = -\frac{9}{2} \\ t = -4 \end{cases}$$

Le système n'admet pas de solution.
Le point M n'appartient pas à la droite (Δ)

Équation cartésienne d'un plan

1) Le vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est déjà

donné. Une équation du plan $\mathcal{P}$ est de la forme : $3x - 2y + z + d = 0$

Le point $A(2; -; 14)$ appartient au plan, donc :

$$\begin{aligned} 3 \times 2 - 2 \times (-1) + 4 + d &= 0 \\ 6 + 2 + 4 + d &= 0 \\ d &= -12 \end{aligned}$$

On en déduit une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$:

$$3x - 2y + z - 12 = 0$$

2)

Le point M et le vecteur $\vec{u}$ appartiennent au plan $\mathcal{P}$. On calcule un second vecteur du plan à l'aide du point N :

$$\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 1 - 0 \\ 0 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On cherche $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tel que

$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$:

$$\begin{aligned} a + 2b - c &= 0 \\ 2a + b - 2c &= 0 \end{aligned}$$

En résolvant ce système, on obtient $a = c$ et $b = 0$. En choisissant $a = 1$, on

obtient $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Une équation du plan $\mathcal{P}$ est de la forme :
 $x + z + d = 0$

Le point $M(1; 0; 2)$ appartient au plan, donc : $1 + 2 + d = 0$

$d = -3$

On en déduit une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$: $x + z - 3 = 0$

3) On calcule deux vecteurs directeurs du plan :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 - 2 \\ 3 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 - 2 \\ 0 - 0 \\ 4 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On cherche $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tel que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$:

$$\begin{aligned} -2a + 3b &= 0 \\ -2a + 4c &= 0 \end{aligned}$$

En choisissant $a = 6$, on obtient

$b = 4$ et $c = 3$, donc $\vec{n} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Une équation du plan (ABC) est de la forme : $6x + 4y + 3z + d = 0$

Le point $A(2; 0; 0)$ appartient au plan, donc : $6 \times 2 + 4 \times 0 + 3 \times 0 + d = 0$

$d = -12$

On en déduit une équation cartésienne du plan (ABC) : $6x + 4y + 3z - 12 = 0$

Produit scalaire

Exercice 1

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7 \times 5 + 7 \times (-1) + (-8) \times 7$
 $= 35 - 7 - 56 = -28$

b)

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= -10 \times 10 + 1 \times (-6) \\ &\quad + (-6) \times (-5) \\ &= -100 - 6 + 30 = -76 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= 2 \times 2 + 7 \times 2 + (-8) \times (-5) \\ &= 4 + 14 + 40 = 58 \end{aligned}$$

Exercice 2

On sait que $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ -16 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. $\vec{n}$ est donc orthogonal à tout vecteur de ce plan, ce qui implique que $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

Ainsi, on a nécessairement :
 $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ (L_1) et $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ (L_2).

Traduisons ces conditions dans un système de 2 équations à 2 inconnues, que l'on résout ici par combinaisons linéaires (d'autres méthodes sont possibles) :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4 \times a - 4 \times b - 5 \times (-16) = 0 \\ -5 \times a + b + 2 \times (-16) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 4b = -80 \quad (L_1) \\ -5a + b = 32 \quad (L_2) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 20a - 20b = -400 \quad (5L_1) \\ 20a - 4b = -128 \quad (-4L_2) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 20a - 20b = -400 \quad (L_1) \\ 16b = 272 \quad (L_2 - L_1) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 20a - 340 = -400 \quad (L_1) \\ b = 17 \quad (L_2) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \quad (L_1) \\ b = 17 \quad (L_2) \end{cases} \end{aligned}$$

Un vecteur normal aux deux vecteurs de l'énoncé est : $\vec{n} \begin{pmatrix} -3 \\ 17 \\ -16 \end{pmatrix}$.

Remarque : tout vecteur non nul et colinéaire à ce vecteur sera aussi normal au plan

Dénombrement

a) Réponse : 6

X compte 3 éléments et Y compte 2 éléments. D'après le principe multiplicatif, $X \times Y$ compte
 $3 \times 2 = 6$ couples.

b) Réponse : 24

On a trois ensembles à 4, 3 et 2 éléments. Le nombre de menus est
 $4 \times 3 \times 2 = 24$

c) Réponse : 60

Le nombre de triplets est $n_1 \times n_2 \times n_3$
 $5 \times 2 \times 6 = 60$

d) Réponse : 13

E et F sont disjoints, donc $E \cap F = \emptyset$
Le nombre d'éléments de $E \cup F$ est
 $8 + 5 = 13$

e) Réponse : Sinon les éléments communs seraient comptés deux fois.

Si E et F ont des éléments communs, ces éléments appartiennent aux deux ensembles.

f) Réponse : 16

Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n , soit $2^4 = 16$

g) Réponse : 4

Un singleton est une partie contenant exactement un élément. Il y a autant de singletons que d'éléments dans E , soit 4.

h) Réponse : un sous ensemble non ordonné de E. Une partie de E est un sous ensemble de E , sans notion d'ordre entre ses éléments

Arrangement et permutation

Exercice 1

Le problème de Edmond revient à déterminer le nombre de permutations d'un 10-uplet. On sait que le nombre de permutations d'un k -uplet est $k!$.
On calcule donc $10! = 3628800$
Donc le nombre de rangements possibles des 10 cahiers est égal à 3 628 800.

Exercice 2

Soit $E = \{0; 1; \dots; 9\}$ et
 $F = \{A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot E \cdot F \cdot G \cdot H\}$.

L'ordre est important dans ce code. Il s'agit donc d'un 8-uplet composé de 3 éléments de E puis de 5 éléments de F .

Pour les 3 chiffres, il y a répétition possible, donc il y a 10^3 possibilités.

Pour les 5 lettres, il n'y a pas de répétition possible, puisqu'elles sont distinctes. Il s'agit donc de choisir 5 éléments parmi 8, en respectant l'ordre mais sans répétition, ce qui correspond à l'arrangement $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$.

Il y a $10^3 \times 6720$ possibilités de code. Ce qui donne au total 6 720 000 possibilités de code.

Exercice 3

a. Pour former le bureau, on choisit 3 personnes parmi 12 en tenant compte de l'ordre, puisque les postes sont distincts. Il s'agit donc d'un

arrangement de 3 éléments parmi 12, noté A_{12}^3 .

On calcule $A_{12}^3 = 12 \times 11 \times 10 = 1320$
Donc le nombre de bureaux différents que l'on peut former est égal à 1 320.

b. Pour la photo de groupe, tous les 12 membres sont rangés en ligne. Il n'y a pas de choix à effectuer, seulement un ordre à déterminer. Il s'agit donc d'une permutation des 12 éléments.

On sait que le nombre de permutations de n éléments est $n!$.

On calcule donc $12! = 479001600$

Donc le nombre de dispositions possibles pour la photo est égal à 479 001 600

Combinaisons

Exercice 1

1. Il existe $\binom{32}{5} = 201376$ tirages possibles.

2. On a donc tiré que des carreaux. Il y en a 8 dans le jeu.

Il y a par conséquent $\binom{8}{5} = 56$ tirages ne comportant que des carreaux.

3. On a $\binom{8}{2} = 28$ choix possibles pour les cœurs et $\binom{8}{3} = 56$ choix possibles pour les piques.

Il y a donc $28 \times 56 = 1568$ tirages possibles contenant 2 cœurs et 3 piques.

Exercice 2

$$A = \frac{3}{5! \times 3!} + \frac{4}{7!} = \frac{1}{2 \times 5!} + \frac{4}{7!}$$

$$= \frac{6 \times 7 + 2 \times 4}{2 \times 7!} = \frac{50}{2 \times 7!} = \frac{25}{7!}$$

$$B = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$C = \frac{2}{n!} + \frac{2}{(n+2)!} + \frac{2}{(n+1)!}$$

$$= \frac{2((n+1)(n+2) + 1 + (n+2))}{(n+2)!}$$

$$= \frac{2(n^2 + 3n + 2 + 1 + n + 2)}{(n+2)!}$$

$$= \frac{2(n^2 + 4n + 5)}{(n+2)!}$$

$$D = \frac{12!}{10! 2!} = \frac{12 \times 11 \times 10!}{10! \times 2}$$

$$= 6 \times 11 = 66$$

$$E = \frac{6 \times 8!}{6!} = \frac{6 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!}$$

$$= 6 \times 7 \times 8 = 336$$

Exercice 3

1. On choisit 2 boules parmi 15. Il y a donc $\binom{15}{2} = 105$ issues possibles.

2. Il y a $\binom{7}{2} = 21$ façons d'extraire 2 boules noires.

3. Il y a $\binom{8}{2} = 28$ façons d'extraire 2 boules blanches.

Probabilités conditionnelles

Exercice 1

a. $p(E \cap G)$

Élèves qui sont Garçons ET font Anglais : 10. Au total : 40

$$p(E \cap G) = \frac{10}{40}$$

b. $p(D \cap F)$

Élèves qui sont Filles ET font Allemand : 10. Au total : 40

$$p(D \cap F) = \frac{10}{40}$$

c. $p_E(F) = p(F | E)$

Nombre de filles en anglais : 6

Total anglais : 16. $p(F | E) = \frac{6}{16}$

d. $p_F(D) = p(D | F)$

On cherche : parmi les filles, quelle proportion font Allemand ?

Nombre de filles en allemand : 10
Total filles : 16

$$p(D | F) = \frac{10}{16}$$

Exercice 2

a. On lit directement :

$$P(A) = 0,4$$

Donc $P(\bar{A}) = 1 - 0,4 = 0,6$

Sur les branches issues de A :

$$P_A(B) = 0,7$$

Donc $P_A(\bar{B}) = 1 - 0,7 = 0,3$

Sur les branches issues de $\bar{A}$:

Une branche indique 0,1 vers $\bar{B}$

donc : $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,1$

Donc : $P_{\bar{A}}(B) = 1 - 0,1 = 0,9$

b. Arbre complété

Branches issues de A :

vers B : **0,7**

vers $\bar{B}$: **0,3**

Branches issues de $\bar{A}$:

vers B : **0,9**

vers $\bar{B}$: **0,1**

c. Calcul des probabilités

$$p(A \cap B)$$

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$$

$$p(A \cap B) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$$

$$p(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(\bar{B})$$

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,6 \times 0,1 = 0,06$$

Exercice 3

1. Probabilités données dans l'énoncé

$$P(S) = \frac{3}{5}, P(\bar{S}) = \frac{2}{5}$$

$$P_S(P) = 0,5, P_{\bar{S}}(P) = 0,2$$

2. Calcul de $P(S \cap P)$

On cherche la probabilité que Noah **boive un smoothie ET utilise une paille**.

$$P(S \cap P) = P(S) \times P_S(P)$$

$$P(S \cap P) = \frac{3}{5} \times 0,5 = \frac{3}{10}$$

Réponse : $\frac{3}{10}$

3. Calcul de $P(P | \bar{S})$

C'est la probabilité qu'il utilise une paille **quand il boit un soda**. Elle est directement dans l'énoncé :

$$P_{\bar{S}}(P) = 0,2$$

Réponse : 0,2

Probabilités totales

Exercice 1

a. $p(A \cap B) = p(A) + p(B) \rightarrow$ **Faux**

La bonne formule est :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

b. $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) \rightarrow$ **Vrai**

Attention : cette égalité n'est

vraie que si A et B sont indépendants.

c. $p(B) = p_A(B) + p_{\bar{A}}(B) \rightarrow$ **Faux**

La bonne formule (loi des probabilités totales) est :

$$p(B) = p(A) p_A(B) + p(\bar{A}) p_{\bar{A}}(B).$$

d. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) \rightarrow$ **Faux**

Vrai seulement

si A et B sont incompatibles.

En général :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

Exercice 2

a. Données : $p(A) = 0,3$

donc $p(\bar{A}) = 1 - 0,3 = 0,7$

Sous A :

$$p_A(B) = 0,6$$

$$p_A(\bar{B}) = 0,4$$

Sous $\bar{A}$:

$$p_{\bar{A}}(B) = 0,8$$

$$p_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,2$$

b. Calcul de $p(B)$

$$p(B) = p(A) \times p_A(B) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B)$$

$$p(B) = 0,3 \times 0,6 + 0,7 \times 0,8$$

$$p(B) = 0,18 + 0,56 = 0,74$$

Réponse : $p(B) = 0,74$

c. Probabilité de A sachant B

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

$$\text{Or : } p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$$

$$\text{Donc : } p_B(A) = \frac{0,18}{0,74} \approx 0,243$$

Réponse : $p_B(A) \approx 0,243$

Loi de Bernoulli

1. **b**, exactement 2 issues, succès et échec.

2. **b**, la probabilité de l'échec est $1 - p$.

3. **d**, il n'y a que 2 issues possibles, cœur ou pas cœur.

4. **a**, $P(X = 1) = p$.

5. **a**, $E(X) = p$.

6. **c**, $V(X) = p(1 - p)$.

7. **b**, $\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$.

8. **a**, $0 < p < 1$.

9. **a**, c'est la définition du schéma de Bernoulli.

10. **b**, chaque épreuve de Bernoulli n'a que 2 issues, donc 2 branches à chaque nœud

Loi binomiale

Exercice 1

$$P(X = 0) = \binom{3}{0} \times p^0 \times (1 - p)^{3-0}$$

$$= (1 - p)^3$$

$$\text{On a donc } (1 - p)^3 = \frac{1}{125}$$

$$\Leftrightarrow (1 - p)^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \Leftrightarrow 1 - p = \frac{1}{5}$$

$$\text{donc } p = \frac{4}{5}$$

La bonne réponse est la réponse **A**.

Exercice 2

La variable aléatoire X qui donne le nombre de résultats « pile » sur n lancers

suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

On cherche $P(X \leq 2)$ soit $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$$\bullet P(X = 0) = \binom{n}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-0} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\bullet P(X = 1) = \binom{n}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1} = n \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\bullet P(X = 2) = \binom{n}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Donc

$$P(X \leq 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + n \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(1 + n + \frac{n(n-1)}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

La bonne réponse est la réponse **D**.

Exercice 3

$p(X \leq 13)$ calcule la probabilité que $X \leq 13$.

On veut en même temps $X > 6$, il faut donc enlever les premières valeurs de X , quand $X \leq 6$.

La réponse est donc $p(X \leq 13)$ à qui on ôte $p(X \leq 6)$.

Soit $p(X \leq 13) - p(X \leq 6)$

La bonne réponse est la réponse **A**

Somme de variables aléatoires

Exercice 1

1. L'élève répond au hasard. Il a donc 3 choix équiprobables et une seule bonne réponse qui lui rapporte 1 point : $p(X_1 = 1) = \frac{1}{3}$ et $p(X_1 = 0) = \frac{2}{3}$. Il s'agit d'une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{3}$.

2. a. La note obtenue est égale à la somme des points obtenus à chacune des 5 questions : elle est donnée par $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$. Comme au 1., X_2, X_3, X_4 et X_5 suivent la même loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{3}$.

Or X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont deux à deux indépendantes, donc :

$S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$ suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{3}$.

b. La note ramenée sur 20 est égale à $N = 4S$. S suit une loi binomiale de

paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{3}$,

d'espérance : $E(S) = n \times p = 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

Par linéarité : $E(N) = E(4S) =$

$$4E(S) = 4 \times \frac{5}{3} = \frac{20}{3} \approx 6,7 \text{ à } 0,1 \text{ près}$$

L'élève peut espérer environ **6,7 sur 20**.

Exercice 2

Le dé est bien équilibré donc X suit une loi équirépartie sur $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$:

$$p(X = 1) = p(X = 2) = p(X = 3) =$$

$$p(X = 4) = p(X = 5)$$

$$= p(X = 6) = \frac{1}{6}$$

L'espérance de X est donc :

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

Les 6 urnes ont été remplies au hasard, donc

$$p(Y = 1) = p(Y = 2) = p(Y = 5) =$$

$$p(Y = 10) = p(Y = 20)$$

$$= p(Y = 100) = \frac{1}{6}$$

L'espérance de Y est :

$$E(Y) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 10 \times \frac{1}{6} + 20 \times \frac{1}{6} + 100 \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{138}{6} = 23$$

Le montant des pièces tirées par le joueur est égal à $X \times Y$.

Or X et Y sont indépendantes

donc $E(X \times Y) = E(X) \times E(Y) =$

$$\frac{7}{2} \times 23 = 80,5 < 100$$

donc inférieure à la mise de 1 euro : **le jeu est défavorable au joueur**

Loi des grands nombres

Exercice 1

1) Le forage conduit à une nappe de pétrole avec une probabilité 0,1 ou pas avec une probabilité 0,9. C'est donc bien une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,1. Il y a bien deux issues possibles.

2)

a. Les forages doivent être indépendants pour que X suive une loi binomiale.

$$b. p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,9^9 \approx 0,613$$

Exercice 2

On considère que le tirage de 1000 résistances a lieu avec remise et que donc les tirages sont indépendants les uns des autres. Le nombre X de résistances défectueuses suit donc une loi binomiale de paramètres 1000 et 0,005.

$$a. p(X = 2) = \binom{1000}{2} \times 0,005^2 \times 0,995^{998} = 499500 \times 0,005^2 \times 0,995^{998} \approx 0,084$$

$$b. p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = \binom{1000}{0} \times 0,995^{1000} + \binom{1000}{1} \times 0,005 \times 0,995^{999} + \binom{1000}{2} \times 0,005^2 \times 0,995^{998} \approx 0,124$$

$$c. p(X \geq 2) = 1 - p(X \leq 1) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1) = 1 - 0,995^{1000} - 1000 \times 0,005 \times 0,995^{999} \approx 0,960$$

Exercice 3

1) Les interrogations se font de manière indépendante les unes des autres et à chaque interrogation la probabilité d'avoir une fille est $\frac{20}{30}$ soit $\frac{2}{3}$ donc X suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{2}{3}$.

2) Pour $n = 10$

$$p(X = 4) = \binom{10}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^6 = 210 \times \frac{16}{81} \times \frac{1}{729} \approx 0,057$$

$$p(X \geq 4) = 1 - p(X \leq 3) \approx 0,980$$

3) On cherche n tel que

$$p(X = 0) \leq 0,001 \text{ or}$$

$$p(X = 0) = \binom{n}{0} \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^n}$$

$$p(X = 0) \leq 0,001 \Leftrightarrow \frac{1}{3^n} \leq 0,001$$

$$\Leftrightarrow 3^n \geq \frac{1}{0,001}$$

$$\Leftrightarrow 3^n \geq 1000$$

À l'aide d'un tableau de valeurs de la calculatrice, on a $3^6 = 729$ et $3^7 = 2187$ donc $n \geq 7$

Il faut donc interroger pendant au moins 7 jours consécutifs pour que la probabilité de n'avoir aucune fille soit inférieure à 0,001

LES FICHES MAGIQUES

cartonner en maths,
une fiche synthétique claire et colorée simplement
méthodes et exos expliqués pas à pas

Algèbre

Convergence, divergence

★ **THÉORÈME DE CONVERGENCE MONOTONE**

- Une suite **croissante** et **majorée** est convergente.
- Une suite **décroissante** et **minorée** est convergente.

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang n_0 .

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

★ **THÉORÈME DES GENDARMES**

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir de n_0 .
Si (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite l , alors v_n converge aussi vers l .

le théorème de comparaison et le théorème des gendarmes

➔ Pense à utiliser le théorème des gendarmes dès que tu vois : $(-1)^n, \sin(n), \cos(n)$

Méthode

1. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - (-1)^n)$.

On détermine une suite qui majore (ou mineure) la suite dont on cherche la limite.
Pour tout entier naturel n , on a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ d'où $-(-1)^n \geq -1$
donc $n^2 - (-1)^n \geq n^2 - 1$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 1 = +\infty$
Donc, d'après le théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - (-1)^n) = +\infty$ ✓

2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\sin(n)}{n}\right)$.

Pour tout entier $n > 0$, on a $-1 \leq \sin(n) \leq 1$
d'où $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$

On pose $u_n = 1 - \frac{1}{n}$, $v_n = 1 + \frac{\sin(n)}{n}$ et $w_n = 1 + \frac{1}{n}$
On a donc $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout $n > 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\sin(n)}{n}\right) = 1$ ✓

3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n^2)}{n}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on a :
 $-1 \leq \sin(n^2) \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n^2)}{n} \leq \frac{1}{n}$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

D'après le théorème des gendarmes $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n^2)}{n} = 0$

Probabilités

Combinaisons

DÉFINITION
Soit E un ensemble fini à n éléments ($n \in \mathbb{N}$). Une partie non vide de E est appelée sous-ensemble de E .
Si E est un ensemble fini à n éléments, le nombre de sous-ensembles de E est 2^n .

PROPRIÉTÉ
Si E est un ensemble fini à n éléments, le nombre de parties de E à k éléments est noté C_n^k et vérifie :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

EXEMPLE
 $E = \{a, b, c\}$ compte $2^3 = 8$ parties : $\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$

COEFFICIENT BINOMIAL
On appelle coefficient binomial le nombre C_n^k (ou n au-dessus, k en dessous) tel que :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

PROPRIÉTÉ
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n$, on a :

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

RELATION DE PASCAL
Relation de Pascal : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n$.
On a :

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

Géométrie

Droites de l'espace

DÉFINITION
On peut définir une droite de l'espace :
- soit par deux points distincts ou
- soit par un point et un vecteur non nul ou
- soit par un point et une direction.

VECTEUR DIRECTEUR
Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, est une droite.

POSITION RELATIVE DE DEUX DROITES

COPLANAIRES
deux droites parallèles
deux droites sécantes
deux droites confondues

NON COPLANAIRES
deux droites skew

EXEMPLE
- (AB) et (CD) sont coplanaires (dans un plan).
- (EF) et (GH) sont sécantes en I (dans un plan).
- (IJ) et (KL) sont parallèles (dans un plan).

Algèbre

Continuité et TVI

C'EST QUOI LA CONTINUITÉ ?
fonction continue en un point
fonction continue sur un intervalle

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES (TVI)
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$.
Pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$.

COROLLAIRE
Si f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$, alors pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a, b]$.

Algèbre

Démonstration par récurrence

La démonstration par récurrence s'utilise lorsqu'on cherche à démontrer une proposition qui s'applique aux entiers naturels. Il y a 3 étapes dans la démonstration.

LE PRINCIPE
On suppose que la propriété est vraie au rang n .

UN EXEMPLE
Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2n+1}$.
Démontrer que $u_n = \frac{2}{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Initialisation
On vérifie que la propriété est vraie au rang n_0 .

2. Hérédité
On suppose que la propriété est vraie au rang n . On veut montrer qu'elle est vraie au rang $n+1$.

3. Conclusion
On conclut que la propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$.



15 MIN PAR JOUR
pour comprendre et progresser en maths



CAMPUS XYZ